Konstruksi Homomorfisma Ring Matriks atas Ring Semigrup

(Tesis)

Oleh

LISTIANA

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

HOMOMORPHISM CONTRUCTION RING MATRIX OVER RING SEMIGROUP

By

Listiana

Let R be a ring and T be a semigroup. The semigroup ting $R[T]$ is the set of all function f from T to R with finite $supp(f)$. Which is completed with the same addition and multiplication operation on the polynomial ring $R[X]$. One the other hand, the matrix ring $M_n(R)$ is the set of all matrices on the ring R of size $n \times n$ equipped with addition and matrix multiplication operations. In this research, the matrix rings $M_n(R_1[T_1])$ and $M_n(R_2[T_2])$ are constructed with R_1, R_2 are rings and T_1, T_2 semigroups. In addition, amapping τ from $M_n(R_1[T_1])$ to $M_n(R_2[T_2])$ is defined using semigroup homomorphism $\delta: T_1 \to T_2$ and ring homomorphism $\mu: R_1 \to R_2$. Furthermore, it is proved that τ is a ring homomorphism. Moreover, sufficient cobditions are given for τ to be a monomorphism.

Keywords: Semigroup Ring, Semigroup Homomorphisms, Ring Homomorphisms, a Matrix Over Rings, Matrix Rings.

ABSTRAK

KONSTRUKSI HOMOMORFISMA RING MATRIKS ATAS RING SEMIGRUP

Oleh

Listiana

Diberikan sebarang ring R dan semigrup T. Ring semigrup $R[T]$ adalah himpunan semua fungsi f dari T ke R dengan $supp\ (f)$ berhingga yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan pergandaan yang sama pada ring polinomial $R[X]$. Di sisi lain, ring matriks $M_n[R]$ adalah himpunan semua matriks atas ring R berukuran $n \times n$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Didalam penelitian ini , didefinisikan ring matriks $M_n(R_1[T_1])$ dan $M_n(R_2[T_2])$ dengan R_1, R_2 ring dan S_1, S_2 semigrup. Selain itu, didefinisikan pemetaan τ dari $M_n(R_1[T_1])$ dan $M_n(R_2[T_2])$ dengan menggunakan homomorfisma semigrup $\delta: S_1 \to S_2$. Selanjutnya, dibuktikan τ merupakan homomorfisma ring. Lebih lanjut, diberikan syarat cukup agar τ merupakan monomorfisma.

Kata Kunci: Ring Semigrup, Homomorfisma Semigrup, Homomorfisma Ring, Matriks atas Ring.

KONSTRUKSI HOMOMORFISMA RING MATRIK ATAS RING SEMIGRUP

Oleh

Listiana

TESIS

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada
Program Studi Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Tesis	: **KONSTRUKSI HOMOMORFISMA RING MATRIKS ATAS RING SEMIGRUP**
Nama Mahasiswa	: Listiana
Nomor Pokok Mahasiswa	: 2027031006
Program Studi	: Magister Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.	**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP 19800206 200312 1 003	NIP 19840627 200604 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** .....

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** .....

2. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.
NIP 19710415 199803 1 005

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **12 Agustus 2022**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Listiana**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2027031006**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul **"KONSTRUKSI HOMOMORFISMA RING MATRIKS ATAS RING SEMIGRUP"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 12 Agustus 2022
Penulis

Listiana
NPM. 2027031006

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Listiana lahir di Pangkul-Tanggamus pada tanggal 22 Agustus 1997, sebagai anak pertama dari pasangan Bapak Tasio dan Ibu Salmiyah. Penulis menempuh pendidikan sekolah dasar di SDN 02 Sudimoro pada tahun 2003-2009, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di SMPN 02 Wonosobo pada tahun 2009-2012 dan melanjutkan pendidikan menengah atas di SMA Muhammadiyah 01 Pringsewu 01 pada tahun 2012-2015.

Pada tahun 2015-2019, Penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Sekolah Tinggi Keguruan dan Ilmu Pendidikan Muhammadiyah Pringsewu Lampung (STKIP MPL). Penulis bekerja sebagai guru bidang studi matematika di SMP Muhammadiyah 01 Wonosobo sampai dengan saat ini.

Pada tanggal 29 September 2020, Penulis melanjutkan Pendidikan Magister di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

KATA MUTIARA

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan".
(Qs. Al Insyirah: 5)

"Orang yang cerdan adalah orang yang mengendalikan dirinyadan bekerja untuk kehidupan setelah kematian".
(HR. Tirmidzi)

"Masa-masa sulit akan selalu ada, begitu juga pertolongan Allah dan Kesuksesanku hanya karena Allah".
(Listiana)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah

Puji dan syukur hanya milik Allah Subhana Wata'ala atas nikmat dan hidayah yang diberikan, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu 'Alaihi Wassallam

kupersembahkan karya kecilku ini untuk:

Keluarga

Bapak Tasio, Ibu Salmiyah, adik tercinta Frans Heln Hermawan dan Ari Kusmanto yang selalu mendoakan, berkorban, dan hal lain yang tak dapat diungkapkan dengan kata-kata

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Dosen pembimbing dan penguji yang berjasa dan tidak lelah memberikan arahan serta masukan sehingga tersusunlah tesis ini

Sahabat dan Teman

Sahabat dan teman-temanku, terimakasih atas kebersamaan, pengalaman, do'a dan semangat yang selalu kalian berikan kepadaku.

Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, segala puji syukur hanya milik Allah Subhanawata'ala yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu'Alaihi Wassallam sehingga tesis ini yang berjudul "Konstruksi Homomorfisma Ring Matriks atas Ring Semigrup" dapat diselesaikan. Dalam menyelesaikan tesis ini, Penulis banyak mendapat pelajaran, dukungan motivasi, pengalaman, bantuan berupa bimbingan yang sangat berharga dari berbagai pihak dan disadari bahwa adanya keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang dimiiki. Oleh karena itu, pada kesempatan baik ini Penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada:

1. Bapak, Ibu, Adik dan Ari Kusmanto yang tidak pernah lelah memberikan do'a, dukungan, kasih sayang, pengorbanan dan motivasi.
2. Ibu Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing utama yang senantiasa memberikan arahan, bantuan, bimbingan serta saran sehingga tersusunlah tesis ini.
3. Bapak Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku Dosen Pembimbing kedua yang telah memberikan saran dan bimbingan dalam penyusunan tesis ini.
4. Ibu Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji I yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian tesis ini.

5. Ibu Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Penguji II yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian tesis ini.
6. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing Akademik.
9. Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
10. Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T., selaku Direktur Pasca Sarjana Universitas Lampung.
11. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan bantuan dan panduan dalam penyelesaian administrasi.
12. Teman-teman terbaik Vina Ruliyanti, Dian Ani Pitaloka serta teman seperbimbingan Tatang Bahtiar yang selalu memberikan keceriaan, kebersamaan, dan menjadi tempat berbagi.
13. Teman-teman Magister Matematika Angkatan 2020.
14. Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
15. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga Allah Subhanawata'ala memberikan balasan yang berlipat ganda kepada semua pihak yang telah turut membantu Penulis dalam menyelesaikan tesis ini dan semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Atas kritik dan saran yang diberikan untuk kesempurnaan tesis dengan tulus diucapkan terima kasih.

