

**ANALISIS TEGANGAN PADA TABUNG SILINDER *FUNCTIONALLY
GRADED MATERIAL* (FGM)**

(Tesis)

Oleh

**ADAM WISNU MURTI
NPM 2025021007**



**FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022**

ABSTRACT

STRESS ANALYSIS ON FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL (FGM) CYLINDER TUBE

By

ADAM WISNU MURTI

Obtaining a material with good mechanical properties in various aspects is difficult, but it can be obtained by engineering the composition of the material. Functionally graded material (FGM) is a special composite material that generally consists of two or more materials and its microstructure changes from one continuous material to another with a certain gradient. This study contains a revisit of the reference equation used and an update of the equation to calculate the distribution of radial and hoop stress on cylindrical FGM. This study uses the power function in determining the character of the material inhomogeneity and applies internal pressure that meets axisymmetric conditions. Previous researchers have formulated an analytical equation for the radial distribution and hoop stress that is valid for the value of the inhomogeneity constant (β) = 1. In this study, the development of a valid similar analytical equation was carried out for the more general value of (-2,-1,0, 1,2). The equations proposed in this study were further validated by numerical simulation (FEM) and experimental studies by previous researchers. Meanwhile, good agreement have been obtained on the proposed analytical equation which has an error value of less than 2.77% when compared to numerical simulation (FEM). A comparison of the proposed analytical equation with the results of experimental studies by previous researchers found a very close trend, so it can be concluded that the proposed analytical equation in this study can be trusted for its validity and can be used in real conditions.

Keyword: FGM, *Cylindrical, Axisymmetric, Radial stress, Hoop stress*

ABSTRAK

ANALISIS TEGANGAN PADA TABUNG SILINDER *FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL* (FGM)

Oleh

ADAM WISNU MURTI

Mendapatkan material dengan sifat mekanik yang baik dalam berbagai aspek merupakan sesuatu yang sulit, namun bisa didapatkan dengan rekayasa komposisi materialnya. *Functionally graded material* (FGM) adalah material komposit khusus yang umumnya terdiri dari dua atau lebih material dan struktur mikronya berubah dari satu bahan kontinyu ke bahan lainnya dengan gradien tertentu. Penelitian ini berisi peninjauan kembali pada persamaan referensi yang digunakan serta pembaruan persamaan untuk menghitung distribusi *radial* dan *hoop stress* pada *cylindrical* FGM. Penelitian ini menggunakan fungsi pangkat dalam menentukan karakter ketidakhomogenan material dan menerapkan kondisi pembebanan *internal pressure* yang memenuhi *axisymmetric*. Peneliti terdahulu telah merumuskan persamaan analitik untuk distribusi radial dan hoop stress yang valid untuk nilai konstanta ketidakhomogenan (β) = 1. Pada penelitian ini, pengembangan persamaan analitik sejenis yang valid dilakukan untuk nilai β yang lebih umum (-2,-1,0,1,2). Persamaan yang diusulkan pada penelitian ini selanjutnya divalidasi dengan simulasi numerik (FEM) dan studi eksperimen oleh peneliti sebelumnya. Adapun, hasil yang baik telah didapatkan pada usulan persamaan analitik yang memiliki nilai error lebih kecil dari 2,77% jika dibandingkan dengan simulasi numerik (FEM). Komparasi usulan persamaan analitik dengan hasil studi eksperimen peneliti sebelumnya didapatkan tren yang sangat mendekati, sehingga dapat disimpulkan usulan persamaan analitik pada penelitian ini dapat dipercaya keabsahannya dan dapat digunakan pada kondisi nyata.

Kata Kunci: FGM, *Cylindrical*, *Axisymmetric*, *Radial stress*, *Hoop stress*

**ANALISIS TEGANGAN PADA TABUNG SILINDER *FUNCTIONALLY
GRADED MATERIAL* (FGM)**

Oleh

ADAM WISNU MURTI

Tesis

**Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
MAGISTER TEKNIK**

Pada

**Program Pascasarjana Magister Teknik Mesin
Fakultas Teknik Universitas Lampung**



**PROGRAM PASCASARJANA MAGISTER TEKNIK MESIN
FAKULTAS TEKNIK
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022**

Judul Skripsi : **ANALISIS TEGANGAN PADA TABUNG
SILINDER FUNCTIONALLY GRADED
MATERIAL (FGM)**

Nama Mahasiswa : Adam Wisnu Murti

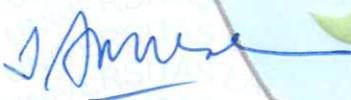
Nomor Pokok Mahasiswa : 2025021007

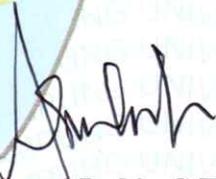
Program Studi : Magister Teknik Mesin

Fakultas : Teknik



1. Komisi Pembimbing


Dr. Jamiatul Akmal, S.T., M.T.
NIP. 19690801 199903 1 002


Asnawi Lubis, S.T., M.Sc., Ph.D.
NIP. 19700412 199703 1 006

2. Ketua Program Studi Magister Teknik Mesin



Dr. Gusri Akhyar Ibrahim, S.T., M.T.
NIP. 19710817 199802 1 003

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua Penguji : **Dr. Jamiatul Akmal, S.T., M.T.**



Anggota Penguji : **Asnawi Lubis, S.T., M.Sc., Ph.D.**



Penguji Utama I : **Dr. Eng. Shirley Savetlana, S.T., M.Met.**



Penguji Utama II : **Ir. Masdar Helmi, S.T., D.E.A., Ph.D.**



2. Dekan Fakultas Teknik



Dr. Eng. Hefny Fitriawan, S.T., M.Sc.

NIP. 19750928 200112 1 002

3. Direktur Program Pascasarjana Universitas Lampung



Prof. Dr. Ir. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.

NIP. 19710 15 199803 1 005

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: 12 Agustus 2022

PERNYATAAN ORISINALITAS

Saya menyatakan dengan sebenar-benarnya bahwa sepanjang pengetahuan saya, di dalam Naskah Tesis ini tidak terdapat karya ilmiah yang pernah diajukan oleh orang lain untuk memperoleh gelar akademik di suatu Perguruan Tinggi, dan tidak terdapat karya atau pendapat yang pernah ditulis atau diterbitkan oleh orang lain, kecuali yang secara tertulis dikutip dalam naskah ini dan disebutkan dalam sumber kutipan dan daftar pustaka.

Apabila ternyata di dalam naskah Tesis ini dapat dibuktikan terdapat unsur-unsur jiplakan, saya bersedia Tesis (MAGISTER) dibatalkan, serta diproses sesuai dengan peraturan perundang-undangan yang berlaku (UU No. 20 Tahun 2003, pasal 25 ayat 2 dan pasal 70).

Bandar Lampung, Juli 2022
Mahasiswa



ADAM WISNU MURTI
NPM. 2025021007

RIWAYAT HIDUP



Penulis dilahirkan di Metro, Provinsi Lampung pada tanggal 16 April 1997 sebagai anak pertama dari 3 bersaudara pasangan Bapak Budimin dan Ibu Sri Purwanti. Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 2 Sukabumi Bandar Lampung (2009), Sekolah Menengah Pertama di SMPN 23 Bandar Lampung (2012), dan Sekolah Menengah Atas di SMA Perintis 2 Bandar Lampung (2015). Pada tahun 2015, penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif di dalam organisasi internal kampus dan memiliki pencapaian pada bidang akademik. Penulis menjadi Staf Bidang Eksternal Badan Eksekutif Mahasiswa Fakultas Teknik (BEM-FT) (2016), dan menjadi Kepala Bidang Hubungan Masyarakat Himpunan Mahasiswa Teknik Mesin (HIMATEM) (2017). Pada bidang akademik, penulis pernah mendapat juara 1 Lomba Nasional Tahunan Rancang Bangun Mesin (LNT-RBM) IX yang dilaksanakan oleh Badan Kerja Sama Teknik Mesin Indonesia (BKSTM) di Jakarta (2019). Penulis pernah melaksanakan kerja praktik (KP) di PT. PLN (Persero) Unit Pembangkit PLTA Besai, Sumber Jaya Lampung Barat (2017) dengan judul laporan KP “Perhitungan Efisiensi *Cooling Water Pump* (CWP) Pada PT. PLN

(Persero) Sektor Pembangkit Tanjung Karang Unit Pembangkit PLTA BESAI Sumber Jaya Lampung Barat”. Penulis juga pernah melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Karang Rejo, Sungkai Selatan Lampung Utara pada tahun 2018. Pada tahun 2019,

Tahun 2020 penulis melanjutkan pendidikan magister di Jurusan Teknik Mesin Universitas Lampung melalui program beasiswa bebas SPP Pascasarjana Universitas Lampung dengan mengambil konsentrasi konstruksi & perancangan. Penulis melakukan penelitian dengan judul “Analisis Tegangan Pada Tabung Silinder *Functionally Graded Material* (FGM)” di bawah bimbingan Dr. Jamiatul Akmal dan Dr. Asnawi Lubis.

MOTTO

إِذَا مَاتَ ابْنُ آدَمَ انْقَطَعَ عَمَلُهُ إِلَّا مِنْ ثَلَاثٍ: صَدَقَةٍ جَارِيَةٍ، أَوْ عِلْمٍ
يُنْتَفَعُ بِهِ، أَوْ وَلَدٍ صَالِحٍ يَدْعُو لَهُ

“Jika seseorang meninggal dunia,
maka terputuslah amalannya kecuali tiga perkara (yaitu):
sedekah jariyah, ilmu yang dimanfaatkan, atau do’a anak yang sholeh”

(HR. Muslim no. 1631)

“It is impossible to live without failing at something, unless you live so cautiously
that you might as well not have lived at all – in which case, you fail by default.”

(J.K. Rowling)

“Pendidikan dan pengalaman adalah investasi terbaik dalam kehidupan”

“Baik proses, tindakan, maupun hasil yang dikerjakan adalah cerminan dari
kualitas seseorang. sebaiknya, diri kita malu jika tidak berkualitas”

UCAPAN TERIMAKASIH

Assalamu'alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh.

Segala Puji dan Syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena atas berkat dan rahmat-Nya laporan Tesis ini dapat diselesaikan. Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah membantu dalam penyelesaian laporan ini baik secara moril maupun materil. Pada kesempatan kali ini, penulis ingin menyampaikan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Orang tua dan keluarga penulis, terutama Ibunda tercinta Sri Purwanti, S.Pd. yang selalu mendoakan, memberi motivasi, dan pengorbanannya selama penulis menempuh studi.
2. Dr. Amrul, S.T., M.T. selaku Ketua Jurusan Teknik Mesin Fakultas Teknik Universitas Lampung.
3. Dr. Gusri Akhyar Ibrahim, S.T., M.T. selaku Ketua Program Studi Magister Teknik Mesin Universitas Lampung.
4. Dr. Jamiatul Akmal, S.T., M.T. selaku Sekretaris Jurusan sekaligus Pembimbing I yang telah banyak memberikan masukan berupa ide dan motivasi dalam pengerjaan Tesis.
5. Dr. Asnawi Lubis, S.T., M.Sc. selaku Pembimbing II sekaligus Kepala Laboratorium Mekanika Struktur atas kesediaan dalam memberikan bimbingan dan arahnya dalam penyusunan laporan.

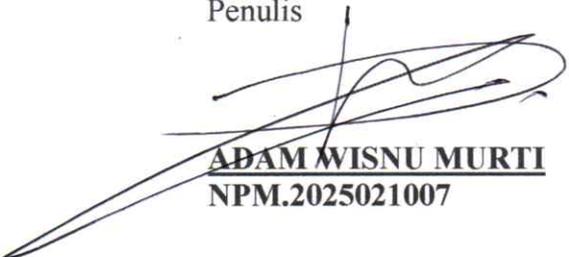
6. Dr. Eng. Shirley Savetlana, S.T., M.Met. selaku dosen penguji utama 1 dalam penelitian yang telah memberikan kritik dan saran yang sangat membangun dalam penyempurnaan laporan.
7. Ir. Masdar Helmi, S.T., D.E.A., Ph.D. selaku dosen penguji utama 2 yang telah banyak membantu dalam penyelesaian penelitian.
8. Bapak dan Ibu dosen serta staff Jurusan Teknik Mesin yang telah memberikan ilmu pengetahuan yang sangat bermanfaat selama penulis menempuh studi.
9. Asia Novita Sari, S.Ak., M.Ak. yang telah menemani penulis dan berjuang bersama-sama selama menempuh studi hingga tuntas.
10. Rekan-rekan di Laboratorium Mekanika Struktur Jurusan Teknik Mesin, yaitu Bang Nurcahya, Magnolia, Fajri, dan Yoki yang telah banyak membantu.
11. Rekan-rekan Tongkrongan Elite yakni Adit, Arif, Arifzul, Dana, Dewa, Diandhana, Didit, Eko, Hasan, Irvan, Rifqi, Thomas, Vidi yang telah bersama-sama menemani di saat penulis membutuhkan refreshing.
12. Seluruh rekan-rekan Teknik Mesin khususnya angkatan 2015 yang telah memberikan dukungan dan semangatnya, salam Solidarity Forever.
13. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan oleh penulis.

Semua doa dan dukungan yang telah diberikan kepada penulis telah menjadi cambuk bagi penulis untuk tetap terpacu dan semangat dalam menyelesaikan studi.

Sebuah karya selalu memiliki kekurangan, dan semoga karya tulis ini bermanfaat.

Bandar Lampung, Juli 2022

Penulis



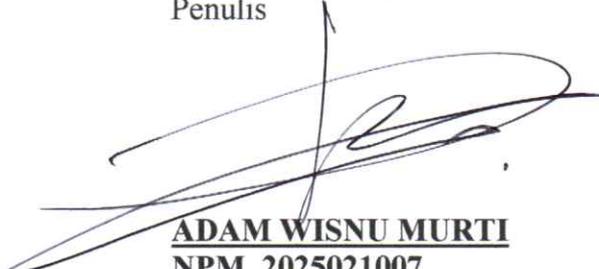
ADAM WISNU MURTI
NPM.2025021007

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji dan syukur ke hadirat Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya penulis dapat menyajikan tulisan tesis yang berjudul Analisis Tegangan Pada Tabung Silinder *Functionally Graded Material* (FGM). Penulis berharap tulisan ini dapat bermanfaat untuk pengembangan untuk mempermudah penentuan sifat material silinder yang tepat.

Sangat disadari bahwa banyak kekurangan dan keterbatasan yang dimiliki penulis, walaupun telah dikerahkan segala kemampuan, tetapi dirasa masih terdapat banyak kekurangan pada tulisan ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan saran yang membangun serta sadar bahwa sebuah karya selalu memiliki kekurangan, dan semoga karya tulis ini bermanfaat.

Bandar Lampung, Juli 2022
Penulis



ADAM WISNU MURTI
NPM. 2025021007

DAFTAR ISI

ABSTRAK	ii
LEMBAR PENGESAHAN	v
PERNYATAAN ORISINALITAS.....	vii
RIWAYAT HIDUP	viii
MOTTO	x
UCAPAN TERIMAKASIH.....	xi
KATA PENGANTAR.....	xiii
DAFTAR ISI.....	xiv
DAFTAR GAMBAR.....	xvii
DAFTAR TABEL.....	xix
DAFTAR SIMBOL	xxi
BAB I PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang.....	1
1.2. Rumusan Masalah.....	4
1.3. Batasan Masalah	5
1.4. Tujuan Penelitian.....	6
1.5. Sistematika Penulisan	6
BAB II TINJAUAN PUSTAKA.....	8
2.1. Material Konvensional.....	8

2.1.1. Logam	8
2.1.2. Keramik.....	9
2.1.3. Polimer	11
2.1.4. <i>Fibre Reinforced Composite</i>	12
2.2. Penelitian <i>Functionally Graded Material</i> (FGM) Terdahulu	14
2.3. <i>Functionally Graded Material</i> (FGM).....	20
2.4. Metode Fabrikasi FGM.....	21
2.5. <i>Plane-stress</i> dan <i>Plane-strain</i>	22
2.5.1. <i>Two-dimensional Plane-stress</i> dan <i>Plane-strain</i>	23
2.5.2. <i>Three-dimensional Stress Analysis</i>	31
2.6. <i>Axisymmetric</i>	33
2.7. <i>Radial</i> dan <i>Hoop Stress Cylindrical</i>	37
2.8. <i>Radial</i> dan <i>Hoop Stress</i> Pada FGM	43
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	48
3.1. Metode	49
3.2. Pengamatan Peubah	51
3.2.1. Komparasi Jurnal	52
3.2.2. Pembaruan Persamaan Analitik	53
3.2.3. Komparasi Eksperimen	60
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	69
4.1. Hasil Komparasi Jurnal.....	69
4.2. Hasil Pembaruan Persamaan Analitik.....	78
4.3. Hasil Komparasi Eksperimen	81

BAB V PENUTUP	93
5.1. Kesimpulan	93
5.2. Saran	94
DAFTAR PUSTAKA	96

LAMPIRAN

Lampiran A. *Source code* MATLAB FGM *cylindrical* Jurnal (Tutuncu, 2001)

Lampiran B. *Source code* MATLAB FGM *cylindrical* Pembaruan

Lampiran C. *Source code* ANSYS APDL FGM *cylindrical*

Lampiran D. *Source code* ANSYS APDL komparasi eksperimen

Lampiran E. Detali derivasi persamaan pembaruan

DAFTAR GAMBAR

Gambar 1.1. FGM yang ada di alam, (a) bambu, (b) tulang	2
Gambar 2.1. Penerapan <i>Fiber Reinforced Plastic (FRP)</i> pada Fasilitas <i>offshore</i> di Teluk Guinea (Amos, 2020).....	14
Gambar 2.2. Tegangan dan regangan pada plat laminated.....	21
Gambar 2.3. Keadaan <i>stress</i> dua dimensi.....	23
Gambar 2.4. <i>Plane differential element</i> yang mengalami tegangan.....	24
Gambar 2.5. <i>Principal stress</i>	26
Gambar 2.6. Bentuk displacement dan rotation sebuah element pada bidang $x - y$	27
Gambar 2.7. <i>Differential element</i> sebelum dan sesudah terdeformasi	28
Gambar 2.8. Elemen <i>three-dimensional</i>	31
Gambar 2.9. <i>Axisymmetric</i> elemen <i>ijm</i>	33
Gambar 2.10. (a) <i>cross-section axisymmetric</i> (b) elemen <i>axisymmetric</i>	34
Gambar 2.11. Garis perpindahan dan rotasi elemen pada bidang $r - z$	36
Gambar 2.12. Koordinat dan <i>stress</i> pada <i>cylindrical</i>	43
Gambar 3.1. Alur Penelitian	49
Gambar 3.2. Grafik kosong <i>radial</i> dan <i>hoop stress</i>	52
Gambar 3.3. Model	55
Gambar 3.4. PLANE183	56
Gambar 3.5. Hasil <i>meshing cylindrical FGM</i>	56