Bandar Lampung, 12 Agustus 2022
Penulis,

Listiana

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang 2

1.2 Tujuan Penelitian 3

1.3 Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Monoid 4

2.2 Ring 6

2.3 Ring Polinomial 15

2.4 Homomorfisma Ring 19

2.5 Ring Semigrup $R[T]$ 21

2.6 Matriks atas Ring 23

2.7 Homomorfisma Ring Matriks 32

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Tempat dan Waktu Penelitian 35

3.2. Metode Penelitian 35

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Kontruksi ring matriks atas Ring semigrup $M_n(R[T])$. 37

4.2 Homomorfismaring matriks atas ring semigrup $M_n(R[T])$. 38

4.3 Kontruksi sifat-sifat homomorfisma ring matriks atas ring semigrup $M_n(R[T])$ 45

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Simpulan 46

5.2 Saran 46

DAFTAR PUSTAKA

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Telah dijelaskan bahwa matriks adalah susunan objek-objek matematika dalam baris dan kolom yang berbetuk persegi panjang yang diapit oleh kurung siku atau kurung biasa (Anton dan Rorres, 2005). Objek-objek matematika ini biasanya disebut dengan entri-entri. Jika entri-entri matriks merupakan anggota dari suatu ring, maka matriks disebut matriks atas ring (Brown, 1993). Suatu ring didefinisikan sebagai himpunan tak kosong yang dilengkapi dua operasi biner dan memenuhi beberapa aksioma tertentu (Dummit dan Foote, 2004).

Salah satu contoh ring yang sudah dikenal diantaranya ring polinomial $R[X]$ dan ring deret pangkat $R[[X]]$ (Hungerford, 1974). Ring polinomial $R[X]$ dapat dipandang sebagai himpunan semua fungsi f dari semigrup $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ke ring R dengan $supp(f) = \{t \in \mathbb{N} \cup \{0\} | f(t) \neq 0\}$ berhingga yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan fungsi dan pergandaaan konvolusi. Selanjutnya (Gilmer, 1984) memperumum ring polinomial $R[X]$ dengan cara menggeralisasi semigrup $\mathbb{N} \cup \{0\}$ menjadi sebarang ring semigrup T. Ring ini selanjutnya disebut ring semigrup dan di notasikan dengan $R[T]$.

Beberapa penelitian terkait ring semigrup dapat dilihat pada Barrucci dan fröberg (2013), yaitu menyelidiki tentang operator diferensial atas ring semigrup numerik. Selanjutnya Leamer (2013) mempelajari dugaan Huneke-Wiegend untuk ring semigrup numerik persimpangan lengkap. Kemudian pada tahun 2017, Oneto dan Tamone membahas mengenai ring semigrup dengan penurunan fungsi Hilbert. Himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ atas ring R yang dinotasikan dengan $M_n(R)$ merupakan suatu ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Ring ini selanjutnya di sebut ring matriks. Salah satu konsep penting di dalam struktur ring adalah homomorfisma ring, yaitu suatu pemetaan dari ring ke ring yang mempertahankan operasi biner pada ring-ring tersebut. Kovacs (1973) telah mengkaji homomorfisma ring matriks μ dari $M_n(R_1)$ ke $M_n(R_2)$ yang didefinisikan oleh $\mu([a_{ij}]) = [\mu(a_{ij})]$ untuk setiap $a_{ij} \in R_1$ dengan $\mu: R_1 \to R_2$ merupakan homomorfisma ring. Dalam perkembangannya, beberapa penelitian terkait homomorfisma ring matriks dapat dilihat pada penelitian Marovt (2010) yang meneliti tentang homomorfisma matriks semigrup atas ring matriks segitiga atas. Kemudian pada tahun 2013, Wang dan Wang membahas tentang homomorfisma Jordan pada matriks segitiga atas.

Kontruksi homomorfisma ring matriks ini memberikan motivasi untuk mengkaji homomorfisma ring matriks atas ring semigrup. Oleh karena itu, pada penelitian ini dikontruksi ring matriks atas ring semigrup $M_n(R_1[T_1])$ dan $M_n(R_2[T_2])$ dengan R_1, R_2 adalah ring dan T_1, T_2 adalah semigrup. Selanjutnya, didefinisikan suatu pemetaan τ dari $M_n(R_1[T_1])$ ke $M_n(R_2[T_2])$ dengan menggunakan homomorfisma semigrup $\delta: T_1 \to T_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$.

Kemudian ditunjukkan τ merupakan homomorfisma ring matriks. Selain itu, diberikan syarat perlu dan cukup agar τ merupakan monomorfisma.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mengkontruksi homomorfisma ring matriks atas ring semigrup $R[T]$ dan menyelidiki sifat-sifatnya.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini memberikan manfaat antara lain:

1. sebagai acuan penelitian yang akan datang.;
2. dapat menambah wawasan tentang materi struktur aljabar, khususnya pada homomorfisma ring matriks atas ring semigrup $R[T]$;
3. sebagai bahan pembelajaran mengenai homomorfisma ring matriks atas ring semigrup $R[T]$.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini diberikan konsep-konsep ring, homomorfisma ring, ring polinomial, ring semigrup $R[T]$, matriks atas ring, homomorfisma ring matriks. Konsep-konsep dasar ini mempunyai peran penting untuk memahami konstruksi homomorfisma ring matriks atas ring semigrup $R[T]$. Berikut ini akan disajikan beberapa definisi dan teorema yang terkait dengan grup, *ring* dan modul.

2.1 Monoid

Pada bagian ini bahas tentang monoid. Sebelum membahas monoid, berikut ini diberikan definisi dan contoh tentang grupoid dan semigrup yang mempunyai peran penting dalam konsep monoid dan ring.

Definisi 2.1.1 Grupoid adalah suatu struktur aljabar dengan satu operasi binear tertutup (Dummit dan Foote, 2004).

Contoh 2.1.1 Himpunan $(\mathbb{Q}, .)$ adalah grupoid, karena untuk setiap $a, b \in \mathbb{Q}$ maka $ab \in \mathbb{Q}$.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh semigrup sebagai berikut.

Definisi 2.1.2 Diberikan himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner “.”. jika $(G, .)$ suatu semigrup maka berlaku:

i. untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a.b \in G$;

ii. untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku assosiatif atau $(a.b).c = a.(b.c)$.

(Hungerford T.W.,1980).

Contoh 2.1.3

1. Himpunan $\mathbb{Z}_3$ merupakan semigrup terhadap operasi penjumlahan modulo 3.
2. Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$, didefinisikan sebagai operasi biner $a.b = a + b + ab$. Akan ditunjukan bahwa ($\mathbb{N}$, .) adalah semigrup.
   i. Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a.b = a + b + ab \in \mathbb{N}$ diperoleh a, b tertutup terhadap bilangan asli $\mathbb{N}$.
   ii. Diberikan sebarang $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku

   $$(ab)c = (a + b + ab)c$$
   $$= (a + b + ab) + c + (a + b + ab)c$$
   $$= a + b + ab + c + ac + bc + abc$$
   $$= a + b + c + ab + bc + abc.$$

   dan

   $$a(bc) = a(b + c + bc)$$
   $$= a + (b + c + bc) + a(b + c + bc)$$
   $$= a + b + c + bc + ab + ac + abc$$

   Jadi, untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $(ab)c = a(bc)$. sehingga $(\mathbb{N}, .)$ merupakan suatu semigrup.

Semigrup G yang mempunyai elemen identitas merupakan monoid. Berikut akan diberikan definisi dan contoh dari monoid.

Definisi 2.1.4 Diberikan himpunan tak kosong G yang dilengkapi dengan operasi biner "·". jika $(G, .)$ suatu monoid maka berlaku:

i. untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $ab \in G$;
ii. untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku sifat assosiatif terhadap operasi "·", yaitu $(ab)c = a(bc)$;
iii. terdapat elemen identitas $e \in G$, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $ae = ea = a$

(Hungerford T.W.,1980).

Contoh 2.1.4 Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ terhadap operasi "·" merupakan monoid karena:

a. Operasi "·" bersifat tertutup di $\mathbb{N}$, yaitu untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a.b \in \mathbb{N}$;
b. Operasi "·" bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$, berlaku $a(bc) = (ab)c$;
c. $\mathbb{N}$ mempunyai elemen identitas yaitu $1 \in \mathbb{N}$, karena untuk setiap $a \in \mathbb{N}$ berlaku $a1 = 1a = a$.