Gambar 3.6. Pemberian kondisi batas dan <i>pathing</i>	57
Gambar 3.7. Contoh grafik hasil simulasi numerik ANSYS APDL	58
Gambar 3.8. Grafik kosong hasil uji konvergen.....	60
Gambar 3.9. Peralatan eksperimen (Caela, 2017)	61
Gambar 3.10. Regresi hasil eksperimen kedalaman <i>space bar</i> 4.48 mm (Caela, 2017)	67
Gambar 4.1. Hasil <i>meshing</i> dan pemberian kondisi batas dari model simulasi FEM ($n = 160$)	70
Gambar 4.2. Grafik distribusi <i>radial stress</i> pada setiap n (uji konvergen)	71
Gambar 4.3. <i>Radial stress</i> pada setiap nilai n ($r = 0.8$)	72
Gambar 4.4. Distribusi <i>radial stress</i> analitik jurnal vs FEM.....	74
Gambar 4.5. Distribusi <i>hoop stress</i> analitik jurnal vs FEM	76
Gambar 4.6. Distribusi <i>radial stress</i> pembaruan analitik vs FEM	80
Gambar 4.7. Distribusi <i>hoop stress</i> pembaruan analitik vs FEM.....	81
Gambar 4.8. Grafik komparasi pada penetrasi 0.96 mm	85
Gambar 4.9. Grafik komparasi pada penetrasi 1,92 mm	86
Gambar 4.10. Grafik komparasi pada penetrasi 2,64 mm	87
Gambar 4.11. Grafik komparasi pada penetrasi 3,26 mm	88
Gambar 4.12. Grafik komparasi pada penetrasi 4,48 mm	89

DAFTAR TABEL

Tabel 2.1. Ringkasan penelitian tentang <i>functionally graded materials</i>	15
Tabel 2.2. Ringkasan penelitian yang menggunakan <i>finite element analysis</i>	18
Tabel 3.1. Data komparasi yang ingin didapatkan antara simulasi FEM dengan perhitungan jurnal.....	53
Tabel 3.2. Data komparasi yang ingin didapatkan antara persamaan pembaruan dan FEM.....	58
Tabel 3.3. Data kosong uji konvergen.....	59
Tabel 3.4. <i>Raw data</i> pembacaan <i>data logger</i> (Caela, 2017)	64
Tabel 3.5. Pembacaan regangan sepanjang kedalaman dan penetrasi.....	65
Tabel 3.6. Pembacaan stress sepanjang kedalaman dan penetrasi	65
Tabel 3.7. <i>Internal Pressure</i> setiap kedalaman <i>space bar</i> hasil regresi.....	68
Tabel 3.8. Data komparasi hasil analitik pembaruan , FEM, dan Eksperimen ...	68
Tabel 4.1. Parameter yang digunakan untuk kalkulasi isi persamaan referensi ...	69
Tabel 4.2. Distribusi <i>radial stress</i> pada setiap nilai <i>n</i> (uji konvergen).....	70
Tabel 4.3. Data komparasi antara simulasi FEM dengan perhitungan analitik jurnal.....	73
Tabel 4.4. Data komparasi antara simulasi FEM dengan perhitungan pembaruan persamaan analitik.....	78
Tabel 4.5. Hasil stress sepanjang kedalaman dan setiap penetrasi.....	82
Tabel 4.6. Hasil <i>internal pressure</i> setiap kedalaman <i>space bar</i> hasil regresi	83

Tabel 4.7. Komparasi hasil analitik pembaruan , FEM, dan Eksperimen	84
--	----

DAFTAR SIMBOL

Simbol	Keterangan	Satuan
a	Jari-jari dalam jurnal Tutuncu (2001)	mm
α	Koefisien ekspansi thermal	$1/K$
β	Konstanta ketidakhomogenan modulus Young's	
ε_x	Regangan aksial arah x	
ε_y	Regangan aksial arah y	
ε_z	Regangan aksial arah z	
ε_r	Regangan arah radial	
ε_θ	Regangan arah circumferential	
$\{\varepsilon\}$	Matriks regangan	
E	Modulus Young's	MPa
E_o	Modulus Young's dinding luar	MPa
$\sum F_x$	Total gaya arah x	N
γ_{xy}	Regangan geser <i>plane xy</i>	
γ_{yz}	Regangan geser <i>plane yz</i>	
γ_{xz}	Regangan geser <i>plane xz</i>	
γ_{rz}	Regangan geser <i>plane rz</i>	

Simbol	Keterangan	Satuan
k	Konduktivitas thermal	W/mK
$\sum M_x$	Total momen arah x	Nm
n	Jumlah elemen	
θ_p	<i>Principal angle</i>	<i>deg</i>
P	Pressure	MPa
P_i	Internal pressure	MPa
P_o	External pressure	MPa
r	Jari-jari	mm
R	Jari-jari luar jurnal Tutuncu (2001)	mm
R_i	Jari-jari dalam	mm
R_o	Jari-jari luar	mm
σ_x	Tegangan aksial arah x	MPa
σ_y	Tegangan aksial arah y	MPa
σ_r	Tegangan aksial arah radial	MPa
σ_z	Tegangan aksial arah logitudinal	MPa
σ_θ	Tegangan aksial arah circumferential	MPa
σ_{\min}	Tegangan minimum	MPa
σ_{\max}	Tegangan maksimum	MPa
$\{\sigma\}$	Matriks tegangan	
τ_{xy}	Tegangan geser <i>plane xy</i>	MPa

Simbol	Keterangan	Satuan
$\tau_{r\theta}$	Tegangan geser <i>plane rθ</i>	<i>MPa</i>
T	Suhu	<i>K</i>
u	Perpindahan	<i>mm</i>
u_r	Perpindahan radial	<i>mm</i>
ν	<i>Poisson's ratio</i>	
ω	Konstanta ketidakhomogenan konduktivitas thermal	
χ	Konstanta ketidakhomogenan koefisien ekspansi thermal	

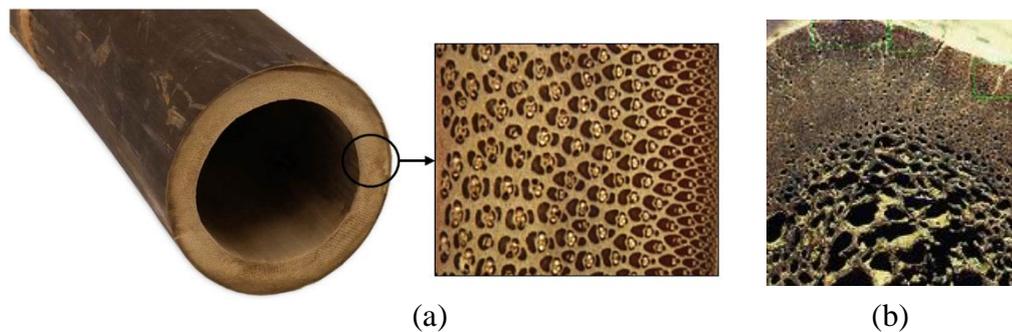
I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Kebutuhan akan material komposit semakin meningkat seiring dengan kemajuannya dalam memenuhi kebutuhan, khususnya pada bidang industri. Hal tersebut karena material komposit memiliki keunggulan dalam berbagai hal, salah satunya dari sifat mekanik yang dimiliki material tersebut. Dalam penggunaannya, menentukan material yang sempurna dalam berbagai aspek sangat tidak mungkin didapatkan. Sebagai contoh, saat membutuhkan material yang kuat, tahan korosi, dan juga tahan panas sulit didapatkan secara sempurna dari sebuah material homogen. Sifat-sifat tersebut dapat diperoleh dengan lebih baik jika memadukan berbagai material sehingga menjadi sebuah material tidak homogen yang memiliki kelebihan dalam tujuan tertentu, salah satunya adalah *functionally graded material* (FGM).

Functionally graded material (FGM) adalah material komposit khusus yang umumnya terdiri dari dua atau lebih material dan struktur mikronya berubah dari satu bahan kontinyu ke bahan lainnya dengan gradien tertentu. Jadi, sifat FGM yang termasuk *young's modulus*, *shear modulus*, dan *density* berubah dalam rentang ukuran tertentu (Zhong and Yu, 2007 dan Li, 2008). Konsep FGM pertama kali muncul pada tahun 1984 dari sekelompok ilmuwan Jepang selama mengerjakan proyek ruang angkasa di *Japan National Aerospace Laboratory* (Niino *et. al.*,

1984), dan disempurnakan konsepnya terus menerus (Yamanouchi *et. al.*, 1990 dan Koizumu, 1993). Banyak kelebihan dari penggunaan FGM seperti mengurangi *intensity factor*, *in-plane* dan *lateral stress*, dan meningkatkan distribusi *residual stress*, serta meningkatkan *thermal performance* (Chu and Dui, 2018). Fenomena FGM dapat ditemui di sekitar kita (alam), contohnya seperti bambu dan juga tulang manusia seperti pada Gambar 1.



Gambar 1. FGM yang ada di alam, (a) bambu, (b) tulang

Telah banyak penelitian dalam menentukan solusi analitik terhadap respon mekanik struktur FGM. Dalam penelitian teoritik sering diasumsikan bahwa modulus Young's berubah dengan koordinat spasial dalam bentuk beberapa fungsi khusus. Banyak penelitian juga yang telah mempelajari solusi analitik untuk struktur FGM dengan mengubah sifat material di sepanjang arah ketebalan, contohnya pada penelitian Pradhan dan Chakraverty (2013) yang mempelajari terkait getaran bebas pada FGM beam dengan kondisi batas yang beragam. Penelitian oleh Kang dan Li (2010) yang menganalisis deformasi pada *nonlinear cantilever FGM beam* dan menurunkan pernyataan eksplisit dari defleksi dan rotasi untuk FGM beam yang mengalami *end-bending moment* dan pengaruh distribusi gradien modulus Young's dan juga parameter *nonlinear* pada defleksi FGM beam. Dengan menggunakan metode superposisi menurunkan solusi analitik dari *orthotropic FGM beam* (Jiang & Ding, 2005).

Namun FGM lebih sering dan cocok digunakan pada geometri *cylindrical*, seperti diaplikasikan pada *pressure vessel* dan juga pipa khusus. Penelitian FGM pada geometri *cylindrical* ini juga telah dilakukan oleh beberapa peneliti, seperti pada penelitian Jabbari *et al.* (2007) yang mempelajari solusi dari *steady two-dimensional axisymmetric mechanical and thermal stress* pada FGM *hollow cylinder*. Li *et al.* (2009) juga mempelajari metode tentang persamaan integral baru yang sederhana dan efektif pada axisymmetric FGM dengan perubahan *arbitrary gradient* sehingga menjadi penyelesaian persamaan integral. Namun, sedikit penelitian yang telah dilakukan terkait *stress* pada *cylindrical* FGM. Tutuncu dan Ozturk (2001) mempelajari *spherical* dan *cylindrical* FGM dengan perubahan modulus Young yang memenuhi fungsi pangkat sepanjang ketebalan dan mendapatkan solusi analitik (*exact solution*) untuk *radial* dan *hoop stress*.

Penelitian terkait solusi eksak pada *cylindrical* FGM masih terbatas dan memiliki potensi untuk dikembangkan lebih lanjut. Pada penelitian tersebut $E_{(r)} = E_0 r^\beta$ digunakan fungsi pangkat dalam mengkarakteristik ketidakhomogenan modulus Young FGM. nilai β pada fungsi pangkat tersebut adalah konstanta ketidakhomogenan. Penelitian ini bertujuan mengembangkan persamaan analitik untuk distribusi *radial* dan *hoop stress* pada bagian *cylindrical*. Pengembangan pada penelitian ini adalah merevisi persamaan yang digunakan oleh penelitian Tutuncu dan Oztruk (2001). Hal tersebut dilakukan karena terdapat indikasi kesalahan pada penelitian Tutuncu dan Oztruk (2001). Indikasi kesalahan tersebut terdapat pada persamaan distribusi hoop stress yang tidak akurat. Pembuktian indikasi tersebut yang akan dibahas pada penelitian ini.

Penelitian ini menggunakan simulasi numerik (FEM) dengan *software* ANSYS APDL. Penggunaan simulasi numerik ini mengasumsikan FGM memiliki kondisi batas yang dapat dianalisis secara *axisymmetric*. Pada kondisi *axisymmetric*, FGM dapat dianalisis dengan memodelkan geometri *cylindrical* (3D) yang dipotong sejajar sumbu. Analisis FGM juga harus memiliki pembebanan seragam, sehingga menjadi bentuk geometri datar (2D). Geometri datar tersebut dapat dianalisis secara *plane-strain* ataupun *plane-stress*. Penggunaan FEM sebagai media validasi dan komparasi terhadap solusi eksak yang dipakai. FEM juga digunakan untuk analisis sebagai solusi yang mudah dalam menganalisis FGM yang memiliki geometri kompleks. Maksud sederhana dari pernyataan solusi yang mudah adalah kondisi dimana ketidakmungkinan untuk menghitung secara solusi eksak (analitik). Selain itu, komparasi dengan hasil eksperimen dilakukan untuk mengetahui hubungan pengembangan persamaan ini dengan kondisi nyata (aktual) dan juga apakah persamaan tersebut dapat diaplikasikan.

1.2. Rumusan Masalah

Solusi eksak untuk distribusi *radial* dan *hoop stress* FGM *cylindrical* pada penelitian Tutuncu dan Oztruk (2001) terindikasi memiliki hasil yang kurang tepat. Jika indikasi kesalahan tersebut terbukti pada solusi eksak untuk distribusi *radial* dan *hoop stress* FGM *cylindrical*, tidak ada persamaan eksak yang dapat mengetahui distribusi *radial* dan *hoop stress* FGM *cylindrical* tersebut sampai sekarang. Solusi eksak untuk menghitung hal tersebut sangat dibutuhkan dan dirasa masih dapat dikembangkan dan dapat dipakai secara fleksibel. Hal tersebut yang menjadi dasar pemikiran untuk dilakukannya penelitian ini.

Penelitian ini bertujuan untuk mengusulkan pembaruan solusi eksak yang tepat untuk menentukan distribusi *radial* dan *hoop stress* FGM *cylindrical*. Sebagai pembuktian, hasil pembaruan persamaan tersebut dikomparasi dengan simulasi numerik dan eksperimen. Simulasi numerik dilakukan sebagai salah satu opsi alternatif dalam menentukan distribusi *radial* dan *hoop stress* FGM *cylindrical*. Sedangkan, komparasi dengan eksperimen bertujuan untuk mengetahui apakah *exact solution* distribusi *radial* dan *hoop stress* pada bagian *cylindrical* ini dapat diaplikasikan pada kondisi nyata (aktual).

1.3. Batasan Masalah

Untuk memperoleh solusi dari penelitian ini, dibutuhkan batasan masalah dan asumsi sebagai berikut:

1. Dalam menganalisis *stress* pada *cylindrical* FGM dengan beban internal pressure, *axial stress* tidak dianalisis. Hal tersebut karena pada dasarnya *axial stress* tidak bervariasi sepanjang ketebalan.
2. Tidak terdapat pembebanan *bending* dan fenomena *buckling* pada analisis penelitian ini serta asumsi *long cylindrical beam* yang digunakan sehingga kondisi *free* terjadi pada kedua ujung *cylindrical beam*.
3. Simulasi numerik (FEM) menggunakan analisis plane strain 2D karena asumsi *axisymmetric* pada kondisi batas yang terjadi pada FGM *cylinder* sehingga lebih mudah dan cepat dalam melakukan simulasi.
4. Kondisi thermal yang terjadi pada *cylindrical* FGM diabaikan, sehingga diasumsikan tidak terjadi efek thermal stress pada penelitian ini yang menyebabkan distorsi.

1.4. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini dilakukan adalah sebagai berikut:

1. Mengkaji radial dan hoop stress *cylindrical* FGM secara analitik dan efek penggunaan nilai β pada FGM.
2. Menganalisis simulasi numerik (FEM) sebagai alternatif dalam menentukan distribusi *radial* dan *hoop stress cylindrical* FGM.
3. Menganalisis komparasi distribusi *radial* dan *hoop stress* antara hasil perhitungan analitik dan simulasi numerik pada bagian *cylindrical* FGM.

1.5. Sistematika Penulisan

Penyusunan thesis ini terdiri atas 5 Bab. Bab I Pendahuluan yang berisikan penjelasan tentang latar belakang, rumusan masalah, tujuan, batasan masalah serta sistematika penulisan thesis. Bab II merupakan Tinjauan Pustaka, yang berisikan tentang teori-teori dasar yang berhubungan dengan topik thesis, serta mendukung pembahasan pada Bab IV. Bab III adalah Metode Penelitian yang berisikan tentang bagaimana proses perhitungan radial dan hoop stress pada FGM *cylindrical* baik analitik maupun numerik, dan metode yang digunakan. Hasil dan Pembahasan disajikan pada Bab IV yang berisikan tentang hasil serta pembahasan radial dan hoop stress FGM *cylindrical* yang didapatkan, dan juga pengaruh dari nilai konstanta ketidakhomogenan. Pada bagian akhir terdapat Simpulan dan Saran yang berisikan simpulan dan hasil pembahasan yang didapatkan serta saran yang dapat diberikan oleh penulis untuk penelitian lebih lanjut. Selanjutnya Daftar Pustaka, dimana pada bagian ini berisikan tentang sumber-sumber kepustakaan yang

digunakan, dan terakhir terdapat Lampiran berisikan tentang data-data yang mendukung dalam penulisan laporan akhir ini.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Material Konvensional

Ada banyak jenis bahan dengan sifat yang sangat berbeda. Ketersediaan banyak bahan memberi seorang insinyur keuntungan untuk memilih bahan yang paling cocok untuk setiap komponen yang dirancang. Akibatnya, sangat penting untuk memahami sifat mekanik bahan dan fenomena fisik yang menyebabkannya. Struktur atom bahan menentukan sifat mekaniknya. Untuk menyelidiki lebih jauh ke dalam sifat-sifat ini, sangat penting untuk memiliki pengetahuan tentang struktur material.

2.1.1. Logam

Logam adalah bahan kelas khusus dengan berbagai aplikasi penting. Logam terkenal karena banyak sifat yang menguntungkan, tidak terbatas pada konduktivitas termal dan listrik yang tinggi, tetapi juga keuletan (yaitu kemampuan untuk menjalani *necking* tanpa putus). Keuletan logam ditambah dengan kekuatan khusus yang didapatkan melalui paduan membuat material logam menarik untuk digunakan dalam berbagai aplikasi teknik. Logam memiliki kecenderungan tinggi untuk oksidasi. Oleh karena itu, logam diubah menjadi logam paduan karena banyak elemen yang larut di dalamnya dalam keadaan padat. Misalnya, paduan besi dan karbon menghasilkan baja. Hal ini memungkinkan untuk mayoritas elemen logam dapat menghasilkan berbagai

macam paduan. Banyak logam di antaranya yang memiliki nilai teknis, macam-macam paduan logam adalah sebagai berikut: paduan berbasis besi (baja dan besi cor), aluminium, tembaga (perunggu dan kuningan), nikel, titanium, dan magnesium (Joachim *et.al.* 2007). Atom dalam logam diatur sedemikian rupa sehingga elektronnya tersebar di dalam struktur. Sebagian besar atom di dalam logam tersusun dalam cara yang padat dan teratur. Hal ini membuat logam membentuk kristal yang tertata rapi pada strukturnya.