2.2 Ring

Pada subbab ini dibahas tentang konsep struktur aljabar dengan dua operasi biner yang disebut ring, berikut diberikan definisi dan contohnya.

Definisi 2.2.1 Diberikan R adalah sebarang himpunan tak kosong dan pada R didefinisikan dua operasi biner yang dinotasikan dengan $+$ dan $\cdot$ yang selanjutnya masing masing disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Jika $(R, +, .)$ ring memenuhi sifat:

1. $(R, +)$ merupakan grup komutatif.
2. Operasi . di R bersifat assosiatif yaitu:

$$(r_1 r_2) r_3 = r_1 (r_2 r_3),$$

   untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$.

3. Operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:
   a. Distributif kiri

$$r_1 (r_2 + r_3) = (r_1 r_2) + (r_1 r_3),$$

   untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;

   b. Distributif kanan

$$(r_1 + r_2) r_3 = (r_1 r_3) + (r_2 r_3),$$

   untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$ (Wahyuni dkk., 2016).

Jika didalam R terdapat elemen satuan terhadap operasi perkalian, maka R dikatakan ring dengan elemen satuan. Jika didalam R terhadap operasi perkalian memenuhui sifat komutatif, maka R disebut ring komutatif.

Contoh 2.2.1

1. Himpunan $\mathbb{Z}_4$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan modulo 4 dan perkalian modulo 4.

2. Diberikan himpunan $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$. Akan dibuktikan $(M_2(\mathbb{Z}), +, .)$ merupakan ring. Untuk menunjukkan bahwa $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan ring, maka $M_2(\mathbb{Z})$ harus memenuhi aksioma-aksioma ring.

   i. Diberikan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$. Jadi $M_2(\mathbb{Z}) \neq \emptyset$

   ii. Diberikan $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$, dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Berlaku

$$A + B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$$

   Diperoleh $a + e, b + f, c + g, d + h \in \mathbb{Z}$.

   Oleh karena itu, $M_2(\mathbb{Z})$ tertutup pada operasi penjumlahan matriks.

   iii. Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$, dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, dan $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$ operasi penjumlahan matriks diperoleh

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} (a+e)+i & (b+f)+j \\ (c+g)+k & (d+h)+l \end{bmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a+(e+i) & b+(f+j) \\ c+(g+k) & d+(h+l) \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)$$

$$= A + (B + C).$$

   Oleh karena itu, operasi $+$ bersifat assosiatif di $M_2(\mathbb{Z})$.

iv. Diberikan sebarang matriks $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ sehingga untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$A + E = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

dan

$$E + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Akibatnya elemen identitas di $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi penjumlahan matriks adalah $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

v. Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, terdapat $-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ sehingga berlaku:

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

dan

$$-A + A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oleh karena itu, setiap elemen di $M_2(\mathbb{Z})$ mempunyai invers terhadap operasi penjumlahan.

vi. Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$.

Berlaku:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a + e & b + f \\ c + g & d + h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e + a & f + b \\ g + c & h + d \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= B + A$$

Oleh karena itu operasi penjumlahan matriks pada $M_2(\mathbb{Z})$ bersifat komutatif, sehingga $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan grup komutatif (grup Abel).

Selanjutnya akan ditunjukan $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup.

a) Diberikan sebarang $A, B \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, berlaku:

$$AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

dengan $ae + bg, af + bh, ce + dg, cf + dh \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $AB \in M_2(\mathbb{Z})$ Jadi $M_2(\mathbb{Z})$ tertutup terhadap operasi perkalian matriks.

b) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$, berlaku:

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (ae + bg)i + (af + bh)k & (ae + bg)j + (af + bh)l \\ (ce + dg)i + (cf + dh)k & (ce + dg)j + (cf + dh)l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei + bgi + afk + bhk & aej + bgj + afj + bhl \\ cei + dgi + cfk + dhk & cej + dgj + cfl + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aei + afk + bgi + bhk & aej + afj + bgj + bhl \\ cei + cfk + dgi + dhk & cej + cfl + dgj + dhl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ei + fk + gi + hk & ej + fj + bj + hl \\ ei + fk + gi + hk & ej + fl + gj + hl \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} ei + fk & ej + fj \\ gi + hk & gj + hl \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= A(BC).$$

Jadi operasi perkalian matriks pada $M_2(\mathbb{Z})$ bersifat assosiatif.

Oleh karena itu, dari a) dan b) pada $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup. Akibatnya $(M_2(\mathbb{Z}), +, .)$ merupakan ring.

Selanjutnya akan ditunjukkan berlakunya hukum distributif kiri dan distributif kanan pada operasi perkalian matriks di $M_2(\mathbb{Z})$.

1) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$, berlaku:

$$A(B + C) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e + i & f + j \\ g + k & h + l \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a(e + i) + b(g + k) & a(f + j) + b(h + l) \\ c(e + i) + d(h + l) & c(f + j) + d(h + l) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ea + ia + bg + bk & af + aj + bh + bl \\ ce + ci + dg + dk & cf + cj + dh + dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ea + bg + ia + bk & af + bh + aj + dl \\ ce + dg + ci + dk & cf + dh + cj + dl \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ea + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ia + bk & ib + jb \\ ci + dk & cj + dl \end{bmatrix}$$

$$= \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix} \right)$$

$$= (AB) + (AC).$$

2) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z})$ dengan$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}$, berlaku:

$$(B + C)A = \left(\left(\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\right)\right)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e+i & f+j \\ g+k & h+l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (e+i)a + (f+j)c & (e+i)b + (f+j)d \\ (g+k)a + (h+l)c & (g+k)b + (h+l)d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ea + ia + fc + jc & eb + ib + fd + jd \\ ga + ka + hc + lc & gb + kb + hd + ld \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ea + fc + ia + jc & eb + fd + ib + jb \\ ga + hc + ka + lc & gb + hd + kb + ld \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ia + jc & ib + jb \\ ka + lc & kb + ld \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i & j \\ k & l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= (BA) + (CA).$$

Oleh karena itu, terbukti 1) dan 2) berlaku hukum distributif kiri dan distibutif kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks $M_2(\mathbb{Z})$. Karena 1-5 merupakan grup komutatif dan $M_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup, maka $M_2(\mathbb{Z})$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

Selanjutnya sub himpunan tak kosong di R yang juga merupakan ring terhadap operasi yang sama pada R disebut subring. Berikut diberikan definisi dan contoh dari subring.

Definisi 2.2.2 Misalkan S adalah suatu himpunan bagian tak kosong di dalam ring $(R, +, .)$. Himpunan S disebut subring dari R jika S juga merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama pada ring R **(**Wahyuni, dkk., 2016**).**

Dengan kata lain, $S \subseteq R$ merupakan subring R jika terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama dengan R, S merupakan ring. Untuk menunjukan subring R cukup ditunjukan bahwa S bukan merupakan himpunan kosong, tertutup terhadap operasi penjumlahan dan tertutup pada operasi perkalian.

Contoh 2.1.6 Himpunan matriks diagonal $D_2(\mathbb{R}) = \left\{A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} | a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan subring dalam $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Jelas terlihat bahwa himpunan $D_2(\mathbb{R}) \subseteq M_{2\times2}(\mathbb{R})$ dan jelas bahwa $D_{2\times2}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ karena matriks identitas $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{R})$. Selanjutnya, jika di berikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, dan $B = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ di $D_2(\mathbb{R})$ maka diperoleh

$$A - B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} - b_{22} \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{R})$$

dan

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \in D_{2\times2}(\mathbb{R})$$

Jadi $D_2(\mathbb{R})$ merupakan subring di $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh dari ideal ring:

Definisi 2.1.6 Misalkan R suatu ring tak nol dan I adalah himpunan bagian tak kosong di R . Himpunan I disebut ideal dari R jika

i. Untuk setiap $s_1, s_2 \in I$, berlaku $s_1 - s_2 \in I$

ii. Untuk setiap $s_1 \in I$ dan $r \in R$, berlaku $s_1 r, r s_1 \in I$

(Wahyuni dkk., 2016).