2.1.2. Keramik

Keramik diklasifikasikan sebagai semua bahan non-logam dan non-organik (Hornbogen, 1994). Perbedaan fisik antara logam dan keramik adalah pada jenis ikatannya, keramik memiliki jenis ikatan yang mengakibatkan kulit terluar terisi penuh dan tidak mengandung ikatan logam. Keramik kadang-kadang memiliki satu elemen dalam bentuk yang berbeda (misalnya seperti berlian atau grafit) dan mungkin juga dalam senyawa elemen yang berbeda. Salah satu jenis keramik yang populer adalah keramik silikat. Keramik silikat mengandung silikon oksida. Contoh dari keramik oksida adalah aluminium oksida Al_2O_3 , zirkonium oksida ZrO_2 , dan magnesium oksida MgO . Untuk keramik tanpa oksida contohnya antara lain: silikon nitrida Si_3N_4 dan silikon karbida SiC . Keramik terikat secara kimia dalam berbagai bentuk, bisa dengan ikatan ionik, kovalen, Van der Waals, hidrogen dan dipol. Secara umum, struktur kristal keramik lebih kompleks bila dibandingkan dengan logam. Misalnya, keramik dasar seperti berlian tidak membentuk struktur kubik atau heksagonal seperti logam ketika mengkristal. Struktur kisi-kisi berlian bersifat

kubus, namun tidak membentuk kisi-kisi Bravais karena setiap tempat atom memiliki keunikannya tersendiri. Jenis kisi-kisi ini dikenal sebagai kisi-kisi dengan basis. Contoh penting dari kisi-kisi tersebut antara lain struktur heksagonal *closepacked* (Joachim *et.al.* 2007).

Seringkali, keramik tidak digunakan dalam bentuk kristal, melainkan sebagian besar digunakan dalam keadaan *amorphous*. Ketika digunakan dalam keadaan ini, keramik dikenal sebagai kaca. Dalam kebanyakan kasus, kaca bersifat transparan karena tidak memiliki batas butir yang diperlukan untuk pembiasan cahaya. Sebagian besar bahan ini berbahan dasar silikon oksida SiO_2 . SiO_2 digunakan sebagian besar untuk kaca jendela. Enamel juga material *glassy* lain yang patut diperhatikan. Enamel digunakan untuk melapisi logam, hal tersebut karena memiliki sifat kekuatan *impact* yang tinggi dan merupakan bahan dengan ketahanan korosi yang baik. Keramik memiliki kekuatan tinggi dan kekakuan elastis ketika mengalami beban tekan karena memiliki ketahanan yang cukup besar terhadap banyak bahan kimia dan juga menunjukkan stabilitasnya pada suhu tinggi (berlaku hanya untuk keramik kristal). Kebanyakan *glasses (amorphous ceramics)* tidak memiliki titik leleh yang tinggi. Hal tersebut menyebabkan material menjadi kurang mengeras pada suhu tinggi, suhu di mana *amorphous ceramics* cukup melunak di bawah titik leleh keramik kristal. Selain semua kelebihan dari sifat keramik seperti yang dinyatakan di atas, keramik juga memiliki kelemahan. Kerapuhannya merupakan tantangan tersendiri selama proses manufaktur. Keramik biasanya gagal karena patah getas, oleh karena itu retakan awal yang ada pada material merupakan faktor kunci dalam penentuan kekuatannya.

Keramik tidak berubah bentuk secara plastis. Kegagalan sebagian besar terjadi melalui *cleavage fracture*, melalui celah yang ada yang terus tumbuh dan merambat. Pemasakan keramik menghasilkan pori-pori yang bertindak seperti retakan dan dengan demikian menyebabkan kegagalan melalui perambatan retak.

Keramik tidak mampu menghilangkan efek perambatan retak karena kurangnya deformasi plastis. Hal ini membuat ketangguhan patah keramik menjadi rendah dibandingkan dengan logam, keramik biasanya mengandung retakan dengan ukuran dan orientasi yang berbeda. Kekuatan keramik ditentukan oleh retakan yang memiliki kekuatan kegagalan terendah dan ketangguhan retaknya terutama ditentukan oleh kekuatan ikatan kimianya.

2.1.3. Polimer

Polimer mengandung makromolekul, polimer sebagian besar terikat bersama dengan ikatan kovalen, melalui rantai molekul besar. Tidak seperti logam dan keramik yang terbuat dari atom, polimer terbuat dari komponen linier yang membuat strukturnya lebih rumit daripada jenis bahan lainnya (Joachim *et.al.* 2007).

Molekul rantai yang terkandung dalam polimer biasanya merupakan senyawa organik. Jumlah monomer dalam rantai molekul biasanya berorde 10^3 sampai 10^5 yang menyebabkan panjang total molekul hingga ber mikrometer. Jumlah rata-rata monomer dalam rantai molekul polimer disebut derajat polimerisasi. Setiap molekul yang dapat terhubung dalam reaksi berantai

seperti itu dapat digunakan untuk menghasilkan polimer. Sepanjang garis ini terdapat berbagai macam polimer dengan sifat sintetis dan fisik yang berubah secara tegas dan di antara rantai molekul tidak ada ikatan kimia yang kuat, tergantung pada struktur molekul, ikatan dipol, hidrogen, atau Van der Waals pada suhu polimer yang dibentuk. Polimer dapat dibentuk dengan polimerisasi adisi dan polimerisasi kondensasi (Jastrzebski, 1976).

Sifat mekanik polimer pada prinsipnya ditentukan oleh portabilitas molekul rantai. Portabilitas bergantung pada struktur kimia polimer. Misalnya, sebuah polimer yang berisi rantai karbon (ikatan tunggal) dapat dibentuk pada setiap atom karbon karena ikatan tunggal antara dua atom karbon dapat berotasi dengan bebas. Atau, ikatan rangkap bersifat kaku karena mobilitas atau portabilitas juga dipengaruhi oleh adanya gugus samping. Etilen adalah contoh khas monomer yang dapat membentuk polimer. Polimer yang dihasilkan terdiri dari rantai dengan atom karbon *back bone*. Secara simbolis, etilen ditulis sebagai $[C_2H_4]_n$, dengan indeks 'n' yang menunjukkan jumlah unit berulang dari derajat polimerisasi. Seperti yang sudah dijelaskan di atas, rantai lurus adalah unit pembentuk polimer. Padahal, sangat memungkinkan untuk menghubungkan rantai secara kovalen, membentuk sistem molekuler.

2.1.4. Fibre Reinforced Composites

Ada bahan yang berbeda (komposit) yang dapat digabungkan untuk mendapatkan sifat yang bagus dari setiap bahan yang digunakan. Hasil campuran ini mungkin memikat dalam penguatan molekul atau partikel logam dan *dispersion-strengthened* pada keramik. Komposit cukup sulit untuk

didefinisikan secara tepat dan dianggap sebagai bahan yang mencakup dua fase yang berbeda secara fisik. Komposit yang digunakan saat ini dicirikan oleh sifat-sifat berikut:

- Penguatan fase kedua melekat dalam matriks kontinyu
- Penguatan fase kedua dan matriks awalnya merupakan bahan yang terpisah dan digabungkan selama pemrosesan–proses internal seperti pengendapan yang tidak menghasilkan fase kedua.
- Partikel fase kedua memiliki ukuran setidaknya beberapa mikrometer.
- Efek penguatan fase kedua setidaknya sebagian disebabkan oleh transfer beban.
- Fraksi volume penguatan fase kedua setidaknya sekitar 10%. (Joachim *et.al.* 2007).

Fibre reinforced composites, atau komposit serat adalah partikel fase kedua serat panjang yang dikelilingi oleh matriks komponen lain. Salah satu modelnya adalah *glass-fibre fortified polymer* (GFRP) di mana jaringan polimer diperkuat dengan memasukkan serat-serat kaca seperti yang pertama kali diungkapkan. Target pembentukan komposit adalah untuk menggabungkan sifat-sifat unsur yang diinginkan.

Pada polimer yang diperkuat serat kaca, serat kaca meningkatkan kekakuan dan kekuatan, dan kisi-kisi yang mengelilinginya membuat material semakin dapat ditebuk dan melindungi serat dari beban terkonsentrasi. Ada banyak kemungkinan kombinasi karena bahan yang berbeda yang digabungkan dalam komposit seperti: komposit matriks logam, keramik, atau polimer yang

diperkuat dengan berbagai jenis partikel atau serat. Komposit dapat diklasifikasikan menurut geometri partikel penguatnya (*fibres, fabrics*, dan lain-lain) atau dengan bahan matriks yang digunakan. Sebagai contoh penggunaan FRP adalah penggunaan fasilitas perpipaan pada offshore di Teluk Guinea seperti pada Gambar 2.1.



Gambar 2.1. Penerapan Fiber Reinforced Plastic (FRP) pada Fasilitas *offshore* di Teluk Guinea (Amos, 2020)

2.2. Penelitian *Functionally Graded Material* (FGM) Terdahulu

Beberapa peneliti telah melakukan penelitian tentang *Functionally Graded Material* (FGM). Berikut ini rangkuman penelitian terkait FGM yang telah dilakukan yang dapat dilihat pada Tabel 2.1 dan 2.2. Pada tabel tersebut, rangkuman penelitian hanya terfokus pada topik stress dan simulasi numerik (FEM) yang dilakuakn pada material FGM.

Tabel 2.1. Ringkasan penelitian tentang *functionally graded materials*

Researcher	Load Case	Type of Specimen	Mode Analisis	Deskripsi
Gu dan Asaro, (1997)	<i>Stress intensity factor</i>	FGM strip dan isotropic	<i>Orthotropy rescaling analytical solution</i>	Mempelajari hubungan antara <i>driving force, energy release rate</i> , ketangguhan material dan arah <i>crack propagation</i>
Reddy, (2000)	<i>Shear deformation</i>	<i>Functionally graded rectangular plate</i>	<i>Third-order shear deformation plate theory</i>	Menganalisis perilaku statis <i>functionally graded rectangular plates</i>
Nakamura, T. <i>et. al.</i> , (2000)	Beban indentasi	<i>Functionally graded rectangular plate</i>	<i>Inverse analysis dan kalman filter technique</i>	Menentukan <i>properties</i> dari <i>graded materials</i> dengan <i>inverse analysis</i> dan <i>instrumented indentation</i>
Cheng dan Batra, (2000)	<i>Three-dimensional thermos-elastic deformations</i>	<i>Functionally graded elliptic</i>	<i>Asymptotic expansion</i>	Menemukan distribusi <i>through-thickness</i> perpindahan dalam bidang dan tegangan geser transversal tidak sesuai dengan teori klasik
Jackson, T.R. <i>et. al.</i> , (2000)		FGM Object	Metode representasi	Studi ini menetapkan pemisahan yang jelas antara desain objek FGM, prosesnya, dan fabrikasinya
Reddy dan Cheng, (2001)	<i>Three-dimensional thermos-elastic deformations</i>	<i>Functionally graded rectangular plate</i>	<i>Asymptotic expansion</i>	Menganalisis <i>thermomechanical deformations simply supported</i> sebagai hasil <i>benchmark</i> untuk menilai teori pelat dua dimensi
Tutuncu dan Oztruk, (2001)	<i>Asymmetric loading</i>	FGM Pressure vessel	<i>Analytical power series</i>	<i>First exact solution radial dan hoop stress FGM pressure vessel</i>
Kim, J.H. dan Paulino, G.H., (2002)	<i>Fracture analysis</i>	FGM	<i>Numerical Techniques</i>	Menginvestigasi efek dari kondisi batas, sifat material dan <i>crack tip mesh generation</i>
Vel dan Batra, (2002, 2003a, 2003b)	<i>steady-state dan quasi-static transient thermos-elastic</i>	<i>Functionally graded thick plate</i>	<i>Power series</i>	Respons <i>steady-state</i> dan <i>transient thermos-elastic</i> dari <i>functionally graded plates</i>
Swaminathan, K. <i>et. al.</i> , (2014)	<i>Static and Dynamic</i>	<i>Functionally graded material</i>	<i>Analytical dan numerical metode</i>	Penelitian ini menyajikan tinjauan komprehensif dari berbagai metode yang digunakan untuk mempelajari perilaku statis, dinamis, dan stabilitas <i>Functionally Graded Material (FGM) plates</i>

Qian dan Batra, (2004)	<i>Steady-state dan quasi-static transient thermos-elastic</i>	<i>Functionally graded thick plate</i>	<i>Metode meshless local Petrov-Galerkin</i>	Respon <i>steady-state dan transient thermos-elastic</i> dari <i>functionally graded plates</i>
Setoodeh, A. R. dan Afrahim, S. (2014)		<i>Functionally Graded Pipe</i>	<i>Euler-Bernoulli model, metode Von Karman dan Galerkin</i>	Menyajikan solusi analitik untuk perilaku getaran nonlinier yang bergantung pada ukuran dari pipa mikro yang mengalirkan cairan yang terbuat dari <i>functionally graded materials</i>
Dağ <i>et. al.</i> , (2004)	<i>Bending dan stress intensity factor</i>	<i>graded orthotropic coating</i>	<i>Analytical dan Finite element method</i>	mempelajari efek gradasi material pada parameter <i>fracture mechanics</i> untuk retakan yang terletak di sepanjang <i>interface</i>
Matsunaga, H., (2008)	<i>Thermo-mechanical load</i>	<i>Plates</i>	<i>(2D) higher-order deformation</i>	Analisis tegangan <i>functionally graded plates</i> yang dikenai beban termal dan mekanis. <i>Composite structures</i>
Tung, H. V., dan Duc, N. D (2010)	<i>Compressive, thermal dan combined loads.</i>	<i>Functionally graded plates</i>	<i>Galerkin procedure</i>	Pendekatan analitis untuk menyelidiki stabilitas <i>functionally graded plates under in-plane compressive, thermal dan combined loads</i>
Alibeigloo, A., (2010)	<i>Thermo-mechanical load</i>	<i>Functionally graded (FG) rectangular plates</i>	<i>Fourier series dan metode state-space</i>	Respon <i>Functionally graded (FG) rectangular plates</i> dengan <i>simply supported edges</i> yang dikenai beban <i>thermo mechanical</i> menggunakan <i>three-dimensional thermoelastic analysis.</i>
Golmakani, M. E. dan Kadkhodayan, M., (2011)	<i>Thermo-mechanical load</i>	<i>Functionally graded plates</i>	<i>(FSDT) dan von Karman equations</i>	Analisis <i>large deflection functionally graded plates</i> dideformasi geser yang dikenai <i>thermomechanical loads</i> dan berbagai kondisi batas
Singha, M. K. <i>et. al.</i> , (2011)	<i>Transverse load</i>	<i>Functionally graded plate</i>	<i>FE procedure dan Newton–Raphson iteration</i>	Perilaku nonlinier <i>functionally graded material (FGM) plates under transverse distributed load</i> yang diinvestigasi menggunakan <i>high precision plate bending finite element</i>
Mechab, I. <i>et. al.</i> , (2013)		<i>Functionally graded plate</i>	<i>Four-variable refined plate theory</i>	Solusi analitik dari analisis statis dan dinamis <i>functionally graded plates</i> menggunakan <i>Four-variable refined plate theory</i>

Fallah, F. dan Nosier, A., (2012)	<i>Asymmetric transverse loading dan konduksi panas</i>	<i>Functionally graded (FG) circular plates</i>	<i>Perturbation technique dan deret Fourier</i>	Perilaku nonlinier <i>functionally graded circular plates</i> dengan berbagai <i>boundary supports under asymmetric thermo-mechanical loading. Composite structures</i>
Abotula, S. et al., (2012)	<i>Thermo-mechanical loading</i>	FGM	<i>Asymptotic analysis</i>	<i>Mixed-mode dynamic crack growth pada functionally graded materials (FGMs) under thermo-mechanical loading</i>
Zhang, D. G., (2013)	<i>Thermal, Bucking and Bending</i>	FGM Plates	<i>physical neutral surf dan high-order shear deformation theory</i>	Pemodelan dan Analisis FGM <i>rectangular plates</i> berdasarkan <i>physical neutral surface and high order shear deformation theory</i>
Salehi, M. et al., (2013)	<i>Rotating bending fatigue</i>	<i>Functionally graded steel (FGS)</i>	<i>Vickers micro-hardness test dan scanning electron microscopy (SEM)</i>	Perilaku fatigue <i>functionally graded steel</i> yang dihasilkan oleh <i>electro-slag re-melting</i> .
Tran, L.V. et al., (2013)	<i>Static, dynamic dan buckling</i>	<i>Rectangular dan circular plate (FGM)</i>	<i>Iso-geometric approach (IGA) dan higher order deformation plate theory (HSDT)</i>	<i>Iso-geometric approach (IGA) dan higher order deformation plate theory (HSDT) untuk mempelajari perilaku functionally graded material (FGM) plates.</i>
Batani, M. et al., (2013)	<i>thermal dan mechanical loading conditions</i>	<i>Functionally graded rectangular plate</i>	<i>Metode multi-term Galerkin dan four-variable refined plate theory</i>	Studi komprehensif tentang stabilitas pelat FGM
Shariyat, M., dan Jafari, R., (2013)	<i>Velocity impact analysis</i>	<i>Functionally graded plates</i>		Meneliti tentang analisis tumbukan kecepatan rendah nonlinier dari <i>two directionally-graded circular plates under radial preloads</i>
Lee, W. H., et al., (2014)	<i>Bending analysis</i>	<i>Functionally graded material (FGM) plates</i>	<i>refined higher order shear dan normal deformation theory</i>	<i>Refined higher order shear dan normal deformation theory</i> untuk E-, P-, dan S-FGM plates pada pondasi elastis Pasternak

Wang, Z. M. dan Liu, Y. Z., (2016)	<i>Transverse vibration</i>	<i>Functionally graded pipes</i>	<i>Hamilton's principle</i>	Berkaitan dengan getaran transversal dari fluida pengangkut pipa yang terbuat dari <i>functionally graded material</i>
Bhardwaj, B. et al., (2015)	<i>Transverse dan moment</i>	<i>Functionally graded material (FGM) plates</i>	<i>extended iso-geometric analysis (XIGA)</i>	Simulasi numerik <i>functionally graded cracked plates</i> menggunakan NURBS berbasis XIGA dengan beban dan kondisi batas yang berbeda
Thai, H. T. dan Kim, S. E., (2015)	<i>Mechanical dan thermal</i>	<i>Functionally graded plates and shells</i>	<i>Theoretical models</i>	Tinjauan teori untuk pemodelan dan analisis <i>functionally graded plates and shells</i>
Pan, H., Song, T. dan Wang, Z., (2015)		<i>Functionally graded material (FGM) plates</i>	<i>Numerical techniques</i>	Menganalisis pengaruh non-homogenitas konstanta dan parameter geometrik pada <i>stress intensity factors (SIFs)</i>
Cheng, Z. et al., (2015)	<i>Mixed-mode loading</i>	<i>Functionally Graded Plate</i>	<i>Peridynamic model</i>	<i>Peri-dynamic model</i> untuk <i>dynamic fracture</i> di <i>functionally graded materials</i>
Sator, L. et al., (2016)	<i>Transversal dynamic loading.</i>	<i>Thick/thin functionally graded plate</i>	<i>Kirchhoff-Love theory 1st dan 3rd order shear deformations plate theories</i>	Analisis transien homogen seperti FGM (<i>functionally graded material</i>) pada pelat tipis atau tebal yang dikenai <i>transversal dynamic loading</i>
Yang, T. et al., (2016)	<i>Thermal environment</i>	<i>functionally graded materials (FGM) plates</i>	<i>Analytical Technique</i>	Investigasi analitis karakteristik getaran dan radiasi suara dari <i>functionally graded materials (FGM) plates</i> yang dikenai <i>thermal environment</i>