Contoh 2.1.6 Diberikan ring matriks $M_2(\mathbb{Z})$. Misalkan

$I_1 = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ dan $I_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} | a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

Akan ditunjukan I_1 merupakan ideal kiri di $M_2(\mathbb{Z})$ dan I_2 merupakan ideal kanan di $M_2(\mathbb{Z})$.

akan ditunjukan I_1 merupakan ideal kiri:

i. Diberikan sebarang $A, B \in I_1$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$ dimana $a_1, b_1, a_2 b_2 \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & 0 \\ b_1 - b_2 & 0 \end{bmatrix} \in I_1$$

ii. Diberikan sebarang $A \in I_1$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$ dimana $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ dan $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku:

$$TA = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} aa_1 + bb_1 & 0 \\ ca_1 + cb_1 & 0 \end{bmatrix} \in I_1$$

Sehingga I_1 merupakan ideal kiri di $M_2(\mathbb{Z})$.

Selanjutnya akan ditunjukan I_2 merupakan ideal kanan:

i. Diberikan sebarang $A, B \in I_2$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dimana $a_1, b_1, a_2 b_2 \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$$A - B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I_2$$

ii. Diberikan sebarang $A \in I_2$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dengan $a_1, b_1 \in \mathbb{Z}$ dan $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$, berlaku

$$AT = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 a + b_1 c & a_1 b + b_1 d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in I_2$$

Sehingga I_2 merupakan ideal kanan di $M_2(\mathbb{Z})$

2.3 Ring Polinomial

Telah dipahami bahwa ring polinomial dengan koefisen terhadap bilangan real merupakan polinomial atas bilangan real. Pada struktur aljabar, polinomial digeneralisasikan menjadi polinomial atas ring. Sebelum dibahas mengenai ring polinomal, terlebih dahulu akan diberikan definisi polinomial. Berikut definisi dan contoh dari polinomal.

Definisi 2.3.1 Fungsi polinomal $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai suatu fungsi berbentuk:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

dengan a_i suatu koefisien bernilai bilangan riil, $i = 0,1,2, \dots, n$ dan $a_n \neq 0$ dengan:

x	: *indeterminate*;
$a_0, a_1, \dots, a_n$	: nilai koefisien;

n : derajat persamaan.

(Tuganbaev, 2003)

Contoh 2.3.1 Diberikan suatu polinomial $P_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ dengan koefisien suku-sukunya merupakan anggota bilangan bulat dengan peubah x.

Contoh 2.3.2 Diberikan suatu polinomial $f(x) = 3 + 2x + 5x^2 + 3x^3 + 4x^3 \in \mathbb{R}[x]$ dengan koefisien suku-sukunya merupakan anggota bilangan real dengan peubah x.

Selanjutnya diberikan definisi dan contoh dari ring polinomial:

Definisi 2.3.2 Diberikan sebarang ring R. Misalkan $R[X]$ adalah himpunan semua barisan takhingga

$$(a_0, a_1, a_2, \dots),$$

dengan $a_1 \in R, i = 0,1,2, \dots,$ dan terdapat suatu bilangan bulat $n \geq 0$ (bergantung pada barisan $(a_0, a_1, a_2, \dots)$) sedemikian sehingga untuk setiap $k \geq n, a_k = 0$. Elemen – elemen dari $R[X]$ disebut suku banyak *(polynomials)* atas ring R (Wahyuni dkk., 2016).

Selanjutnya, jika pada $R[X]$ dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut:

untuk setiap $(a_0, a_1, a_2, \dots), (b_0, b_1, b_2, \dots) \in R[X]$,

$(+) : (a_0, a_1, a_2, \dots) + (b_0, b_1, b_2, \dots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$

$$(\cdot) : (a_0, a_1, a_2, \dots) \cdot (b_0, b_2, b_1, \dots) = (c_0, c_1, c_2, \dots)$$

dengan $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i\, b_{k-i},\ k_i = 0\,, k = 0,1,2, \dots$.

Dengan operasi ini, $(R[X], +, \cdot)$ merupakan ring, dimana

i) Elemen netral terhadap operasi $+$ adalah $(0,0, \dots)$,

ii) Invers terhadap $+$ dari $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ adalah $(-a_0, -a_1, -a_2, \dots)$

Sehingga $R[X]$ disebut ring polinomial.

Selanjutnya, jika didefinisikan notasi yang lebih ringkas dan dikenal sebagai berikut:

$$(a, 0,0,0, \dots) \text{ dinotasikan } a = ax^0$$

$$(0, a, 0,0, \dots) \text{ dinotasikan } ax = ax^1$$

$$(0,0, a, 0, \dots) \text{ dinotasikan } ax^2$$

$$\vdots$$

diperoleh

$$(a_0, a_1, \dots, a_n, 0, \dots) = (a_0, 0,0,0, \dots) + (0, a_1, 0,0 \dots) + \cdots +$$

$$(0, \dots, 0, a_n, 0, \dots) = a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n.$$

Simbol x disebut *indeterminate* atas R dan $a_0, a_1, a_2, \dots\ a_n$ disebut koefisien dari

$$a_0 + a_1 x + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n\ .$$

jika diberikan ring R, ring polinomial dapat dituliskan sebagai himpunan

$$R[X] = \left\{ \sum_{i=0}^{p} a_i x^i \,|\, p \in \mathbb{N} \cup \{0\}, a_i \in R \right\}$$

dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian $R[X]$ dapat di definisikan:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$$

$$\left(\sum_{i=0}^{p} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q} b_i x^j\right) = \left(\sum_{\mu=0}^{p+q} r_\mu x^\mu\right)$$

untuk setiap $a_i, b_i \in R$ dan $r_\mu = \sum_{i+j=\mu} a_i b_j$.

Polinomial $a_0 + a_1 x + s_2 x^2 + .. + a_n x^n$ dapat dipandang sebagai fungsi

$$f: \mathbb{Z}^{\geq 0} \to R$$

yang dapat dinotasikan dengan $f(x)$.

Selanjutnya $\mathbb{Z}^{\geq 0}$ dinotasikan $\mathbb{N} \cup \{0\}$, sehingga ring polinomial dapat ditulis

$$R[X] = \{f: \mathbb{N} \cup \{0\} \to R \mid f(n) \neq 0\}$$

dengan penjumlahan dan perkalian didefinisikan dalam $R[X]$ yaitu:

$$(f + g)(n) = f(n) + g(n)$$

$$(fg)(n) = \sum_{t*u=n} f(t) g(u)$$

dimana $\sum t * u = n$ menunjukan bahwa (t, u) elemen dari R.

Contoh 2.4.2 Jika $R = (\mathbb{Z}_4, +, .)$ Ring bilangan modulo 4, maka diperoleh ring polinomial

$$\mathbb{Z}_4[X] = \left\{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, | a_i \in \mathbb{Z}_4, i = 1,2,3, \dots n\right\}$$

yang beranggotakan semua polinomial dengan koefisien di $\mathbb{Z}_4$.

2.4 Homomorfisma Ring

Homomorfisma ring merupakan suatu pemetaan dari suatu ring R_1 ke R_2 yang bersifat mengawetkan kedua operasi biner yaitu operasi $(+,.)$ dari ring tersebut. Berikut ini diberikan definisi dan contoh homomorfisma ring.

Definisi 2.3.1 Diberikan ring $(R_1, +_1, \cdot_1)$ dan $(R_2, +_2, \cdot_2)$ serta pemetaan $f: R_1 \to R_2$. Pemetaan f merupakan homomorfisma ring jika:

$$f(x +_1 y) = f(x) +_2 f(y) \text{ dan } f(x \cdot_1 y) = f(x) \cdot_2 f(y)$$

untuk setiap $x, y \in R_1$ (Wahyuni dkk., 2016).