Tabel 2.2. Ringkasan penelitian yang menggunakan *finite element analysis*

Researcher	Load Case	Type of Specimen	Mode Analisis	Deskripsi
Yıldırım, et al., (2005)	<i>Mechanical dan transient thermal loads</i>		<i>Finite element method</i>	Membandingkan SIF dari FGM dan lapisan keramik homogen
Banks, S.L. et al., (2005)	<i>Linear elastic fracture</i>	<i>Anisotropic dan monoclinic material</i>	<i>Finite element method</i>	Faktor intensitas tegangan diturunkan untuk berbagai masalah dengan menggunakan metode <i>Displacement Extrapolation, M-Integral dan J-Integral</i>

Afshar, R. <i>et al.</i> , (2011)	<i>Mechanical</i>	<i>Glass-like (viscoelastic) functionally graded cylinder</i>	<i>Finite element method</i>	Menyelidiki perilaku <i>glass-like functionally graded infinite hollow cylinder</i> dengan beban hidrostatik menggunakan <i>finite element method</i>
Hosseini, S. S. <i>et al.</i> , (2013)	<i>Mechanical dan steady state thermal loading</i>	<i>Isotropic dan orthotropic functionally graded materials (FGMs)</i>	<i>Extended finite element method (XFEM)</i>	<i>Thermo-mechanical XFEM crack propagation analysis</i> dari <i>functionally graded materials</i>
Malekzadeh, P. dan Monajjemzadeh, S.M., (2015)	<i>Thermal loading</i>	<i>Functionally graded plate</i>	FEM dengan skema <i>Newmark's time integration</i>	Menyelidiki respons dinamis <i>functionally graded (FG) plates</i> di <i>thermal environment under a moving load</i>
Malekzadeh, P. dan Shojaei, S. A., (2013)	<i>Thermal loading</i>	<i>Functionally graded plate</i>	<i>Three-dimensional (FEM)</i>	Menyelidiki respons dinamis <i>functionally graded (FG) plates under a moving heat source</i>
Jung, W. Y. dan Han, S. C., (2014)	<i>Vibration analysis</i>	<i>FGM dan laminated composite structures</i>	FEM, berdasarkan teroi <i>first order shear deformation</i>	Transient analisis FGM dan <i>laminated composite structures</i> menggunakan <i>refined 8-node ANS shell element</i>
Asemi <i>et al.</i> (2013).	<i>Three dimensional static analyses</i>	<i>Functionally graded plate</i>	<i>Finite element method</i>	Mempelajari efek dari <i>power law exponents</i> pada perilaku statis <i>fully clamped 2D-FGM plate</i>
Valizadeh, N. <i>et al.</i> , (2013)	<i>Static bending, linear free flexural vibration dan supersonic flutter</i>	<i>Functionally graded material (FGM) plates</i>	Berbasis <i>iso-geometric FEM</i>	Analisis <i>finite element</i> berbasis NURBS dari <i>functionally graded plates: static bending, vibration, buckling and flutter</i>
Uysal, M. (2013)	<i>Mechanical dan thermal loads</i>	<i>Metal-ceramics FGM Plates</i>	FEA Abaqus	Analisis pelat datar FGM <i>flat plates and shell panels</i> , dan aplikasinya untuk <i>r structural problems</i>
Bhattacharya, S. <i>et al.</i> , (2013)	<i>Cyclic Thermal Loading</i>	<i>Functionally graded plates</i>	XFEM	Umur kelelahan <i>aluminum alloy</i> , FGM dan <i>equivalent composite plates</i> menggunakan Paris Law dengan adanya diskontinuitas ganda, dan dibandingkan satu sama lain

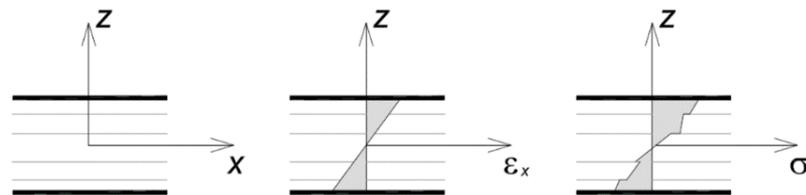
Nguyen-Xuan, H. et. al., (2014)	<i>Static, free vibration dan buckling analysis</i>	<i>Functionally graded plates</i>	(IGA) dengan <i>refined plate theory</i> (RPT)	<i>Iso-geometric finite element analysis (IGA) dengan refined plate theory (RPT) untuk analisis statik, free vibration dan buckling analysis dari functionally graded material (FGM) plates</i>
------------------------------------	---	---	---	---

2.3. Functionally Graded Material (FGM)

Sifat-sifat yang unggul dari material *advance composite*, seperti *high strength* dan *high stiffness*, telah menyebabkan penggunaannya secara luas dengan *high performance* pada pesawat terbang, pesawat ruang angkasa, suku cadang mobil, dan struktur ruang angkasa. Dalam struktur *laminated composite material* secara konvensional, *homogeneous elastic laminae* di *bounding* bersamaan untuk mendapatkan sifat mekanik yang ditingkatkan. Komponen dari bahan komposit dapat dipilih dan digabungkan sehingga menghasilkan bahan yang berguna yang memiliki sifat yang diinginkan, seperti kekuatan, kekakuan, ketahanan korosi, *fatigue life* yang lebih baik, bobot yang rendah, tahan akan panas, dan lain-lain. Komponen anisotropik struktur komposit *laminated* sering menghasilkan konsentrasi tegangan di dekat *discontinuities* material dan geometri (Elishakoff et al., 2015) seperti pada Gambar 2.2 yang dapat menyebabkan kerusakan dalam bentuk delaminasi, retak matriks, dan pemisahan *adhesive bond*.

Functionally graded material (FGM) adalah material komposit yang memiliki variasi sifat material yang kontinu dari satu permukaan ke permukaan lainnya dan dengan demikian mengurangi konsentrasi tegangan yang ditemukan pada komposit *laminated*. Gradasi dalam sifat material mengurangi *thermal*

stress, residual stress dan *stress intensity factor*. Variasi *gradual* menghasilkan bahan yang sangat efisien yang disesuaikan dengan kebutuhan struktur, oleh karena itu disebut FGM (Elishakoff *et al.*, 2015).



Gambar 2.2. Tegangan dan regangan pada plat laminated

FGM biasanya dibuat dari komponen isotropik seperti logam dan keramik, karena material tersebut digunakan juga sebagai struktur hambatan termal pada kondisi lingkungan dengan gradien termal yang ekstrim (misalnya perangkat termoelektrik untuk konversi energi, industri semikonduktor). Dalam aplikasi seperti itu, keramik memberikan ketahanan panas dan korosi; sementara itu logam memberikan kekuatan dan ketangguhan (Elishakoff *et al.*, 2015).

2.4. Metode Fabrikasi FGM

Perpaduan dalam FGM telah berhasil didemonstrasikan melalui berbagai metode, termasuk *thermal spray*, metalurgi serbuk, *physical and chemical vapor deposition*, *self-propagating high-temperature synthesis* (SHS) atau *combustion synthesis*. Metode *high-temperature synthesis* sangat cocok untuk fabrikasi FGM, karena kecepatan reaksi pembakaran. Metode ini terdiri dari reaksi sintesis pembakaran secara simultan dan pepadatan bubuk bahan yang murni di bawah tekanan hidrostatik untuk membuat FGM padat dalam proses tunggal (Zhang *et al.*, 2000). Struktur FGM juga dapat dibuat dengan teknik pengecoran sentrifugal

berkecepatan tinggi di mana lapisan terbentuk dalam arah radial karena densitas massa konstituen yang berbeda. Gaya sentrifugal memungkinkan bubuk keramik dalam logam untuk menciptakan distribusi gradien FGM keramik/logam (Fukui, 1991).

Dalam proses fabrikasi lainnya, campuran komponen FGM disemprotkan dengan menggunakan *plasma torches* ke permukaan material untuk menumpuk material bergradasi dan setelahnya dilakukan perlakuan panas pada FGM. Teknik untuk mempersiapkan model FGM menggunakan *polyester resin* dan *cenosphere* juga telah digunakan. Distribusi *cenosphere* yang tidak homogen dalam matriks *polyester* dicapai dengan menggunakan proses pengecoran dengan bantuan proses *buoyancy-assisted casting*. *Cenospheres*, diperoleh dari abu terbang pembangkit tenaga *thermal* dan *hollow spheres* terbuat dari *aluminum silicates* (Parameswaran dan Shukla, 2000).

2.5. Plane-stress dan Plane-strain

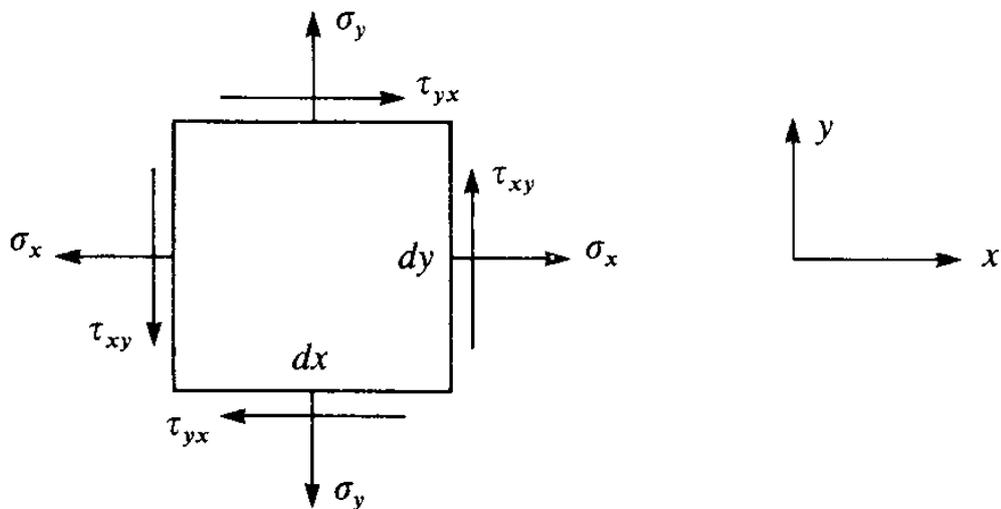
Plane-stress didefinisikan sebagai keadaan tegangan di mana tegangan normal dan tegangan geser yang diarahkan tegak lurus bidang dianggap nol (Logan, 2016). Umumnya, komponen struktur yang tipis (memiliki dimensi z yang kecil dibandingkan dengan dimensi dalam bidang x dan y) dan hanya beban yang bekerja pada bidang $x - y$ dapat dianggap mengalami *plane-stress*.

Plane-strain didefinisikan sebagai keadaan regangan di mana regangan normal terhadap bidang $x - y$, ε_z dan regangan geser γ_{xz} dan γ_{yz} diasumsikan nol (Logan, 2016). Asumsi *plane-strain* ialah realistis untuk *long bodies* (misalnya,

dalam arah z) dengan luas penampang konstan yang dikenai beban yang bekerja hanya dalam arah x dan/atau y dan tidak berubah dalam arah z

2.5.1. Two-dimensional Plane-stress dan Plane strain

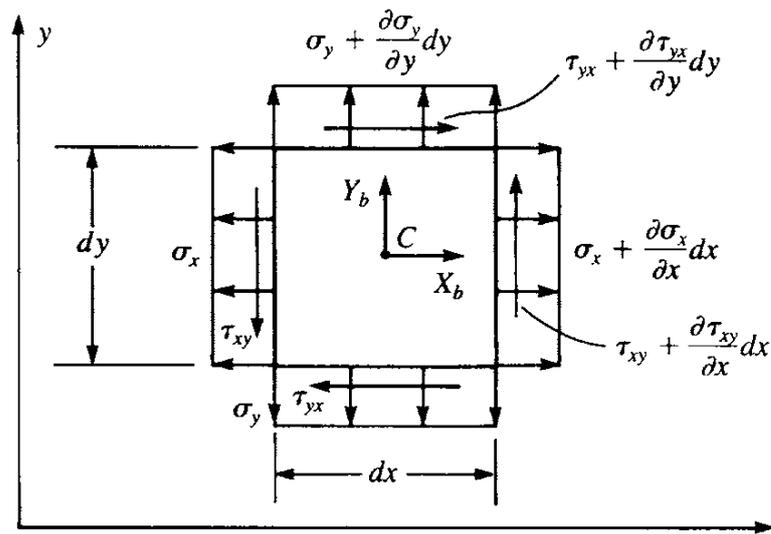
Konsep keadaan tegangan dan regangan dua dimensi dan hubungan tegangan/regangan untuk *plane-stress* dan *plane-strain* diperlukan untuk memahami sepenuhnya pengembangan dan penerapan matriks kekakuan untuk *triangular element plane-stress/plane-strain*.



Gambar 2.3. Keadaan *stress* dua dimensi

Ilustrasi keadaan *stress* dua dimensi dapat dilihat pada Gambar 2.3. Pada gambar tersebut sebuah elemen luas yang kecil dengan sisi dx dan dy masing-masing memiliki tegangan normal σ_x dan σ_y yang bekerja dalam arah x dan y (di dalam gambar arah vertikal dan horizontal). Tegangan geser τ_{xy} bekerja pada tepi x (permukaan vertikal) dalam arah y . Tegangan geser τ_{yx} bekerja pada tepi y (permukaan horizontal) dalam arah x .

Untuk penyederhanaan, tinjau keseimbangan elemen diferensial bidang terdeformasi yang dikenai tegangan normal σ_x dan σ_y , tegangan geser τ_{xy} dalam bidang (dalam satuan gaya per satuan luas), dan gaya benda X_b dan Y_b (dalam satuan gaya per satuan volume), seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.4.



Gambar 2.4. Plane differential element yang mengalami tegangan

Tegangan diasumsikan konstan karena bekerja pada lebar setiap permukaan. Namun, tegangan diasumsikan bervariasi dari satu permukaan ke permukaan lainnya. Sebagai contoh, benda memiliki σ_x yang bekerja pada permukaan vertikal kiri, sedangkan $\sigma_x + (\partial \sigma_x / \partial x) dx$ bekerja pada permukaan vertikal kanan karena diasumsikan ada perubahan yang kecil dalam tegangan dari tepi kiri elemen ke tepi kanan. Elemen diasumsikan memiliki tebal satuan, dan selanjutnya penjumlahan gaya yang berada pada arah x .

$$\sum F_x = \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy - \sigma_x dy + X_b dx dy + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - \tau_{yx} dx = 0 \quad (1)$$

Persamaan (1) dapat disederhanakan menjadi:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X_b = 0 \quad (2)$$

Hal yang sama dilakukan pada arah y sehingga didapatkan:

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y_b = 0 \quad (3)$$

Karena yang ditinjau hanya elemen planar, tiga persamaan kesetimbangan harus dipenuhi. Persamaan ketiga adalah kesetimbangan momen terhadap sumbu yang normal terhadap bidang x dan y yaitu dengan mengambil momen terhadap titik C seperti pada Gambar 2.3 seperti persamaan (4) berikut ini:

$$\sum M_z = \tau_{xy} dy \frac{dx}{2} + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) \frac{dx}{2} - \tau_{yx} dx \frac{dy}{2} - \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) \frac{dy}{2} = 0 \quad (4)$$

Persamaan (4) disederhanakan dengan mengabaikan terminologi orde tinggi, sehingga $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Oleh karena itu, ada tiga tegangan independen yang diwakili oleh matriks kolom vektor seperti berikut ini:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

Tegangan yang diberikan oleh persamaan (5) akan berbentuk *nodal displacement* derajat kebebasan. Oleh karena itu, setelah *nodal displacement* didapatkan, tegangan-tegangan dapat dihitung secara langsung.

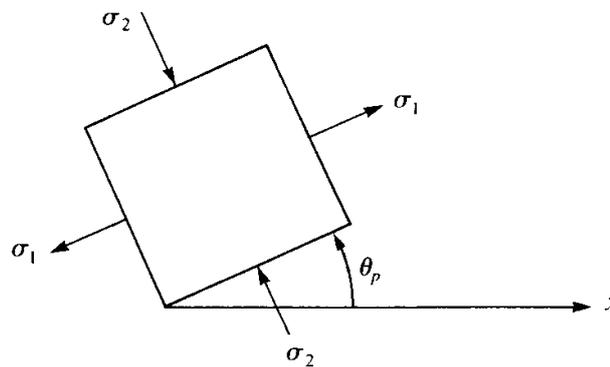
Dari *principal stresses* bahwa tegangan utama, yang merupakan tegangan normal maksimum dan minimum pada bidang dua dimensi, dapat diperoleh dari persamaan berikut:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\max} \quad (6)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{\min} \quad (7)$$

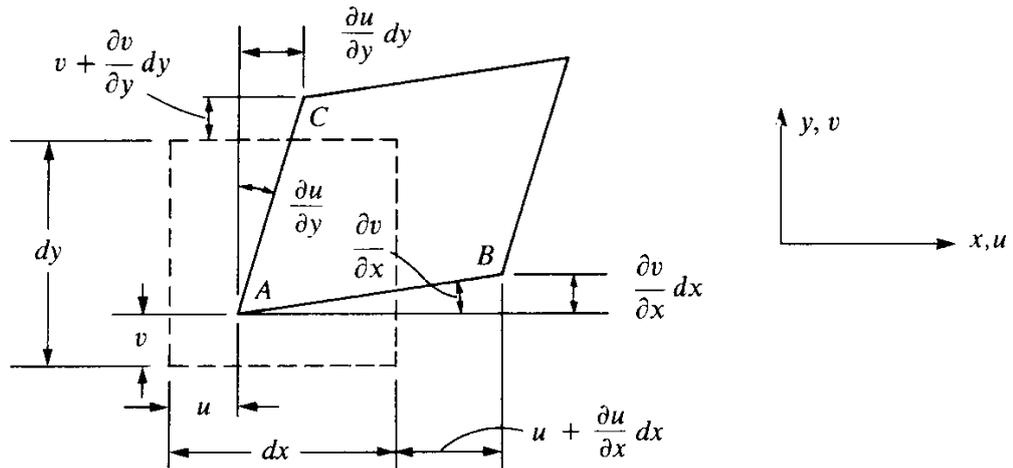
Sedangkan dari *principal angle* θ_p , yang mendefinisikan sudut normal yang arahnya tegak lurus terhadap bidang di mana tegangan utama maksimum atau minimum bekerja seperti berikut ini:

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (8)$$



Gambar 2.5. *Principal stress*

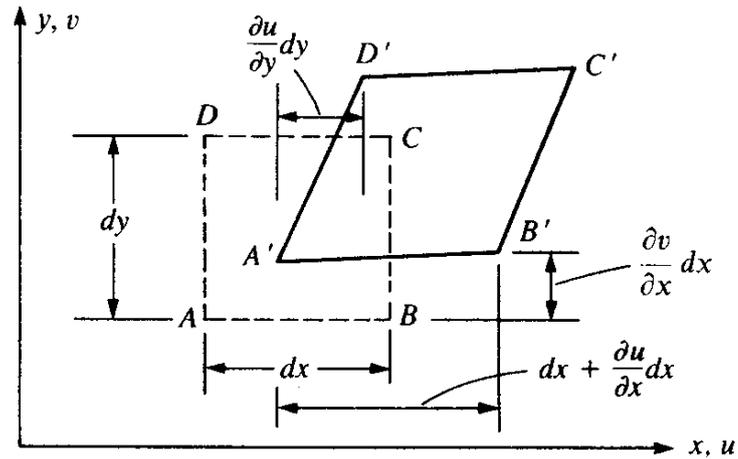
Gambar 2.5 menunjukkan principal stress σ_1 dan σ_2 dan sudut θ_p , dan bahwa tegangan geser adalah nol pada bidang yang memiliki *principal stress* (maksimum dan minimum).