Ada beberapa jenis homomorfisma terkait dengan sifat pemetaannya. Suatu homomorfisma f dari ring R_1 ke ring R_2 disebut:

i) monomorfisma jika f merupakan pemetaan injektif;

ii) epimorfisma jika f merupakan pemetaan surjektif dan;

iii) isomorfisma jika f merupakan pemetaan bijektif.

berikut akan diberikan contoh homomorfisma ring dan memenuhi sifat-sifat homomorfisma ring.

Contoh 2.3.1 Diberikan ring $P_3 = \{a + bx + cx^2 + dx^3 | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$ dan $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{Z}\right\}$ dimana suatu pemetaan $\tau: P_3 \to M_2(\mathbb{Z})$. Didefinisikan $\tau(p) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, untuk setiap $p \in P$. Akan ditunjukan pemetaan τ merupakan homomorfisma ring dan memenuhi sifat homomorfisma ring.

Akan ditunjukan pemetaan τ merupakan homomorfisma ring.

Diberikan sebarang $p_1, q_1 \in P_3$ dimana $p_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_2x^3$ dan $q_1 = a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3$, berlaku:

i. $\tau(p_1 + q_1) = \tau\big((a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_1x^3) + (a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3)\big)$

$$= \tau\big((a_1 + a_2) + (b_1x + b_2x) + (c_1x^2 + c_2x^2) + (d_1x^3 + d_2x^3\big)$$

$$= \tau\big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 + (d_1 + d_2\big)x^3$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \tau(p_1) + \tau(q_1)$$

ii. $\tau(p_1q_1) = \tau\big((a_1 + b_1x + c_1x^2 + d_2x^3)(a_2 + b_2x + c_2x^2 + d_2x^3)\big)$

$$= \tau((a_1a_2) + (a_1b_2)x + (a_1c_2)x^2 + (a_1d_2)x^3 + (a_2b_1)x + (b_1b_2)x^2 + (b_1c_2)x^3 + (b_1d_2)x^4 + (a_2c_1)x^2 + (b_2c_1)x^3 + (c_1c_2)x^4 + (c_1d_2)x^5 + (a_2d_1)x^3 + (b_2d_1)x^4 + (c_2d_1)x^5 + (d_1d_2)x^6$$

$$= \tau\big(((a_1a_2) + (a_1b_2)x + (a_2b_1)x + (a_1c_2)x^2 + (b_1b_2)x^2 + (a_2c_1)x^2 + (a_1d_2)x^3 + (b_1c_2)x^3 + (b_2c_1)x^3 + (b_1d_2)x^4 + (b_2d_1)x^4 + (c_1c_2)x^4 + (b_2d_1)x^4 + (c_1d_2)x^5 + (c_2d_1)x^5 + (d_1d_2)x^6)\big)$$

$$= \tau\Big(((a_1a_2) + \big((a_1b_2) + (a_2b_1)\big)x\Big) + \big((a_1c_2) + (b_1b_2) + (a_2c_1) + (a_1d_2)x^2\big) + \big((a_1d_2) + (b_1c_2) + (b_2c_1) + (b_2c_1)x^3\big) + ((b_1d_2) + (b_2d_1) + (c_1c_2) + (b_2d_1)x^4) + ((c_1d_2) + (c_2d_1)x^5) + (d_1d_2)x^6$$

$$=\begin{bmatrix} a_1a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \tau(p_1)\tau(q_1).$$

Oleh karena itu τ merupakan homomorfisma ring.

Selanjutnya akan diselesaikan apakah sifat homomorfisma ring τ.

i. Akan diselidiki τ merupakan pemetaan injektif atau tidak.

   Diberikan $p_1 = 2 + x + 3x^2 + x^3 \in P_3$ dan $q_1 = 2 + 2x + 2x^2 + x^4 \in P_3$ diperoleh $\tau(p_1) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dan $\tau(q_1) = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Dapat dipeoleh bahwa $\tau(p_1) = \tau(q_1)$, tetapi $p_1 \neq q_1$. Jadi τ tidak bersifat injektif atau dengan kata lain tidak monomorfisama.

ii. Akan diselidiki τ merupakan pemetaan surjektif atau tidak.

   Diberikan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ dan tidak terdapat $p \in P_3$ sehingga $\tau(p) = A$. Jadi τ tidak bersifat surjektif atau dengan kata lain tidak epimorfisma.

iii. Akan diselidiki τ merupakan pemetaan bijektif atau tidak.

   Kerena τ merupakan homomorfisma ring yang tidak memenuhi sifat injektif dan tidak memenuhi sifat surjektif maka τ merupakan homomorfisma yang tidak memenuhi sifat bijektif atau dengan kata lain tidak isomorfisma.

2.5 Ring Semigrup $R[T]$

Perumuman dari ring polinomial $R[X]$ dikenal sebagai ring semigrup $R[T]$ dengan R adalah ring dan T adalah semigrup. Jika $T = \mathbb{N} \cup \{0\}$, maka ring semigrup $R[T]$

merupakan ring polinomial $R[X]$ (Glimer, 1984). Berikut ini diberikan definisi ring semigrup.

Definisi 2.4.1 Diberikan ring R_1 dan R_2 serta semigrup T_1 dan T_2 terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat dikontruksi ring semigrup $R_1[T_1]$ dan $R_2[T_2]$, yaitu himpunan

$$R_1[T_1] = \{f: T_1 \to R_1 | \text{supp } (f) \text{ berhingga}\} \quad (1)$$

dan

$$R_2[T_2] = \{\alpha: T_2 \to R_2 | \text{supp}(\alpha) \text{ berhingga}\} \quad (2)$$

dengan $\text{supp}(f) = \{t \in T_1 | f(t) \neq 0\}$ dan $\text{supp}(\alpha) = \{t \in T_2 | \alpha(t) \neq 0\}$, yang dilengkapi operasi penjumlahan fungsi

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t) \text{ dan } (\alpha + \beta)(t) = \alpha(t) + \beta(t) \quad (3)$$

dan operasi perkalian fungsi

$$(fg)(t) = \sum_{x+y=t} f(x)g(y) \text{ dan } (\alpha\beta)(t) = \sum_{u+v=t} f(u)g(v), \quad (4)$$

untuk setiap $t \in T_1, f, g \in R_1[T_1]$ dan $t \in T_2, \alpha, \beta \in R_2[T_2]$ (Glimer, 1984).

Contoh 2.4.1 Diberikan ring $\mathbb{Z}_4$ dan $\mathbb{Z}_3$ serta semigrup $\mathbb{Z}_3$ dan $\mathbb{Z}_2$ terhadap operasi penjumlahan sehingga dapat dikontruksi ring semigrup $\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_3]$ dan $\mathbb{Z}_3[\mathbb{Z}_2]$, yaitu himpunan

$$\mathbb{Z}_4[\mathbb{Z}_3] = \{f: \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_4 | \text{supp } (f) \text{ berhingga}\}$$

dan

$$\mathbb{Z}_3[\mathbb{Z}_2] = \{\alpha: \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_3 | \text{supp } (f) \text{ berhingga}\}$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai homomorfisma semigrup. Homomorfisma semigrup merupakan fungsi yang mempertahankan struktur semigrup. Berikut diberikan contoh homomorfisma semigrup.

Definisi Diberikan semigrup $(S,*)$ dan $(T,*')$ dimana pemetaan $f: S \to T$, dimana f merupakan homomorfisma semigrup. Jika memenuhi $f(x * y) = f(x) *' f(y)$ dimana $x, y \in S$.