Gambar 2.6. Bentuk *displacement* dan *rotation* sebuah *element* pada bidang $x - y$

Gambar 2.6 menunjukkan elemen yang sangat kecil digunakan untuk mewakili keadaan regangan dua dimensi secara umum di beberapa titik dalam suatu struktur. Elemen tersebut menunjukkan vektor perpindahan u dan v dalam arah x dan y di titik A , untuk menggantikan atau memperpanjang masing-masing nilai $\partial u/\partial x$ di sepanjang garis AB , dan $\partial v/\partial y$ di sepanjang garis AC dalam arah x dan y . Selanjutnya, dengan mengamati garis AB dan AC , dapat dilihat bahwa titik B bergerak ke atas sebesar $(\partial v/\partial x)dx$ terhadap A , dan titik C bergerak ke kanan sebesar $(\partial u/\partial y)dy$ terhadap A yang dapat terlihat pada Gambar 2.6.

Setelah diperoleh hubungan regangan/perpindahan atau hubungan diferensial kinematik untuk kasus dua dimensi, Gambar 2.6 menunjukkan elemen diferensial (kecil) di mana keadaan tidak terdeformasi diwakili oleh garis putus-putus dan bentuk terdeformasi (setelah terjadi regangan) diwakili oleh garis solid.



Gambar 2.7. *Differential element* sebelum dan sesudah terdeformasi

Garis AB dalam arah berubah menjadi $A'B'$ setelah terdeformasi, di mana u dan v mewakili perpindahan dalam arah x dan y . Diasumsikan u dan v adalah kontinu, fungsi bernilai tunggal dari x dan y yang kecil dibandingkan dengan dimensi benda. Dengan definisi regangan rekayasa regangan normal (yaitu, perubahan panjang dibagi dengan panjang asli garis) didapatkan:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (9)$$

dimana

$$AB = dx \quad (10)$$

dan

$$(A'B')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 \quad (11)$$

Dengan menggunakan teorema binomial dan mengabaikan terminologi berorde tinggi $(\partial u / \partial x)^2$ dan $(\partial v / \partial x)^2$ (agar konsisten dengan asumsi regangan kecil) didapatkan:

$$A'B' = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad (12)$$

Dengan menggunakan persamaan (10) dan (12) pada persamaan (9), didapatkan:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (13)$$

Demikian pula, dengan garis AD dalam arah y , didapatkan:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (14)$$

Regangan geser γ_{xy} didefinisikan sebagai perubahan sudut antara dua garis, yang semula membentuk sudut siku-siku. Oleh karena itu, dari Gambar 2.7, dapat dilihat bahwa γ_{xy} adalah jumlah dari dua sudut yang diberikan oleh:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (15)$$

ε_x dan ε_y adalah perubahan panjang per satuan panjang (regangan) ketika mengalami deformasi yang awalnya masing-masing sejajar dengan sumbu x dan y . Regangan tersebut biasa disebut normal (longitudinal) *strain*. Regangan γ_{xy} adalah perubahan sudut siku-siku yang dibuat antara dx dan dy ketika elemen mengalami deformasi. Regangan γ_{xy} disebut regangan geser. Regangan yang didapatkan dari persamaan (13) – (15) umumnya diwakili oleh vektor matriks kolom seperti berikut ini:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Untuk hubungan stress-strain material isotropik pada keduanya (*plane-strees, plane-strain*), pada *plane-stress* diasumsikan tegangan-tegangan berikut adalah nol

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (17)$$

Dari persamaan (17) regangan geser $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ tetapi regangan $\varepsilon_z \neq 0$, sehingga untuk kondisi *plane-stress* didapatkan:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (18)$$

dimana

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$[D]$ pada persamaan (19) disebut matriks *stress/strain (constitutive matrix)*, E adalah modulus elastisitas, dan ν adalah *poisson's ratio*. $\{\sigma\}$ dan $\{\varepsilon\}$ didefinisikan dari persamaan (5) dan (16). Untuk *plane-strain*, diasumsikan regangan – regangan berikut adalah nol:

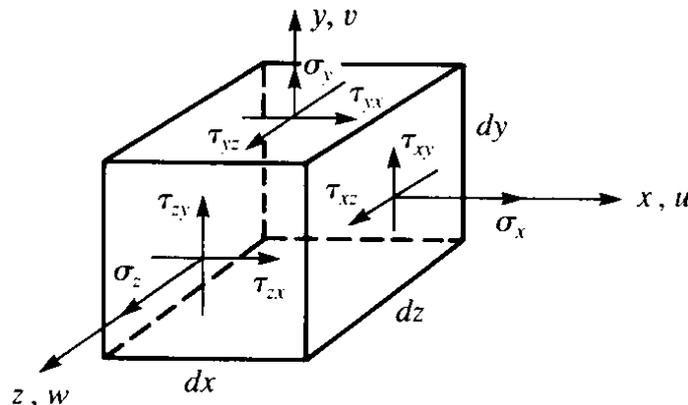
$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (20)$$

Dari persamaan (20) tegangan geser $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ tetapi tegangan $\sigma_z \neq 0$, sehingga untuk kondisi *plane-strain constitutive matrix* nya adalah sebagai berikut:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.5.2. Three-dimensional Stress Analysis

Pada *three-dimensional* digunakan elemen tiga dimensi yang sangat kecil dalam koordinat *cartesian* dengan dimensi dx , dy , dz , tegangan normal dan geser seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.8. Elemen ini mewakili keadaan tegangan pada tiga bidang yang saling tegak lurus dari benda dalam keadaan *three-dimensional stress*. Seperti pada umumnya, tegangan normal tegak lurus terhadap permukaan elemen diwakili oleh σ_x , σ_y , dan σ_z . Tegangan geser bekerja di permukaan (bidang) elemen dan diwakili oleh τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , dan seterusnya yang mengikuti keseimbangan pada persamaan (4).



Gambar 2.8. Elemen *three-dimensional*

Oleh karena itu, hanya ada tiga tegangan geser independen, bersama dengan tiga tegangan normal. Untuk hubungan regangan dan perpindahannya sebagai berikut:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (22)$$

di mana u , v , dan w adalah perpindahan pada arah x , y , dan z . Regangan geser γ pada three-dimensional seperti berikut ini:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{yx} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{zy} \\ \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz} \end{aligned} \quad (23)$$

seperti halnya tegangan geser, hanya ada tiga regangan geser independen seperti persamaan (23). Pada *three-dimensional* tegangan dan regangan ditulis dengan matriks kolom sebagai berikut:

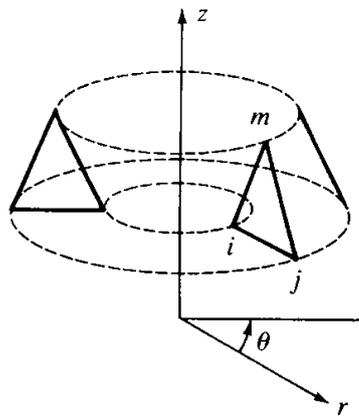
$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} \quad (24)$$

Hubungan tegangan / regangan untuk bahan isotropik sama seperti pada persamaan (18), namun *constitutive matriks* nya pada *three-dimensional* ini adalah sebagai berikut:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

2.6. Axisymmetric

Elemen *axisymmetric* adalah triangular tori sedemikian rupa sehingga setiap elemen simetris secara geometri dan pembebanan terhadap sumbu seperti sumbu z pada Gambar 2.9. Oleh karena itu, sumbu z disebut sumbu simetri atau sumbu revolusi. Setiap penampang vertikal elemen adalah *plane triangle* (Logan, 2016). Titik nodal dari elemen segitiga *axisymmetric* menggambarkan garis melingkar, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.9.

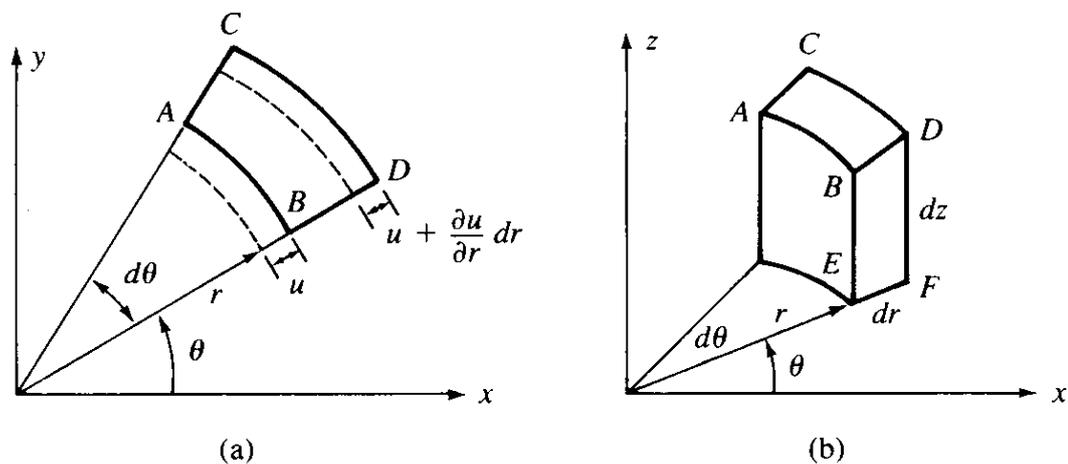


Gambar 2.9. *Axisymmetric* elemen ijm

Gambar 2.9 menunjukkan geometri *axisymmetric* yang memiliki garis sumbu z . Oleh karena itu, sumbu z disebut sumbu simetri atau sumbu revolusi. Setiap

penampang vertikal elemen adalah bidang. Titik nodal dari elemen *axisymmetric triangular* menggambarkan garis melingkar, seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2.9. Untuk *plane-stress*, tegangan hanya ada pada bidang $x-z$. Dalam masalah *axisymmetric*, perpindahan *radial* mengakibatkan regangan *circumferential* yang menyebabkan tegangan, di mana σ_r , σ_θ , dan σ_z masing-masing menunjukkan arah *radial*, *circumferential*, dan *longitudinal*. Elemen torus segitiga sering digunakan untuk mengidealkan sistem *axisymmetric* karena dapat digunakan untuk mensimulasikan permukaan yang kompleks dan mudah digunakan. Misalnya, masalah *axisymmetric* dari *semi-infinite half-space* yang dibebani oleh area *circular*.

Karena geometri yang simetri, sifat material, kondisi batas, dan beban terhadap sumbu z , tegangan yang terjadi tidak bergantung pada koordinat θ . Oleh karena itu, semua turunan terhadap θ menghilang (tidak digunakan) seperti, komponen perpindahan v (bersinggungan dengan arah θ), regangan geser $\gamma_{r\theta}$ dan $\gamma_{\theta z}$, dan tegangan geser $\tau_{r\theta}$ dan $\tau_{\theta z}$ semuanya nol.



Gambar 2.10. (a) *cross-section axisymmetric* (b) *elemen axisymmetric*

Gambar 2.10 menunjukkan elemen cincin *axisymmetric* dan penampangnya yang mewakili keadaan umum regangan untuk permasalahan *axisymmetri*. *Displacement* elemen *ABCD* pada bidang melintang dalam koordinat silinder dinyatakan dengan u dan w masing-masing menunjukkan perpindahan dalam arah *radial* dan *longitudinal*. Perpindahan sisi *AB* dari elemen dinyatakan sebesar u , dan sisi *CD* dinyatakan sebesar $u + (\partial u / \partial r) dr$ dalam arah *radial*. Untuk regangan normal dalam arah *radial* dinyatakan sebagai berikut:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (26)$$

Secara umum, regangan dalam arah tangensial bergantung pada perpindahan tangensial v dan perpindahan *radial* u . Namun, untuk perilaku deformasi *axisymmetric*, perpindahan tangensial v sama dengan nol. Oleh karena itu, regangan tangensial hanya disebabkan oleh perpindahan *radial*. Karena hanya memiliki perpindahan *radial* u , panjang *AB* yang baru adalah $(r+u)d\theta$, dan regangan tangensial adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)d\theta + rd\theta}{rd\theta} = \frac{u}{r} \quad (27)$$

Sehingga, pada kondisi *axisymmetric* persamaan *compatibility* ditulis sebagai berikut ini:

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_\theta r) - \varepsilon_r = 0 \quad (28)$$

Hubungan tegangan / regangan untuk bahan isotropik sama seperti pada persamaan (18), sehingga untuk *axisymmetric* jika dijabarkan seperti berikut :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

2.7. Radial dan Hoop Stress Cylindrical

Untuk menyatakan persamaan *radial* dan *hoop stress* dengan sifat material homogen dan memiliki kondisi batas yang seragam (*axisymmetric*) dapat menggunakan turunan rumus persamaan *constitutive* dari kondisi *axisymmetric* (Vullo, 2014). Jika tidak ada beban termal ($T = const$) dan diasumsikan benda silinder berdinding tebal yang memiliki panjang tak berhingga ke arah sumbunya dan hanya dikenai gaya permukaan yang bekerja pada jari-jari dalam dan luar, persamaan (31) dapat berubah menjadi seperti berikut ini:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Sebagai hasil dari *axisymmetric*, perpindahan tangensial v dalam arah garis singgung *circumferential radius* r adalah nol. Dengan demikian, regangan geser $\gamma_{r\theta}$ dan tegangan geser $\tau_{r\theta}$ juga nol. Dalam kondisi ini, penyelesaian persamaan (32) untuk tegangan σ memberikan dua hubungan berikut:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) \quad (33)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) \quad (34)$$

Hubungan ini menyatakan tegangan normal σ_r dan σ_θ sebagai fungsi dari regangan normal ε_r dan ε_θ (atau perpindahan *radial* u), serta besaran elastis bahan (modulus elastisitas dalam tegangan E , dan *poisson's ratio* ν). Dengan menyelesaikan permasalahan (32) untuk ε_r dan ε_θ , turunan ε_θ terhadap r menghasilkan persamaan kompatibilitas sebagai berikut:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1+\nu) + r\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r\frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad (35)$$

Persamaan ini berlaku dengan asumsi bahwa besaran elastis E dan ν tidak tergantung pada r dengan demikian konstan di seluruh silinder. Persamaan kompatibilitas yang lebih umum dapat dilihat seperti berikut:

$$(\sigma_\theta - \sigma_r)(1+\nu) + r\frac{d\sigma_\theta}{dr} - \nu r\frac{d\sigma_r}{dr} + Er\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{E}\right) - Er\sigma_r\frac{d}{dr}\left(\frac{\nu}{E}\right) = 0 \quad (36)$$

Dari persamaan keseimbangan (28) dan kompatibilitas (35), yang merupakan persamaan diferensial orde pertama pada dua variabel yang tidak diketahui σ_r dan σ_θ , dapat diperoleh persamaan diferensial orde kedua pada satu variabel yang tidak diketahui. Ada dua alternatif dalam memilih variabel yang tidak diketahui, yang pertama adalah menyatakan tegangan sebagai fungsi perpindahan radial u melalui persamaan kompatibilitas, dan kemudian memasukkan ke dalam persamaan

kesetimbangan, sedangkan alternatif kedua adalah dengan mendapatkan σ_θ sebagai fungsi σ_r dari persamaan kesetimbangan dan kemudian masukkan ke dalam persamaan kompatibilitas. Kedua pendekatan tersebut setara dan mengarah pada penyelesaian persamaan yang sangat mirip. Pendekatan pertama akan ditulis seperti di bawah ini, dengan asumsi bahwa besaran elastis E dan ν adalah konstan (tidak tergantung pada variabel r).

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{du}{dr} - \frac{\nu u}{r^2} \right) \quad (37)$$

Dengan mengembangkan persamaan. (28) dan hubungannya dengan persamaan (33) dan (34) yang ditulis dalam suku u di dalamnya bersama dengan persamaan (37) menghasilkan persamaan diferensial homogen orde dua seperti berikut dalam hal perpindahan $u = u(r)$:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0 \quad (38)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (38) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ur) \right] = 0 \quad (39)$$

Hubungan pada persamaan (38) dan bentuk kompaknya pada persamaan (39) adalah persamaan diferensial yang mengatur medan perpindahan dalam benda silinder yang diperpanjang secara tak terbatas ke arah sumbunya dan dikenai tekanan P_i dan P_o yang masing-masing bekerja pada jari-jari dalam dan luar.