Contoh Diberikan semigrup $(\mathbb{N},+)$ dan $(\mathbb{Z},+)$ dibentuk fungsi $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ dengan definisi $f(a) = 2a$ dimana $a, b \in \mathbb{N}$. Akan ditunjukan f merupakan homomorfisma semigrup.

Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{N}$, berlaku

$$f(a+b) = 2(a+b)$$

$$= 2a + 2b$$

$$= f(a) + f(b)$$

diperoleh $f(a) + f(b)$, untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$.

2.6 Matriks atas Ring

Himpunan semua matriks $m \times n$ dengan entri dari R akan membentuk $M_{m\times n}(R)$. Jika $A \in M_{m\times n}(F)$, entri ke-ij dari matriks A dinotasikan dengan a_{ij}.

Berikut diberikan definisi dan contoh dari matriks atas ring.

Definisi 2.6.1 Himpunan semua matriks $m \times n$ dengan entri dari ring R akan membentuk $M_{m\times n}(R)$. Misalnya $B \in M_{m\times n}(R)$, maka matriks B dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(R)$$

Jika $B \in M_{m\times n}(R)$, maka $b_{ij} = [B]_{ij}$ merupakan elemen ke- ij dari matriks B dimana $i = 1.2 \dots, n$. Jika diberikan $A, B \in M_{m\times n}(R)$ maka operasi penjumlahan sebagai berikut:

$A + B = [A + B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$ dengan

a) $\left[E_{ij}\right]_{pq} = \begin{cases} 1\ jika\ (p,q) = (i,j) \\ 0\ jika\ (p,q) \neq (i,j) \end{cases}$ untuk setiap $i = 1,2, \dots, m$ dan $j = 1,2, \dots, n$.

dengan p memiliki batas dari 1 sampai m dan indeks q memiliki batas 1 sampai n. E_{ij} merupakan matriks berukuran $m \times n$, dimana hanya memiliki nilai 1 pada entri ke-ij dan sisanya berentrikan 0.

b) Jika $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(R)$, maka untuk setiap $p, q = 1,2, \dots, n$.

$$AE_{pq} = \begin{bmatrix} 0, \dots & ,0 & a_{ip,} & 0, \dots & ,0 \\ 0, \dots & ,0 & a_{2p,} & 0, \dots & ,0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, \dots & ,0 & a_{np,} & 0, \dots & ,0 \end{bmatrix}$$

c) Jika $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(R)$, maka untuk setiap $p, q = \{1,2, .., n\}$.

$$E_{pq}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \\ a_{q1}, & a_{q2}, \dots & , & a_{qn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

d) Jika $A = \left[a_{ij}\right] \in M_{n\times n}(R)$, maka untuk semua $k, s, p, q = \{1.2, .. n\}$,

$E_{ks}AE_{pq} = a_{sp}E_{kq}$ (Brown, 1992).

Pada penelitian ini matriks yang digunakan merupakan matriks $n \times n$ atas ring R dinotasikan dengan $M_n(R)$. Lebih lanjut, himpunan semua matriks berukuran $n \times n$ atas ring R didefinisikan oleh

$$M_n(R) = \{[a_{ij}] | a_{ij} \in R, \forall i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n\}.$$

Berikut akan dibuktikan himpunan matriks $M_n(R)$ yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks merupakan ring.

i) Diberikan sebarang $A, B \in M_n(R)$ dengan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$, untuk setiap $a_{ij}, b_{ij} \in R$ dan $i, j = 1,2, \dots n$. Hasil penjumlahan dari matriks A dan B adalah $A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}]$=$[a_{ij} + b_{ij}]$, untuk $i, j = 1,2, \dots, n$. Kerna $a_{ij}, b_{ij} \in R$, diperoleh $A + B \in M_n(R)$.

ii) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_n(R)$ dengan $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ dan $C = [C_{ij}]$, untuk setiap $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$ dan $i, j = 1,2, \dots, n$, berlaku

$$(A + B) + C = ([a_{ij}] + [b_{ij}]) + [C_{ij}]$$

$$= [a_{ij}] + ([b_{ij}] + [C_{ij}])$$

Jadi operasi penjumlahan matriks pada $M_n(R)$ bersifat assosiatif.

iii) Diberikan matriks nol $E = [d_{ij}] \in M_n(R)$ dengan $d_{ij} = e_0$ untuk setiap $i, j = 1,2, \dots, n$, oleh karena itu untuk setiap $A \in M_n(R)$ berlaku:

$$A + E = E + A = A$$

hal ini juga dapat ditunjukan oleh

$$A + E = [a_{ij}] + [d_{ij}] = [a_{ij}]$$

Jadi E merupakan elemen nol pada $M_n(R)$.

iv) Diberikan sebarang $A = [a_{ij}] \in M_n(R)$ dengan $a_{ij} \in R$ dan $i, j = 1,2, \dots, n$, didefinisikan $-A = -[a_{ij}] \in M_n(R)$ untuk setiap $a_{ij} \in R$ yang merupakan invers dari a_{ij} terhadap operasi penjumlahan pada ring komutatif R, berlaku

$$A + (-A) = [a_{ij}] + (-[a_{ij}]) = [a_{ij} + (-a_{ij})] = [d_{ij}] = E$$

dan

$$-A + A = -[a_{ij}] + [a_{ij}] = [(-a_{ij}) + a_{ij}] = [d_{ij}] = E$$

v) Diberikan sebarang $A, B \in M_n(R)$ dengan $A = [a_{ij}]$dan $B = [b_{ij}]$, berlaku

$$\begin{aligned} A + B &= [a_{ij}] + [b_{ij}] \\ &= [a_{ij} + b_{ij}] \\ &= [b_{ij} + a_{ij}] \\ &= [b_{ij}] + [a_{ij}] \\ &= B + A \end{aligned}$$

Jadi operasi penjumlahan matriks pada $M_n(R)$bersifat komutatif.

Dari i) $-$ v) $M_n(R)$ terhadap operasi penjumlahan merupakan grup komutatif (Grup Abel). Selanjutnya akan ditunjukan $M_n(R)$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup.

a) Diberikan sebarang $A, B \in M_n(R)$ dengan $A = [a_{ij}]$ dan $B = [b_{ij}]$ untuk setiap $a_{ij}, b_{ij} \in R$ dan $i, j = 1,2, \dots, n$, berlaku $A \times B = [c_{ij}]$ dengan $c_{ij} = \sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj}$ untuk $i, j = 1,2, \dots, n$. Karena $a_{ij}, b_{ij} \in R$, diperoleh $\sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj}$ yang berakibat $A \times B \in M_n(R)$.

Jadi, $M_n(R)$ tertutup terhadap operasi perkalian matriks.

b) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_n(R)$ dengan $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ dan $C = [c_{ij}]$, untuk setiap $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$ dan $i, j = 1,2, \dots, n$, berlaku

$$(AB)C = \left[\sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj}\right][c_{ij}] = [a_{ij}] \sum_{r=1}^{n} b_{qr} c_{rj}$$

$$= [a_{ij}]([b_{ij}][c_{ij}])$$

$$= A(BC)$$

Jadi operasi perkalian matriks pada $M_n(R)$ bersifat assosiatif.

Dari a) dan b) terbukti bahwa $M_n(R)$ meerupakan operasi perkalian matriks merupakan semigrup. Selanjutnya akan ditunjukkan berlaku hukum distributif kiri dan distributif kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada $M_n(R)$.

1) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_n(R)$ dengan $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ dan $C = [c_{ij}]$ untuk setiap $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$, berlaku

$$A(B + C) = \left[\sum_{q=1}^{n} (a_{iq} b_{qj} + a_{iq} C_{qj})\right]$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{n} a_{iq} b_{qj} + \sum_{q=1}^{n} a_{iq} c_{qj}\right]$$

$$= (AB) + (AC)$$

2) Diberikan sebarang $A, B, C \in M_n(R)_n$ dengan $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ dan $C = [c_{ij}]$ untuk setiap $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} \in R$ dengan $i, j = 1,2, \dots, n$, berlaku

$$(BC)A = \left[\sum_{q=1}^{n} (b_{qj} a_{ij} + c_{qj} a_{iq})\right]$$

$$= \left[\sum_{q=1}^{n} b_{qj} a_{ij} + \sum_{q=1}^{n} c_{qj} a_{iq}\right]$$

$$= (BA) + (CA)$$

Dari 1) dan 2) terbukti bahwa berlaku hukum distributif kiri dan distributif kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada $M_n(R)$. Karena i) $-$ v), a), b),1) dan 2) terpenuhi, maka $M_n(R)$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Untuk lebih memahami suatu matriks merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.6.1 Misalkan R sebarang ring dan $D_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} | a_{12}, a_{22} \in \mathbb{Z}\right\}$. Akan ditunjukan $(D_2(\mathbb{Z}), +, .)$ merupakan ring dengan operasi penjumahan $(+)$ dan operasi perkalian matriks $(.)$.

i) Diberikan sebarang $A, B \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$. Hasil penjumlahan dari matriks $A + B = B + A$ adalah

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} + b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{12} + a_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} + a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= B + A.$$

ii) Diberikan sebarang $A, B, C \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$, berlaku:

$$(A + B) + C = \left(\begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} + b_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} + b_{12} + c_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} + (b_{12} + c_{12}) & 0 \\ 0 & a_{22} + (b_{22} + c_{22}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= A + (B + C)$$

Oleh karena itu, operasi penjumlahan matriks pada $D_2(\mathbb{Z})$ bersifat assosiatif.

iii) Didefinisikan matriks nol $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z})$, sehingga untuk setiap $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z})$, berlaku

$$E + A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Demikian halnya

$$A + E = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu, E merupakan elemen identitas pada $D_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi " $+$ ".

iv) Diberikan sebarang $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $a_{12}, a_{22} \in \mathbb{Z}$, terdapat $-A = \begin{bmatrix} -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} \end{bmatrix} \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan A yang merupakan invers dari $-A$ terhadap operasi penjumlahan pada ring komutatif R, berlaku :

$$A + (-A) = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} - a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} - a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E$$

dan

$$-A + A = \begin{bmatrix} -a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12} + a_{12} & 0 \\ 0 & -a_{22} + a_{22} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = E.$$

Jadi setiap elemen di$D_2(\mathbb{Z})$ mempunyai invers terhadap operasi "+".

v) Diberikan sebarang $A, B \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$, berlaku:

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} + b_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= B + A$$

Oleh karena itu operasi penjumlahan matriks pada $D_2(\mathbb{Z})$ bersifat komutatif, sehingga $D_2(\mathbb{Z})$ merupakan grup komutatif (grup Abel).

Selanjutnya, akan ditunjukan $D_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup.

c) Diberikan sebarang $A, B \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$, berlaku:

$$A \times B = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}b_{12} & 0 \\ 0 & a_{12}b_{22} \end{bmatrix}.$$

Akibatnya berakibat $A \times B \in D_2(\mathbb{Z})$.

Jadi $D_2(\mathbb{Z})$ tertutup terhadap operasi perkalian matriks.

d) Diberikan sebarang $A, B, C \in D_2(\mathbb{Z})$ denan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$, berlaku:

$$(AB)C = \left(\begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}b_{12} & 0 \\ 0 & a_{12}b_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{a}_{12}\mathrm{b}_{12}\mathrm{c}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{a}_{12}\mathrm{b}_{22}\mathrm{c}_{22} \end{bmatrix}$$

dan

$$A(BC) = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{12}c_{12} & 0 \\ 0 & b_{12}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}b_{12}c_{12} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{12}c_{22} \end{bmatrix}.$$

Jadi operasi perkalian matriks pada $D_2(\mathbb{Z})$ assosiatif.

Oleh karena itu dari a) dan b) terbukti bahwa $D_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup.

Selanjutnya akan ditunjukkan berlakunya hukum distributif kiri dan distributif kanan pada operasi perkalian matriks di $D_2(\mathbb{Z})$.

3) Diberikan sebarang $A, B, C \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$, berlaku:

$$A(B+C) = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{12} + c_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}b_{12} + a_{12}c_{12} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} + a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{12}b_{12} & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{12}c_{12} & 0 \\ 0 & a_{22}c_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (AB) + (AC).$$

4) Diberikan sebarang $A, B, C \in D_2(\mathbb{Z})$ dengan $A = \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ dan $C = \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix}$, berlaku:

$$(B+C)A = \left(\begin{bmatrix} b_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12} & 0 \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{12} + c_{12} & 0 \\ 0 & b_{22} + c_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{12}a_{12} + c_{12}a_{12} & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} + c_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{12}a_{12} & 0 \\ 0 & b_{22}a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{12}a_{12} & 0 \\ 0 & c_{22}a_{22} \end{bmatrix}$$

$$= (B \times A) + (C \times A).$$

Oleh karena itu, terbukti 1) dan 2) berlaku hukum distributif kiri dan distibutif kanan pada operasi penjumlahan dan perkalian pada matriks $D_2(\mathbb{Z})$. Karena 1-5 merupakan grup komutatif dan $D_2(\mathbb{Z})$ terhadap operasi perkalian matriks merupakan semigrup, maka $D_2(\mathbb{Z})$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks.

2.7 Homomorfisma Ring Matriks

Diberikan definisi dan contoh dari homomorfisma ring matriks sebagai berikut.

Definisi 2.7.1 $M_n(R)$ merupakan matriks berukuran $n \times n$ atas ring R. Jika diberikan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$, maka $\mu: M_n(R_1) \to M_n(R_2)$ yang didefinisikan oleh $\mu(r_{ij}) = \left(\mu(r_{ij})\right)$ merupakan homomorfisma.

Contoh 2.7.1 Diberikan ring $U_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ dan ring $L_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} | a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkalian matriks. Jika didefinisikan pemetaan $\mu: U_2(\mathbb{Z}) \to L_2(\mathbb{Z})$, yaitu untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in U_2(\mathbb{Z})$, $\mu\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ -b & a \end{bmatrix}$. Maka dapat ditunjukan bahwa fungsi μ merupakan homomorfisma ring matriks.

Diberikan sebarang $A, B \in T_2(\mathbb{Z})$ $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$ dan $B = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$, berlaku :

i. $\mu(A + B) = \mu\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)$

$$= \mu\left(\begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ 0 & c_1 + c_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & 0 \\ -b_1 + (-b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ -b_2 & a_1 \end{bmatrix}$$

$$= \mu\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) + \mu\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)$$

ii. $\mu(AB) = \mu\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\mu\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}$

$$= \mu\left(\begin{bmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} c_1c_2 & 0 \\ -(a_1b_2 + b_1c_2) & a_1a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1c_2 & 0 \\ -b_1c_2 + (-a_1b_2) & a_1a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$= \mu\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}\right) \mu\left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\right)$$

Jadi fungsi μ merupakan homomorfisma ring matriks.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1. Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian akan dilaksanakan pada semester genap tahun ajaran 2021/2022 di Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Lampung.