Dengan mengintegalkan persamaan (39) dua kali dan menetapkan dua konstanta integrasi sebagai C_1 dan C_2 memberikan hubungan seperti berikut yang menyatakan perpindahan radial u sebagai fungsi jari-jari r :

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (40)$$

Dengan menggunakan persamaan (40) dan hubungan geometris pada persamaan (26) dan (27) menjadi:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \quad (41)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (42)$$

Dengan substitusi hubungan ini pada persamaan. (33) dan (34) yang ditulis dalam terminologi u diperoleh persamaan berikut untuk tegangan σ_r dan σ_θ sebagai fungsi jari-jari r :

$$\sigma_r = \frac{EC_1}{(1-\nu)} - \frac{EC_2}{r^2(1+\nu)} \quad (43)$$

$$\sigma_\theta = \frac{EC_1}{(1-\nu)} + \frac{EC_2}{r^2(1+\nu)} \quad (44)$$

Dengan menggabungkan konstanta, sehingga didapatkan:

$$A = \frac{EC_1}{(1-\nu)} \quad \text{dan} \quad B = \frac{EC_2}{(1+\nu)} \quad (45)$$

Dari persamaan (43) dan (44) diperoleh hubungan berikut yang menyatakan tegangan normal sebagai fungsi dari r , tetapi dalam bentuk yang lebih kompak:

$$\sigma_r = A - \frac{B}{r^2} \quad (46)$$

$$\sigma_\theta = A + \frac{B}{r^2} \quad (47)$$

Persamaan (46) dan (47) secara umum dikenal dengan persamaan Lamé's, hubungan ini menunjukkan bahwa tegangan normal σ_r dan σ_θ bervariasi secara hiperbola kubik sepanjang ketebalan dinding silinder. Hubungan ini juga dapat disimpulkan dengan mempertimbangkan persamaan keseimbangan (28) dan relasi ketiga dari generalisasi hukum Hooke. Dengan asumsi ($\sigma_z = 0$) yang diperoleh untuk silinder dengan ujung terbuka, jika tidak ada regangan *longitudinal* ε_z dan harus memiliki ($\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const}$), dan konstanta ini dapat diganti dengan $2A$, sehingga ($\sigma_r + \sigma_\theta = 2A$). Dari Persamaan (28) dapat diperoleh:

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = 2(A - \sigma_r) \quad (48)$$

dan dengan demikian,

$$\frac{d(A - \sigma_r)}{(A - \sigma_r)} = -2 \frac{dr}{r} \quad (49)$$

Dengan mengintegrasikan persamaan (49) dan menetapkan konstanta integrasi sebagai B , diperoleh:

$$\ln(A - \sigma_r) = -2 \ln r + \ln B \quad (50)$$

Akibatnya, berpindahanya dari logaritma ke fungsi, maka diperoleh:

$$(A - \sigma_r) = \frac{B}{r^2} \quad (51)$$

A dan B adalah konstanta integrasi yang dihitung dengan menerapkan kondisi batas. Dengan demikian, jika benda silinder dikenai tekanan P_i dan P_o , pada permukaan luar dan dalam, dapat diperhatikan bahwa tegangan dianggap positif jika tarik dan negatif jika tekan sehingga dituliskan sebagai berikut:

$$\sigma_{r,r=r_i} = -P_i \quad \text{dan} \quad \sigma_{r,r=r_o} = -P_o \quad (52)$$

Persamaan (52) dapat berubah menyesuaikan dengan persamaan (46) dan (47), sehingga menjadi:

$$-P_i = A - \frac{B}{r_i^2} \quad (53)$$

$$-P_o = A + \frac{B}{r_o^2} \quad (54)$$

Untuk A dan B , dapat diperoleh dari dua konstanta integrasi, sebagai fungsi dari tekanan dan jari-jari dalam dan luar, yaitu:

$$A = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad \text{dan} \quad B = \frac{(P_i - P_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (55)$$

Sehingga persamaan untuk radial dan hoop stress pada cylinder homogen adalah sebagai berikut:

$$\sigma_r = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} - \frac{(P_i - P_o) r_i^2 r_o^2}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \quad (56)$$

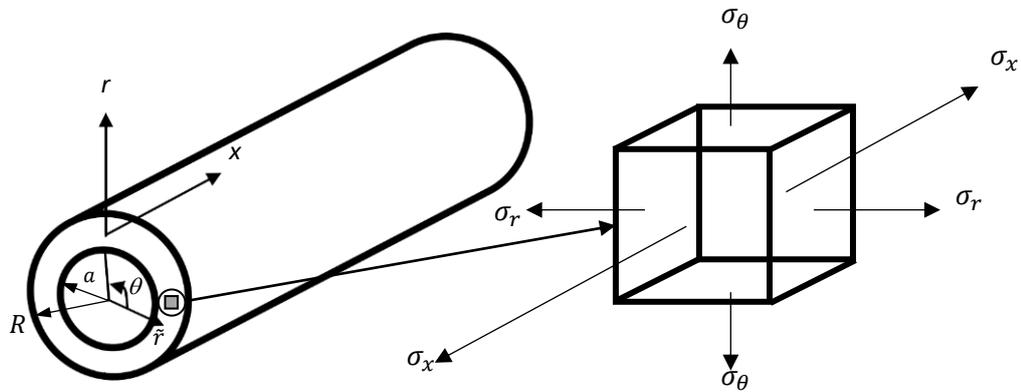
$$\sigma_{\theta} = \frac{P_i r_i^2 - P_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} + \frac{(P_i - P_o) r_i^2 r_o^2}{r^2 (r_o^2 - r_i^2)} \quad (57)$$

2.8. Radial dan Hoop Stress Pada FGM

Perhitungan radial dan hoop stress pada FGM menggunakan koordinat *cylindrical* seperti pada Gambar 2.12 dengan koordinat radial \tilde{r} dan koordinat displacement \tilde{u} . R adalah jari-jari terluar silinder sehingga didapatkan nilai vektor koordinatnya sebagai berikut:

$$r = \tilde{r}/R \quad (58)$$

$$u = \tilde{u}/R \quad (59)$$



Gambar 2.12. Koordinat dan *stress* pada *cylindrical*

Radial dan *hoop stress* pada FGM menggunakan asumsi *plane-strain* sehingga persamaan keseimbangan *stress*-nya adalah sebagai berikut:

$$\varepsilon_{\theta} = \varepsilon_{\phi} = \frac{u}{r} \quad (60)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (61)$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\phi} = \gamma_{\theta\phi} = 0 \quad (62)$$

Untuk menentukan stress yang ada pada FGM pada persamaan ini, diasumsikan jenis material yang digunakan adalah *isotropic* dengan nilai *poisson's ratio* yang konstan dan nilai modulus Young yang bervariasi secara *radial* dengan menggunakan fungsi pangkat (Tutuncu dan Oztruk, 2001). Adapun persamaanya sebagai berikut:

$$E_{(r)} = E_o r^\beta \quad (63)$$

Dimana E_o adalah nilai modulus Young pada permukaan terluar ($r = 1$), dan β adalah konstanta gradien ketidakhomogenan. Dengan mengikuti kondisi keseimbangan pada *plane-strain*, didapatkan persamaan *constitutive* sebagai berikut :

$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta \quad (64)$$

$$\sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{11}\varepsilon_\theta + C_{12}\varepsilon_\phi \quad (65)$$

Dimana,

$$C_{11} = c_{11}r^\beta = \left(\frac{E_o(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) r^\beta \quad (66)$$

$$C_{12} = c_{12}r^\beta = \left(\frac{E_o\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right) r^\beta \quad (67)$$

Persamaan keseimbangan non trivial adalah sebagai berikut:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (68)$$

Dari persamaan (58) – (67), persamaan (68) berubah menjadi seperti berikut:

$$r^2 u'' + (\beta + 1) r u' + (\nu^* \beta - 1) u = 0 \quad (69)$$

Nilai v^* adalah nilai *Poisson's ratio* dalam bentuk penyederhanaan dalam persamaan (69), dimana $v^* = v / (1 - v)$. Persamaan (69) dapat diselesaikan dengan persamaan *Cauchy-Euler* orde ke-2, dengan asumsi solusi sebagai berikut:

$$u = r^m \quad (70)$$

$$\frac{du}{dr} = mr^{m-1} \quad (71)$$

$$\frac{d^2u}{dr^2} = m(m-1)r^{m-2} \quad (72)$$

Dari persamaan (69) – (72), didapatkan persamaan karakteristiknya sebagai berikut:

$$m^2 + \beta m + (v^* \beta - 1) = 0 \quad (73)$$

dan akar-akarnya adalah sebagai berikut:

$$m_1 = \frac{1}{2} \left(-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4(v^* \beta - 1)} \right) \quad (74)$$

$$m_2 = \frac{1}{2} \left(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4(v^* \beta - 1)} \right) \quad (75)$$

Persamaan (73) merupakan persamaan karakteristik, dimana untuk menyelesaikan variabel m , ada tiga kasus khusus yang sesuai dengan formula *Euler-Cauchy*.

Kasus-kasus tersebut yaitu:

1. Akar *real* dan berbeda. Kondisi ini terjadi jika didapatkan nilai m *real* yang berbeda ($m_1 \neq m_2$), sehingga solusinya adalah sebagai berikut:

$$u = Ar^{m_1} + Br^{m_2} \quad (76)$$

2. Akar ganda. Kondisi ini terjadi jika didapatkan nilai m *real* yang sama ($m_1 = m_2 = m$), sehingga untuk akar ganda solusinya adalah sebagai berikut:

$$u = (A + B \ln r) r^m \quad (77)$$

3. Akar kompleks. Kondisi ini terjadi jika didapatkan nilai m bentuk imajiner ($m_1 = x + yi$, $m_2 = x - yi$), sehingga untuk akar kompleks solusinya adalah sebagai berikut:

$$u = (A \cos(y \ln r) + B \sin(y \ln r)) r^x \quad (78)$$

Sebagian besar material memiliki sifat ν yang memenuhi $0 < \nu < 0,5$. Karena $0 < \nu^* < 1$, nilai ν^* memenuhi $0 < \nu^* < 1$ dan $0 < \nu^{*2} < 1$. Sehingga nilai dalam akar kuadrat pada persamaan (74) dan (75) adalah sebagai berikut:

$$\Delta = \beta^2 - 4(\nu^* \beta - 1) = (\beta^2 - 2\nu^*)^2 + 4(1 - \nu^{*2}) > 0 \quad (79)$$

Karena hasil dari persamaan (79) tersebut, akar-akar yang didapatkan dari formula *Euler-Chaucy* hanya akan didapatkan kondisi akar *real* dan berbeda. Dimana nilai A dan B , pada persamaan (76) adalah parameter yang tidak diketahui.

Penelitian yang dilakukan oleh Tutuncu dan Oztruk (2001) menuliskan persamaan untuk penurunan rumus pada *radial* dan *hoop stress cylindrical* FGM. Penelitian tersebut menyatakan tentang *exact solution* distribusi *radial* dan *hoop stress cylindrical* dan digunakan untuk kondisi batas *internal pressure* yang dapat dituliskan seperti persamaan (80) dan (81).

$$\sigma_r \left(\frac{a}{R} \right) = -P \quad (80)$$

$$\sigma_r \left(\frac{R}{R} \right) = \sigma_r(1) = 0 \quad (81)$$

Dari kondisi batas pada persamaan (80) dan (81) tersebut, parameter A dan B untuk solusi *Euler-Chaucy* diperoleh seperti pada persamaan (82) dan (83).

$$A = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)}{E_o \left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2} \right) (\nu + (1-\nu)m_1)} \quad (82)$$

$$B = \frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)}{E_o \left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2} \right) (\nu + (1-\nu)m_2)} \quad (83)$$

Dari persamaan (82) dan (83), diperoleh formula *radial* dan *hoop stress* seperti pada persamaan (84) dan (85).

$$\sigma_r = -\frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (r^{m_1} - r^{m_2}) r^{\beta-1}}{\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2}} \quad (84)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P\left(\frac{a}{R}\right)^{1-\beta} (\chi_1 - \chi_2)}{\left(\left(\frac{a}{R}\right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R}\right)^{m_2} \right) [m_1(\nu-1)-\nu][m_2(\nu-1)-\nu]} \quad (85)$$

dimana

$$\chi_1 = r^{m_1} [m_2(\nu-1)-\nu][1+(m_1-1)\nu] \quad (86)$$

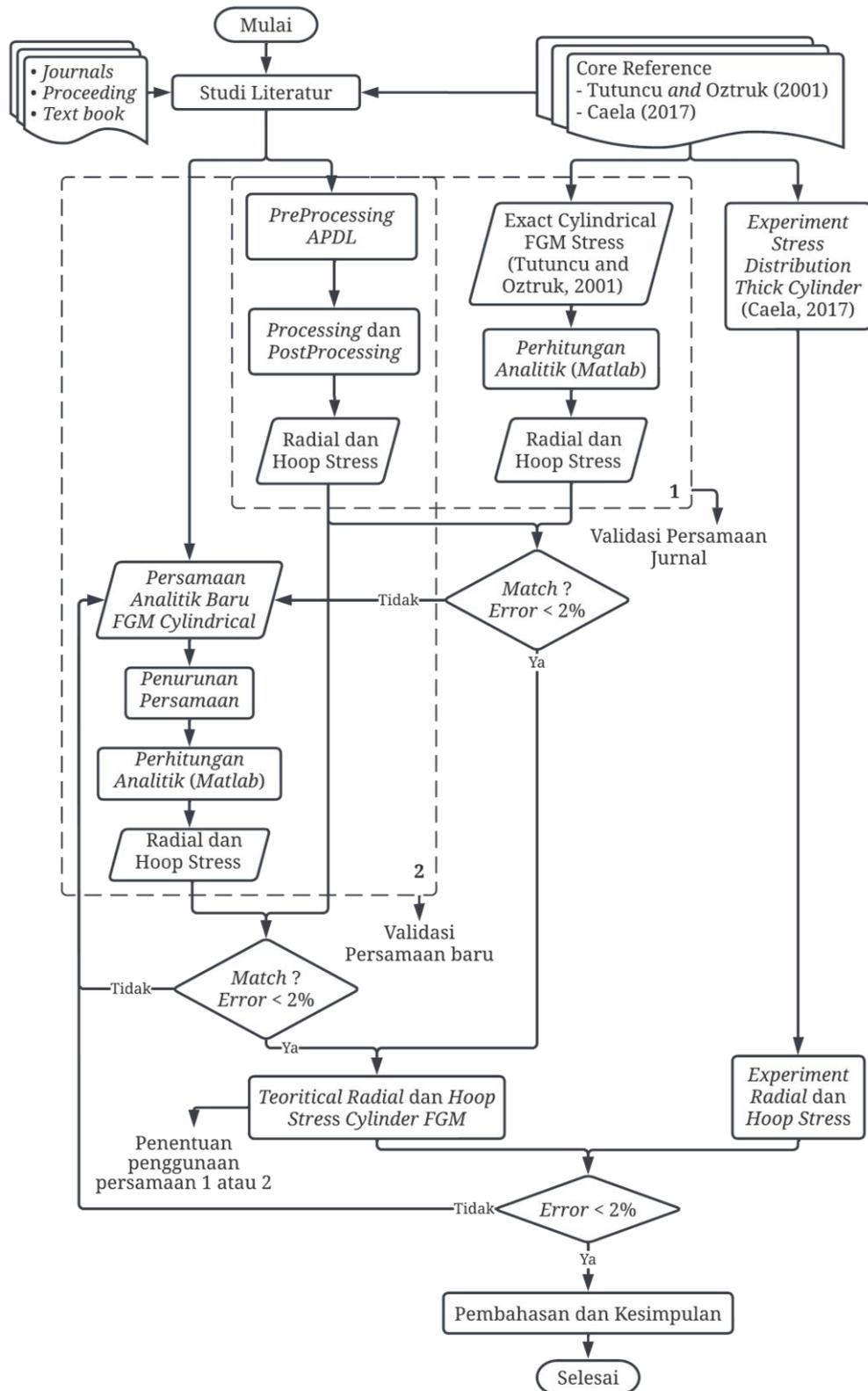
$$\chi_2 = r^{m_2} [m_1(\nu-1)-\nu][1+(m_2-1)\nu] \quad (87)$$

III. METODE PENELITIAN

Perhitungan *radial* dan *hoop stress* pada *cylindrical* FGM dilakukan untuk mengetahui distribusi tegangan yang terjadi sepanjang ketebalan silinder. Selain itu, penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pembaruan pada penurunan rumus *radial* dan *hoop stress* yang terjadi akibat kondisi batas (*internal pressure*) yang bekerja pada *cylindrical* FGM. Tidak hanya itu, penelitian ini juga membandingkan antara perhitungan analitik dengan simulasi numerik (FEM) dan juga hasil percobaan (*experiment*) distribusi tegangan yang terjadi di dalam *cylinder*.

Dalam metodenya, penelitian ini terbagi menjadi tiga jenis metode: penyelesaian analitik, simulasi numerik, dan eksperimen. Simulasi numerik (FEM) dengan asumsi *axisymmetric* digunakan sebagai pembanding terhadap penyelesaian analitik *cylindrical* FGM. Simulasi numerik juga memiliki tujuan lain yakni untuk dapat menjadi solusi alternatif dalam memperoleh distribusi *radial* dan *hoop stress* pada geometri berklasifikasi *axisymmetric* yang kompleks atau sangat sulit untuk memperolehnya dengan menggunakan penyelesaian analitik. Hasil penelitian secara eksperimen juga digunakan sebagai pembanding untuk memperkuat pernyataan pembaruan persamaan analitik tersebut, agar dapat dipercaya keabsahannya dari penelitian ini. Hasil eksperimen yang digunakan adalah penelitian yang telah dilakukan sebelumnya dengan topik dan *subject* yang sama dengan penelitian ini yaitu distribusi *radial* dan *hoop stress* yang terjadi akibat *internal pressure* pada geometri *cylindrical*.

3.1. Metode



Gambar 3.1. Alur Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini yakni penyelesaian analitik, simulasi numerik dan membandingkannya dengan hasil eksperimen dari penelitian lainnya yang relevan. Alur yang digunakan pada penelitian dapat dilihat pada Gambar 3.1. Untuk mempermudah dalam memahami isi alur dalam penelitian ini, Pendeskripsian penelitian secara umum dapat dikategorikan seperti berikut ini:

1. Studi Literatur.

Pada bagian ini, dilakukan observasi terkait FGM baik secara sistematis, umum, terfokus dan ilmiah sehingga dari kegiatan observasi ini didapatkan tujuan-tujuan ilmiah penelitian sebelumnya yang telah dilakukan. Selain itu, pada bagian ini juga bertujuan untuk mendapatkan celah sehingga dapat dilakukan improvisasi ataupun pembaruan terkait topik penelitian ini. Dari beberapa referensi yang digunakan pada penelitian kali ini, terdapat 2 referensi inti (*core reference*). Kedua referensi inti tersebut adalah penelitian dilakukan oleh Tutuncu dan Oztruk (2001) dan Caela (2017).

2. Evaluasi dan Pembaruan.

Pada bagian ini, ditemukan celah untuk improvisasi dari referensi yang digunakan, dimana referensi tersebut adalah *first exact solution FGM pressure vessels* yang menjadi referensi inti pada penelitian ini. Celah improvisasi ini didapatkan saat proses mempelajari lebih dalam referensi tersebut, dan pada referensi tersebut terdapat ketidaksesuaian hasil yang diungkapkan. Ketidaksesuaian hasil data terjadi pada saat penggunaan nilai β (nilai ketidakhomogenan FGM). Penyebab ketidaksesuaian hasil tersebut dikarenakan terdapat kekeliruan dalam penurunan persamaan yang digunakan.

3. Komparasi dan Validasi.

Pada tahap ini, dilakukan pembaruan pada persamaan analitik dan dilakukan komparasi beserta pembahasan terkait valid atau tidaknya hasil dari pembaruan persamaan tersebut. Ada 2 macam komparasi yang dilakukan, simulasi numerik (FEM) dan eksperimen dari referensi yang digunakan. Studi eksperimen distribusi tegangan pada silinder digunakan sebagai pembanding untuk komparasi dari segi eksperimen. Hasil dari referensi tersebut digunakan karena pembebanan yang terjadi sama yakni *internal pressure*. Sampel kedalaman dalam pengambilan data juga cukup merata, sehingga dirasa cocok untuk mewakili dari segi hasil eksperimen.