3.2. Metode Penelitian

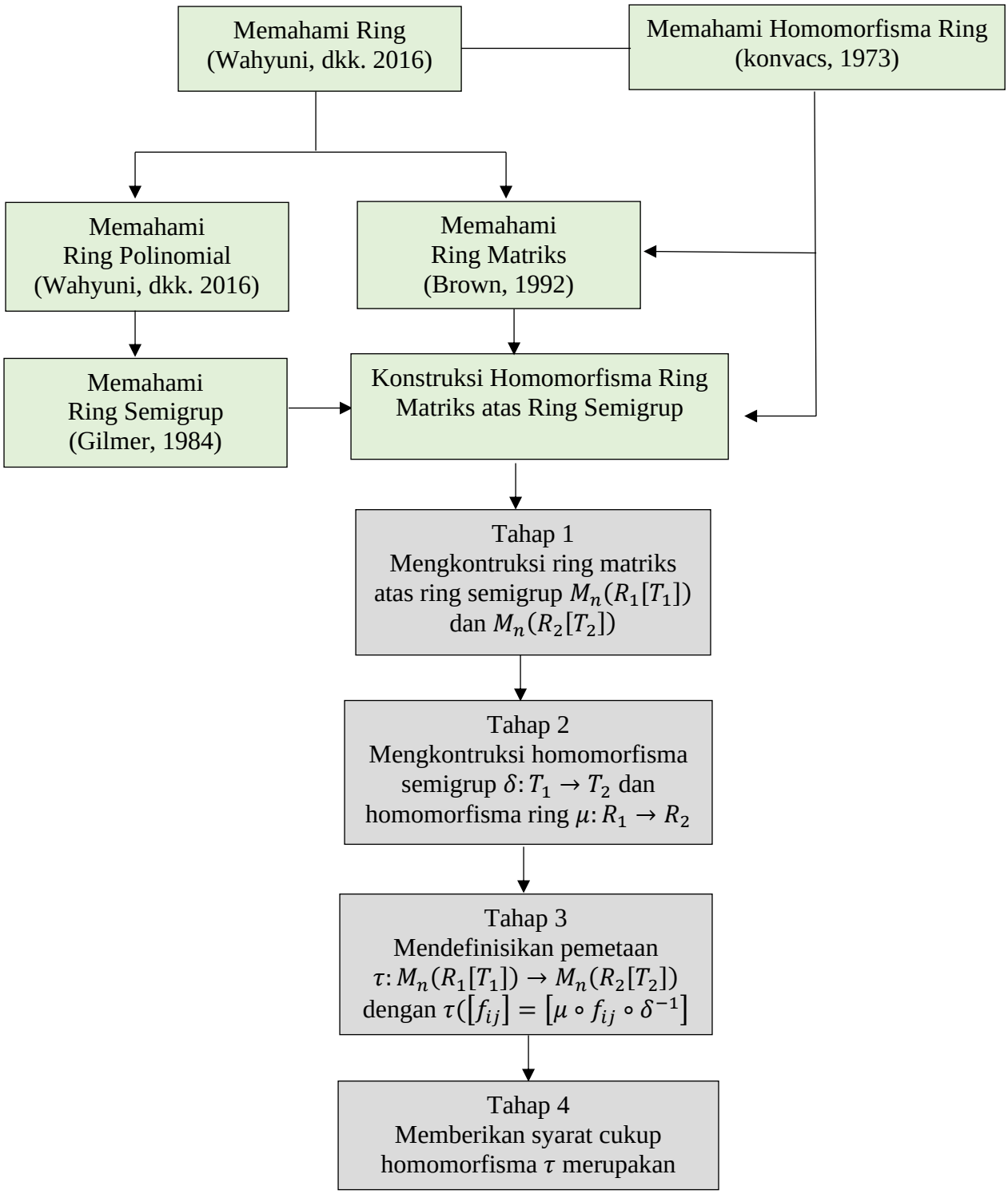
Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Studi literatur (buku-buku, jurnal ilmiah dan artikel) yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mempelajari definisi dan teorema – teorema yang terkaitan pada masalah penelitian.

Secara umum tahapan penelitian ini diuraikan pada langkah-langkah berikut.

1. Mengkontruksi ring matriks atas ring semigrup $M_n(R_1[T_1])$ dan $M_n(R_2[T_2])$ dengan terlebih dahulu diberikan R_1 dan R_2 serta semigrup T_1 dan T_2.
2. Mengkontruksi matriks atas ring semigrup $M_n(R[T])$.
3. Mengkontruksi homomorfisma semigrup $\delta: T_1 \to T_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$.
4. Mendefinisikan pemetaan $\tau: M_n(R_1[T_1]) \to M_n(R_2[T_2])$ dengan $\tau([f_{ij}] = [\mu \circ f_{ij} \circ \tau^{-1}]$ untuk setiap $[f_{ij}] \in M_n(R_1[T_1])$.
5. Memberikan syarat cukup homomorfisma τ merupakan matriks.

Berikut diberikan bagan tahapan penelitian.



Gambar 3.1 Tahapan Penelitian

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 SIMPULAN

Dari sebarang R_1 dan R_2 serta semigrup T_1 dan T_2, dapat dikonstruksi ring semigrup $R_1[T_1]$ dan $R_2[T_2]$ serta ring matriks $M_n(R_1[T_1])$ dan $M_n(R_2[T_2])$. Jika diberikan homomorfisma semigrup $\delta: T_1 \to T_2$ dan homomorfisma ring $\mu: R_1 \to R_2$, maka terdapat $\delta \in R_2\,[T_2]$ dengan $\alpha = \mu \circ f \circ \delta^{-1}$, untuk setiap $f \in R_1[T_1]$. Hal ini yang mengakibatkan dapat didefinisikannya pemetaan $\tau: M_n(R_1[T_1]) \to (M_n R_2[T_2])$ dengan $\tau([f_{ij}]) = [\alpha_{ij}] = [\mu \circ f_{ij} \circ \delta^{-1}]$, untuk setiap $[f_{ij}] \in M_n(R_1[T_1])$. Selanjutnya, telah ditunjukan pemetaan τ merupakan homomorfisma ring. Selain itu, τ merupakan monomorfisma jika δ isomorfisma dan μ monomorfisma.

5.2 SARAN

Untuk penelitian lebih lanjut, masih terbuka peluang untuk mengkaji sifat-sifat yang ada pada homomorfisma matriks atas ring semigrup, seperti ideal matriks atas ring semigrup.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. and Rorres, C. (2005). Elementary Linear Algebra:Application Version, 9th Edition. New Jersey.

Barucci, A. and Fröberg, R. (2013). "On differential operators of numerical semigroup rings". *J.Pure Appl, Agebra*. 217(2), 230-237.

Brown, W.C. (1993). Matrices Over Commutative Rings. New York: Marcel Dekker Inc.

Dummit, D. S and Foote, R. M. (1991). *Abstract Algebra*. New York: Prentice-Hall Internasional, Inc.

Du,Y and Wang, Y. (2014). "Jordan homomorfisms of upper triangular matrix rings over a prime ring". *Linear Algebra Appl*. 458, 197-206.

Faisol, A. (2010). Homomorfisma ring deret pangkat teritak miring. J.Sains MIPA. 15(2), 119-114.

Gilmer, R. (1984). *Commutative Semigroup Rings*. Chicago dan London: The University of Chicago.

Hungerford, T.W. (1980). *Algebra*. New York: Springer-Verlag New York, Inc.,1974.

Kovacs, A. (1973). Homomorphisms of Matrix Rings into Matrix Rings. *Pacific J. Math*. 49(1), 161-170.

Leamer, M.J. (2013). "Huneke-Wiegand Conjucture for complete intersection numerical semigroup rings". *J. Algebra*. 391, 114-124.

Marovt, J. (2010). "Homomorfisma of matrix semigroup over division rings from dimension two to four". *Linear Algebra Appl*. 432(6), 1595-1607.

Oneto, A and G.T. (2017). "On semigroup rings with decreasing Hilbert function". *J. Algebra*. 489, 373-398.

Raisinghania, M.D dan Anggarwal, R.S. (1980). *Modern Algebra*. New Delhi, S. Chad & Company, Ltd.

Tuganbaev, A. (2003) . Polynomial and Series Rings and Principal Ideals. J. Math. Science. 114(2), 1204-1226.

Wahyuni, S. dkk. (2016). *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press.

Wang, Y. and Wang,Y. (2010). “Jordan homomorfisms of upper triangular matrix rings”. *Linear Algebra Appl*. 439(12),4063-4069.