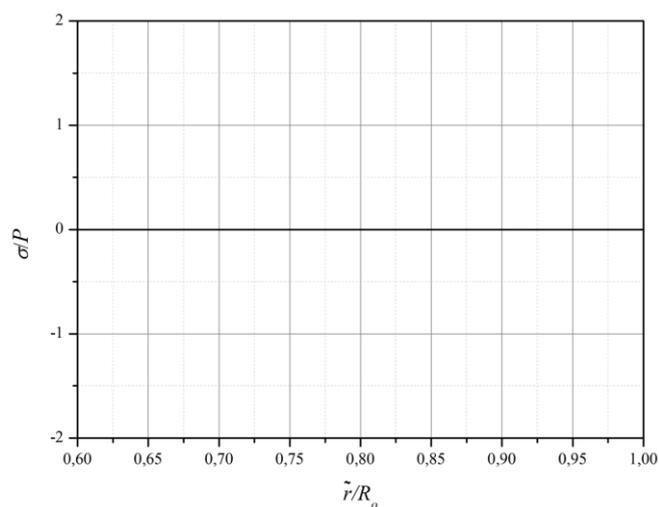
3.2. Pengamatan Peubah

Secara garis besar, pengamatan peubah yang dilakukan dalam penelitian ini meliputi beberapa hal. Pertama, penelitian ini menunjukkan perbedaan ataupun komparasi antara isi dari referensi *first exact solution FGM pressure vessels* (persamaan pada jurnal) dengan simulasi numerik (FEM). Selanjutnya, dilakukan pengembangan pembaruan persamaan untuk menghitung distribusi *radial* dan *hoop stress* pada *cylindrical FGM* secara analitikal yang divalidasi dengan simulasi numerik (FEM).

Kedua, untuk lebih menguatkan hasil pengembangan persamaan tersebut dilakukan juga komparasi antara hasil dari pembaruan persamaan analitik dengan hasil eksperimen yang berasal dari penelitian lain yang relevan. Hal ini bertujuan agar pembaruan persamaan tersebut dapat diterima keabsahannya dan dapat digunakan secara universal.

3.2.1. Komparasi Jurnal

Pengamatan peubah yang pertama yaitu membandingkan antara hasil yang dikemukakan dari referensi inti *first exact solution FGM pressure vessels* (bagian cylindrical) dengan simulasi numerik (FEM). Referensi ini adalah penelitian pertama yang menyatakan analisis secara analitik pada *pressure vessel FGM*. Isi dari referensi ini sama dengan persamaan (84)-(87).



Gambar 3.2 Grafik kosong *radial* dan *hoop stress*

Untuk mempermudah dalam perhitungan *radial* dan *hoop stress*, perhitungan analitik dilakukan menggunakan aplikasi Matlab. Penggunaan Matlab ini agar perhitungan distribusi tegangan dapat dilakukan pada setiap parameter nilai β sepanjang ketebalan *cylinder* sehingga menjadi data *array* yang memiliki nilai tren tertentu. Jika menggunakan Matlab, semua data *array* tersebut mudah didapatkan dan lebih efisien. *Source code* Matlab yang digunakan pada penelitian ini dapat dilihat pada lampiran A. Hasil data *output* dari Matlab dimasukkan ke dalam Tabel 3.1, lalu dibuatkan grafik seperti pada Gambar 3.2 untuk setiap data *radial* dan *hoop stress*.

Tabel 3.1 Data komparasi yang ingin didapatkan antara simulasi FEM dengan perhitungan jurnal

β	r	Analitik Jurnal		FEM		Error (%)	
		σ_r/P	σ_θ/P	σ_r/P	σ_θ/P	Radial	Hoop
	0,60						
	0,65						
	0,70						
	0,75						
	0,80						
	0,85						
	0,90						
	0,95						
	1,00						

3.2.2. Pembaruan Persamaan Analitik

Pengamatan peubah kedua yaitu pembaruan persamaan analitik. Inti dari pengamatan peubah ini adalah pengembangan persamaan baru dari *exact solution* distribusi *radial* dan *hoop stress* sepanjang ketebalan pada FGM *cylindrical*. Pembaruan ini dilakukan karena ada celah atau temuan indikasi ketidaksesuaian data yang terdapat pada pernyataan oleh Tutuncu dan Oztruk (2001). Kesalahan data tersebut berupa tidak sesuainya nilai σ_θ (*hoop stress*) pada setiap nilai β . Temuan pembaruan ini juga didapatkan saat mempelajari lebih dalam isi dari jurnal tersebut, khususnya mempelajari asal usul penurunan persamaan *exact solution* distribusi *radial* dan *hoop stress* tersebut yang secara detail dapat dilihat pada lampiran E. Adapun pembaruan yang dilakukan adalah parameter A dan B solusi euler-cauchy menjadi seperti berikut ini:

$$A = - \frac{P \left(\frac{a}{R} \right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)}{E_o \left(\left(\frac{a}{R} \right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R} \right)^{m_2} \right) (\nu + (1-\nu)m_1)} \quad (88)$$

$$B = \frac{P \left(\frac{a}{R} \right)^{1-\beta} (1+\nu)(1-2\nu)}{E_o \left(\left(\frac{a}{R} \right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R} \right)^{m_2} \right) (\nu + (1-\nu)m_2)} \quad (89)$$

Perbedaan pada pengembangannya ini hanya berubahnya symbol variabel. Symbol variabel yang berubah adalah R_i sebagai jari-jari dalam dan R_o sebagai jari jari luar *cylinder*. Titik perbedaan yang signifikan pada pembaruan ini terdapat pada persamaan σ_θ (*hoop stress*). Adapun persamaan *radial* dan *hoop stress* hasil pembaruan adalah sebagai berikut:

$$\sigma_r = - \frac{P \left(\frac{a}{R} \right)^{1-\beta} (r^{m_1} - r^{m_2}) r^{\beta-1}}{\left(\frac{a}{R} \right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R} \right)^{m_2}} \quad (90)$$

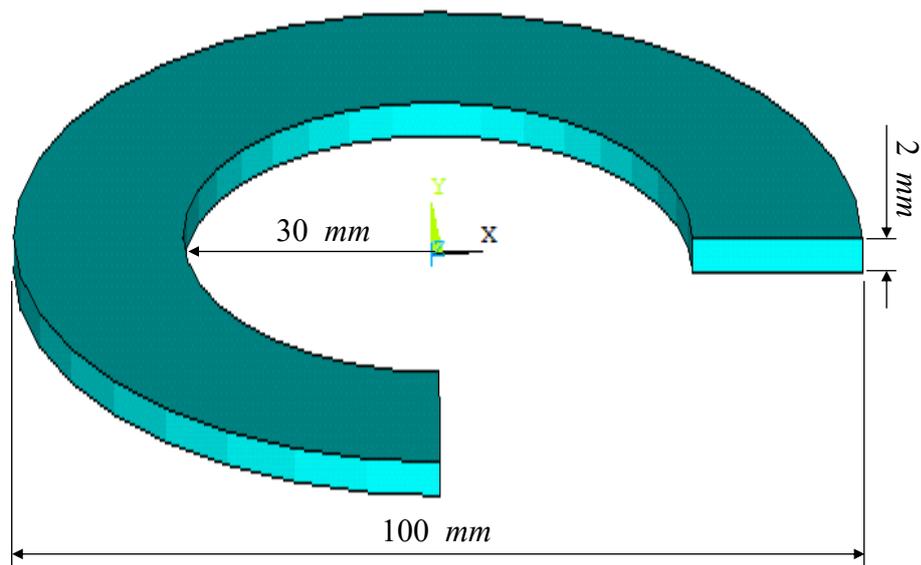
$$\sigma_\theta = \frac{P \left(\frac{a}{R} \right)^{1-\beta} r^{\beta-1} (\chi_1 - \chi_2)}{\left(\left(\frac{a}{R} \right)^{m_1} - \left(\frac{a}{R} \right)^{m_2} \right) [m_1(\nu-1) - \nu] [m_2(\nu-1) - \nu]} \quad (91)$$

dengan,

$$\chi_1 = r^{m_2} [m_1(\nu-1) - \nu] [\nu m_2 + (1-\nu)] \quad (92)$$

$$\chi_2 = r^{m_1} [m_2(\nu-1) - \nu] [\nu m_1 + (1-\nu)] \quad (93)$$

Simulasi numerik digunakan sebagai pembanding terhadap hasil analitik. Simulasi numerik sendiri digunakan karena hasil yang diperoleh dari simulasi numerik mendekati kondisi nyata. Model simulasi numerik dalam menganalisa FGM *cylinder* disamakan dengan yang telah dilakukan pada penelitian Ghasemi, (2014). Adapun model yang digunakan pada penelitian ini adalah seperti pada Gambar 3.3.



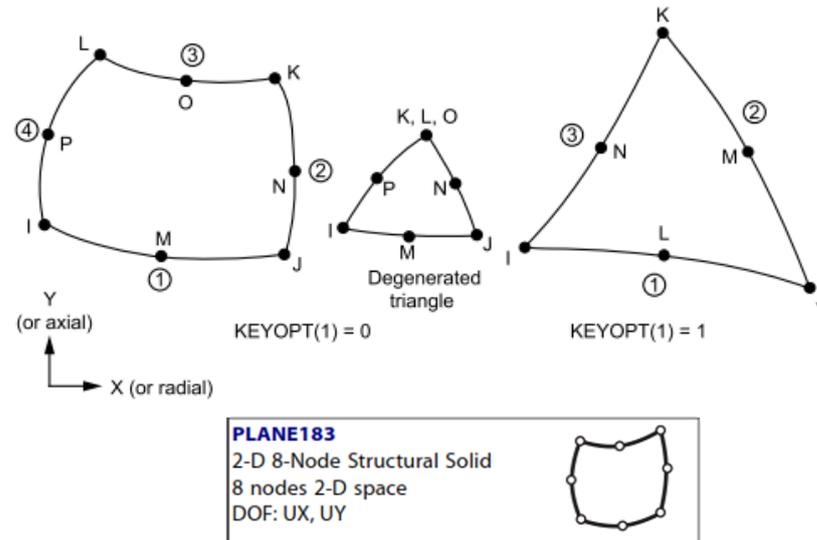
$$\begin{aligned}
 \text{Jari - jari dalam } (R_i) & : 30 \text{ mm} \\
 \text{Jari - jari luar } (R_o) & : 50 \text{ mm} \\
 r & : 0,6 - 1 \\
 \beta & : -2, -1, 0, 1, \text{ dan } 2
 \end{aligned}$$

Gambar 3.3. Model

ANSYS APDL digunakan dalam simulasi numerik (FEM) sebagai pembandingan hasil dari *radial* dan *hoop stress*. Tahap pada ANSYS APDL terbagi menjadi 3, yaitu *PreProcessing*, *Solution*, dan *PostProcessing*. Penjelasan dari tahap-tahap dalam ANSYS APDL yang digunakan adalah sebagai berikut:

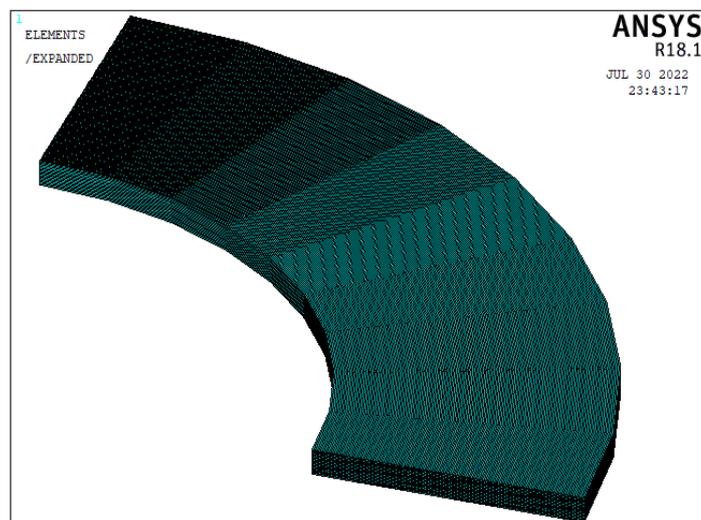
1. *PreProcessing*

Pada *PreProcessing* dilakukan simulasi *structural*, dengan menggunakan *elemen type* PLANE183. Elemen PLANE183 ini memiliki kelebihan dan cocok digunakan untuk mendapatkan *radial* dan *hoop stress cylindrical* FGM ini karena memiliki *option* untuk *quadrilateral node displacement* dan sifat-sifat dari *axisymmetric* seperti yang ada pada Gambar 3.4.



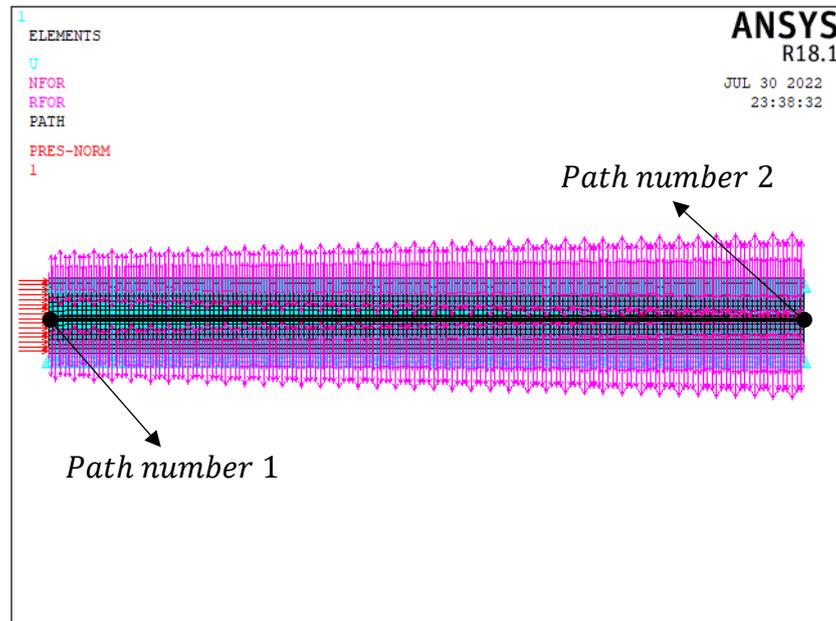
Gambar 3.4. PLANE183

PLANE 183 juga memiliki *input material properties young's modulus* E dan *poisson's ratio* ν . Untuk simulasi numerik, sifat material ditentukan secara berlapis yang rapat untuk memanipulasi sifat gradual yang diakibatkan oleh nilai β , selanjutnya dilakukan *automatic meshing* menggunakan *meshing tool* dengan hasil seperti pada gambar 3.5. Nilai modulus Young's yang digunakan pada tiap lapisnya mengikuti fungsi pangkat pada persamaan (63).

Gambar 3.5. hasil *meshing cylindrical FGM*

2. Solution

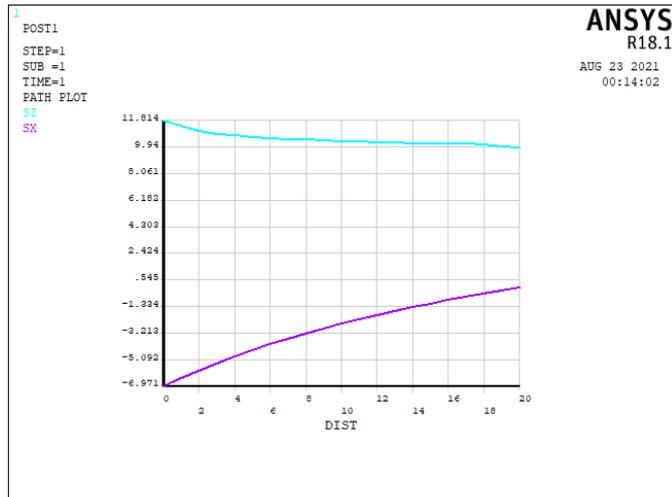
Pada *solution*, silinder FGM di bagian *inner surface* diberikan pembebanan *internal pressure* dan setiap ujung silinder diberikan *fix support* terhadap sumbu-Y (untuk memperkuat statement tegangan seragam pada sumbu longitudinal) seperti pada Gambar 3.6.



Gambar 3.6. Pemberian kondisi batas dan *pathing*

3. PostProcessing

Pada *postprocessing path* dibuat pada bagian tengah geometri dengan asumsi nilai distribusi tegangan sepanjang sumbu-Y (*longitudinal*) seragam. *Path* ini digunakan sebagai sumber dalam pengambilan data *radial stress* maupun *hoop stress* yang akan diambil sepanjang ketebalan r silinder seperti Gambar 3.6. Hasil yang diambil adalah *X-direction stress* ($SX = \text{radial stress}$) dan *Z-direction stress* ($SZ = \text{hoop stress}$). sehingga didapatkan grafik data distribusi *radial stress* dan *hoop stress* sepanjang ketebalan seperti pada Gambar 3.7.



Gambar 3.7. Contoh grafik hasil simulasi numerik ANSYS APDL

Setelah hasil penyelesaian simulasi numerik diperoleh, nilai *radial* dan *hoop stress* yang berbentuk *array* dimasukkan ke dalam Tabel 3.1 dan 3.2. Pada tabel tersebut dihitung pula hasil error yang terjadi. Tidak hanya itu, hasil dari analitik dan simulasi juga dibuatkan grafik agar *trend* nilai yang terjadi dapat dilihat seperti pada Gambar 3.2. *Source code* digunakan untuk mempermudah pengerjaan simulasi numerik ANSYS APDL seperti pada lampiran C.

Tabel 3.2 Data komparasi yang ingin didapatkan antara persamaan pembaruan dan FEM

β	r	Analitik Pembaruan		FEM		Error (%)	
		σ_r/P	σ_θ/P	σ_r/P	σ_θ/P	Radial	Hoop
	0,60						
	0,65						
	0,70						
	0,75						
	0,80						
	0,85						
	0,90						
	0,95						
	1,00						

Sama seperti sebelumnya pada komparasi isi jurnal dan hasil yang dikemukakan jurnal Tutuncu dan Oztruk (2001), untuk mempermudah dalam perhitungannya digunakan aplikasi Matlab. *Source code* Matlab persamaan pembaruan ini dapat dilihat pada lampiran B. Hasil distribusi *radial* dan *hoop stress* dari *output* Matlab dimasukkan ke dalam Tabel 3.3, lalu dibuatkan grafik seperti pada Gambar 3.2 agar terlihat tren dari grafik tersebut.

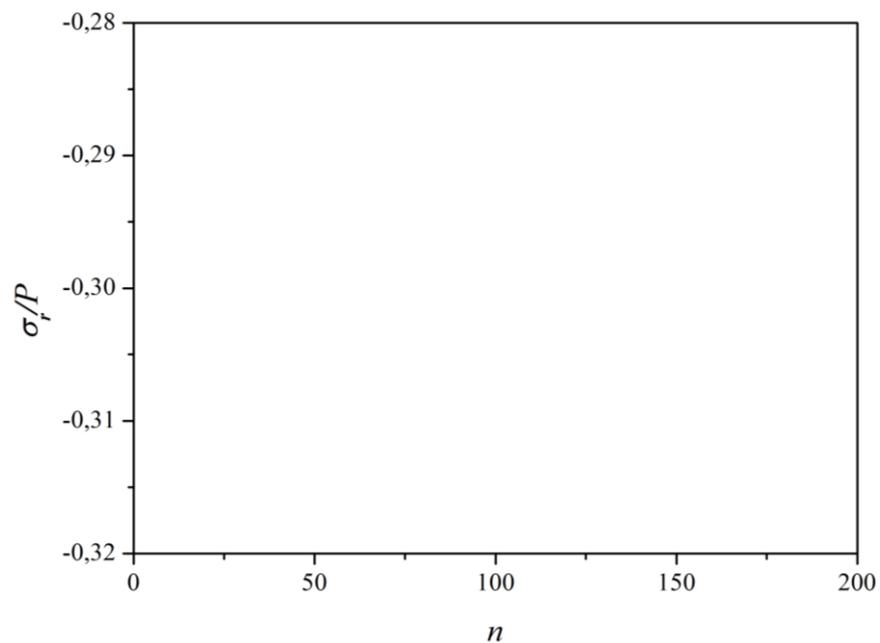
Tabel 3.3 Data kosong uji konvergen

r	Jumlah Elemen Sepanjang Ketebalan (n)							
	2	4	8	20	40	80	160	200
0,60								
0,64								
0,68								
0,72								
0,76								
0,80								
0,84								
0,88								
0,92								
0,96								
1,00								

Namun, sebelum melakukan simulasi numerik (FEM) perlu dilakukan uji kovergen. Pengujian ini bertujuan agar data yang didapatkan sudah menggunakan proses yang efektif. Proses yang efektif ini berfokus pada proses *meshing* untuk menentukan apakah jumlah element yang digunakan telah

cukup dan efektif. Pada penelitian ini untuk menentukan uji konvergen dapat dilakukan dengan mencari nilai distribusi radial stress sepanjang ketebalan *cylinder*. Nilai Rasio panjang element berbanding ketebalan *cylinder* yang digunakan adalah 0.5, 0.25, 0.125, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.00625, dan 0.005. Sehingga, jumlah elemen (n) yang didapatkan sepanjang ketebalan dengan model Ghasemi (2014) (Gambar 3.3) seperti Tabel 3.3.

Selanjutnya, Tabel 3.3 yang telah didapatkan datanya dibuatkan grafik agar terlihat tren dari nilai tersebut seperti pada Gambar 3.8. Hasil dari grafik tersebut dapat dikatakan konvergen ketika nilainya tidak berubah lagi (konvergen).



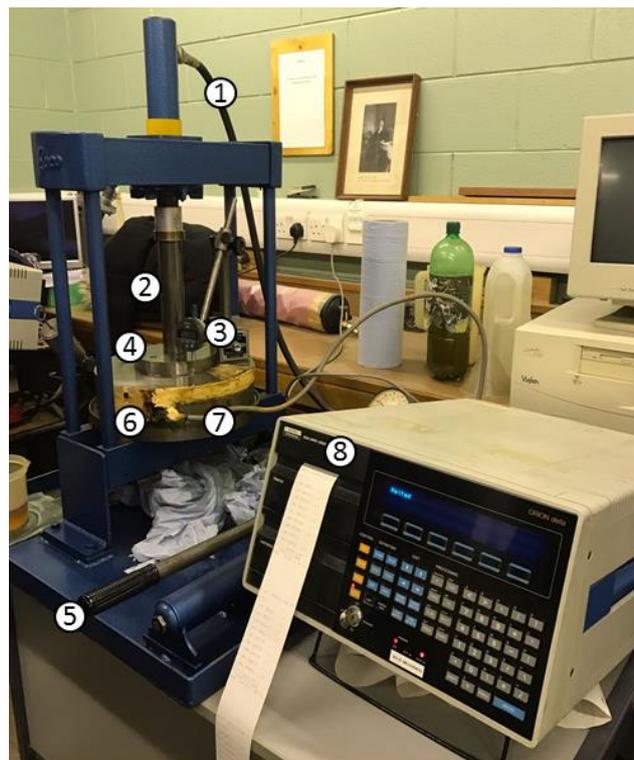
Gambar 3.8 Grafik kosong hasil uji konvergen

3.2.3. Komparasi Eksperimen

Hasil eksperimen *radial* dan *hoop stress* dibutuhkan sebagai pembandingan terhadap hasil usulan analitik distribusi *radial* dan *hoop stress*.

Hasil eksperimen bertujuan untuk memperkuat pernyataan usulan persamaan analitik tersebut sehingga dapat dipercaya keabsahannya. Hasil eksperimen *radial* dan *hoop stress* yang digunakan sebagai pembanding menggunakan hasil penelitian sebelumnya yang telah dilakukan. Adapun, penelitian yang digunakan adalah studi eksperimen distribusi tegangan pada silinder yang dilakukan oleh Caela (2017). Referensi ini digunakan karena dianggap cocok sebagai hasil yang mewakili metode eksperimen, dimana kondisi batas yang terjadi juga sama seperti usulan persamaan analitik yang sedang dilakukan serta distribusi pembacaan tegangan sepanjang kedalamannya juga dirasa cukup. Penjelasan lebih detail pada referensi yang digunakan seperti berikut ini:

1. Model Eksperimen



Gambar 3.9 Peralatan eksperimen (Caela, 2017)

Penelitian Caela (2017) bertujuan untuk mengetahui distribusi *radial* dan *hoop stress* sepanjang ketebalan *cylinder* secara eksperimen. Penelitian tersebut menggunakan model berupa *cylinder* berdiameter dalam sebesar *77.5 mm* dan diameter luar sebesar *152 mm*. Model *cylinder* ditempatkan dalam sumbat lancip yang dilengkapi dengan 10 pengukur regangan. 10 Pengukur regangan tersebut adalah 5 untuk *radial strain* dan 5 untuk *hoop strain*.

Spesifikasi alat yang digunakan pada penelitian tersebut antara lain, data logging Schlumberger Orion Delta 30 35, strain gauge EA/06-25OBF-350 dengan GF (*gauge factor*) 2.075 dan resistansi 352 Ω . Gambar 3.9 menunjukkan peralatan yang dipakai pada penelitian tersebut seperti berikut ini:

- 1) *Hydraulic Ram*
- 2) *Space Bar*
- 3) *Dial Gauge*
- 4) *Plug*
- 5) *Lubricating Oil*
- 6) *Thick Cylinder*
- 7) *Strain Gauge*
- 8) *Instrumentation*

2. Prosedur Eksperimen

Langka kerja dari percobaan tersebut dimulai dari *hydraulic ram* memberikan tekanan sehingga memaksa *space bar* untuk menekan ke

dalam *plug* yang menghasilkan *internal pressure* di dalam *cylinder*. *Hydraulic ram* yang kedua berisi *lubrican* melumasi *hydraulic ram* pertama sebelum penambahan penetrasi tekanan yang diukur dengan *dial gauge*. *Radial* dan *hoop strain* diukur menggunakan *strain gauge* dan hasilnya diproses ke *data logger* dimana langsung terbaca regangan mikro (*microstrain*) dari *cylinder* sehingga otomatis terkalkulasi *radial* dan *hoop stress* yang terjadi di dalam *cylinder*.

Pencatatan tekanan dilakukan pada setiap 5 kali penambahan penetrasi. Penetrasi yang digunakan adalah kedalaman *space bar* dalam menekan *plug*. Lima kali pertambahan kedalaman yang digunakan adalah 0.96 mm, 1.92 mm, 2.64 mm, 3.26 mm, dan 4.48 mm. Regangan diukur setiap 12.5 mm dari jari-jari bagian dalam. Tiga orang diperlukan dalam penelitian tersebut, 1 orang untuk mengoperasikan *hydraulic ram*, 1 orang untuk melumasi *hydraulic ram*, dan 1 orang lagi untuk membaca kenaikan tekanan yang terjadi pada *dial gauge* dan regangan pada *data logger*

3. Hasil Eksperimen

Hasil dari eksperimen ini adalah nilai *radial* dan *hoop stress* pada setiap titik penempatan *strain gauge* dan setiap penetrasi yang digunakan. Berdasarkan isi penelitian tersebut, Nilai Young's Modulus dari material tersebut adalah sebesar 208 kN/mm^2 dan untuk Poisson's ratio sebesar 0.3. Hasil pembacaan regangan oleh data logging dapat dilihat pada Tabel 3.5.

Tabel 3.4 *Raw data* pembacaan *data logger* (Caela, 2017)

<i>Penetration depth</i> (mm)	0.96	1.92	2.64	3.26	4.48
<i>Channel n°</i>	<i>Strain gauges readings</i>				
1	-11	-30	-44	-55	-80
3	-16	-41	-61	-77	-111
5	-25	-55	-79	-99	-144
7	-30	-78	-117	-151	-220
9	-37	-110	-200	-264	-334
11	53	110	155	198	271
13	61	128	180	227	312
15	69	149	210	265	366
17	77	178	251	317	439
19	94	222	313	398	551

Tabel 3.4 menampilkan data mentah dari alat instrumentasi yang digunakan, dimana data tersebut berupa nilai regangan yang terjadi pada setiap titik. *Channel* pada Tabel 3.4 merupakan *port connection* yang digunakan pada perangkat instrumentasi. *Channel* nomor 1,3,5,7, dan 9 bersumber dari *strain gauge* pada posisi 140,5 mm, 128 mm, 115,5 mm, 103 mm, dan 90.5 mm untuk pembacaan regangan radial. Sedangkan, *channel* nomor 11,13,15,17, dan 19 bersumber dari *strain gauge* pada posisi 140,5 mm, 128 mm, 115,5 mm, 103 mm, dan 90.5 mm untuk pembacaan regangan hoop. Untuk memudahkan dalam memahami *raw data output* dari *data logger* yang terjadi pada Tabel 3.4, sebuah Tabel dibuatkan tersendiri yang dapat dilihat pada Tabel 3.5.

Tabel 3.5. Pembacaan regangan sepanjang kedalaman dan penetrasi

r (mm)	Jenis $strain$	Pembacaan $strain\ gauge$ pada setiap penetrasi (μm)				
		0.96 mm	1.92 mm	2.64 mm	3.26 mm	4.48 mm
90,5	ε_r	-37	-110	-200	-264	-334
	ε_θ	94	222	313	398	551
103	ε_r	-30	-78	-117	-151	-220
	ε_θ	77	178	251	317	439
115,5	ε_r	-25	-55	-79	-99	-144
	ε_θ	69	149	210	265	366
128	ε_r	-16	-41	-61	-77	-111
	ε_θ	61	128	180	227	312
140,5	ε_r	-11	-30	-44	-55	-80
	ε_θ	53	110	155	198	271

Untuk mendapatkan tegangan baik radial maupun *hoop*, Nilai regangan yang terdapat pada Tabel 3.5 dikalkulasi terlebih dahulu menggunakan persamaan tegangan regangan pada bidang *cylindrical*. Persamaan untuk kalkulasi tersebut seperti pada persamaan (94) dan (95).

Tabel 3.6. Pembacaan $stress$ sepanjang kedalaman dan penetrasi

r (mm)	Jenis $strain$	Pembacaan $stress$ pada setiap penetrasi				
		0.96 mm	1.92 mm	2.64 mm	3.26 mm	4.48 mm
90,5	σ_r					
	σ_θ					
103	σ_r					
	σ_θ					
115,5	σ_r					
	σ_θ					
128	σ_r					
	σ_θ					
140,5	σ_r					
	σ_θ					

Hasil kalkulasi radial dan hoop stress yang telah dilakukan menggunakan persamaan (94) dan (95) selanjutnya dimasukkan ke dalam Tabel 3.6. Data pada Tabel 3.6 dibuatkan grafik seperti pada Gambar 3.2.

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta) \quad (94)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r) \quad (95)$$

Terdapat kendala untuk mengkomparasi dengan analitik maupun simulasi numerik. Kendala tersebut adalah sulit untuk mengetahui pembebanan yang digunakan. Pembebanan pada kasus ini adalah *internal pressure*, dimana pada referensi eksperimen yang digunakan tidak spesifik menentukan besaran *internal pressure* yang terjadi pada dinding *cylinder*.

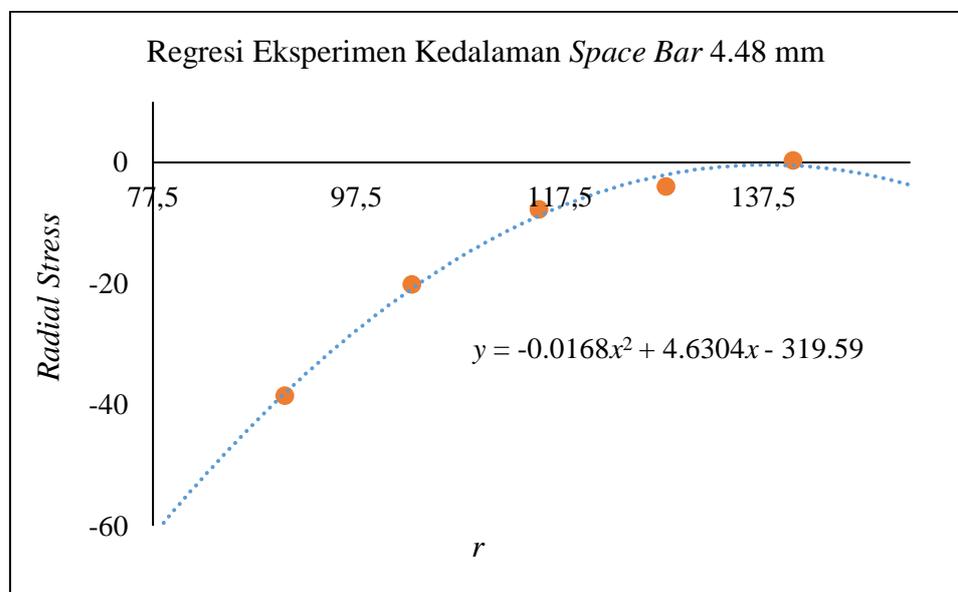
Namun, penelitian ini hanya menyatakan penambahan panjang *space bar* yang terjadi. Oleh karena itu, untuk menentukan pembebanan (*internal pressure*) yang terjadi pada penelitian ini digunakan teori kondisi batas *radial stress* pada dinding yang terkena kontak dengan tekanan. Adapun teori tersebut dapat dituliskan seperti persamaan (96)

$$\sigma_{r(\text{contact})} = -P \quad (96)$$

Arti pada persamaan (96) adalah stress yang terjadi pada dinding terluar (bisa dinding dalam ataupun luar) nilainya sama namun berlawanan (minus) dengan tekanan yang terjadi (bisa *internal* ataupun *external pressure*). Jadi, untuk menentukan kondisi batas yang terjadi disamakan

dengan hasil eksperimen yang terjadi pada dinding terluar *cylinder*. Tetapi, pada ekperiment ini tidak terpasang sensor pembacaan atau *strain gauge* pada dinding terluar tersebut.

Analisis regresi polinom orde 2 dibutuhkan untuk mengetahui kondisi tegangan yang terjadi pada dinding terluar tersebut. Regresi polinom orde 2 digunakan karena kurva distribusi radial stress selalu berbentuk polinom orde 2 atau kurva kuadrat dan tidak pernah berebentuk kurva orde 1 ataupun linier. Sebagai contoh dalam pengambilan regresi ini seperti pada Gambar 3.10.



Gambar 3.10 Regresi hasil eksperimen kedalaman space bar 4.48 mm
(Caela, 2017)

Untuk memudahkan melakukan analisis regresi polinom orde 2 pada penelitian ini digunakan fitur *trendline* pada Ms.Excel yang selanjutnya ditampilkan equation polinom orde 2 seperti gambar 3.10 sehingga besaran internal pressure dimasukkan pada Tabel 3.7.

Tabel 3.7 *Internal pressure* setiap kedalaman *space bar* hasil regresi

Kedalaman <i>Space Bar</i>	Equation Polinomial orde 2	<i>Internal Pressure</i> (MPa)
0.96 mm		
1.92 mm		
2.64 mm		
3.26 mm		
4.48 mm		

Setelah data eksperimen didapatkan, hasil data analitik dari persamaan pembaruan, simulasi numerik (FEM), dan eksperimen dibandingkan satu dan lainnya. *Source code* simulasi numerik (FEM) yang digunakan pada komparasi dengan eksperimen dapat dilihat pada lampiran D. Data-data yang sudah didapatkan dimasukkan ke dalam Tabel 3.8. dan dibuatkan grafik seperti pada Gambar 3.2.

Tabel 3.8 Data komparasi hasil analitik pembaruan, FEM, dan Eksperimen

<i>P</i>	<i>r</i>	Analitikal (Pembaruan)		FEM		Eksperimen (Caela, 2017)	
		σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ
	90,5						
	103						
	115,5						
	128						
	140,5						

V. PENUTUP

5.1. Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan, dapat ditarik kesimpulan seperti berikut:

1. Persamaan analitik distribusi *radial* dan *hoop stress* pada *cylindrical* FGM dengan mudah didapatkan dengan menggunakan dasar dari fungsi pangkat ($E_{(r)} = E_0 r^\beta$) dalam menentukan properties material, dengan catatan pembebanan yang diberikan adalah *internal pressure*. Hasil komparasi usulan persamaan (90)-(93) dengan FEM memiliki nilai error maksimum sebesar 2,77%, sehingga dapat dikatakan valid. Adapun penggunaan FGM (nilai β) memiliki efek untuk mengurangi *lateral stress* dan *residual stress*, sehingga pada geometri *cylinder* mengakibatkan distribusi *radial stress* menuju linear dan distribusi *hoop stress* menjadi konstan.
2. Simulasi numerik (FEM) yang menggunakan metode material berlapis (partisi) rapat yang menyerupai FGM, dan asumsi *axisymmetric plane strain* sehingga berbentuk 2D dapat menjadi solusi alternatif untuk analisis distribusi *radial* dan *hoop stress cylindrical* FGM. Solusi alternatif ini sangat membantu untuk menganalisis distribusi *radial* dan *hoop stress* pada geometri FGM *cylindrical* yang kompleks dan tidak mungkin dianalisis secara analitik. Hal tersebut terbukti dari hasil komparasinya dengan perhitungan analitik yang mendapatkan nilai error di bawah 2,77%.

3. Hasil komparasi antara perhitungan analitik pembaruan, simulasi numerik (FEM), dan eksperimen mendapatkan hasil yang sangat baik. Hasil yang sangat baik tersebut karena tren yang serupa terjadi pada ketiga metode tersebut. Namun, hasil eksperimen untuk radial stress pada beberapa kondisi terjadi sedikit perbedaan khususnya bagian tengah *cylinder*. Hal tersebut karena terjadi efek domino hubungan regangan *radial* dan *hoop*, serta analisis regresi kuadratik yang sedikit kurang tepat dalam menentukan pembebanan yang terjadi. Indikasi pembacaan *strain gauge* yang kurang akurat pada posisi *radial* juga diduga penyebab hal tersebut terjadi.

5.2. Saran

Dari semua proses penelitian yang telah dilakukan, ada beberapa saran untuk keberlanjutan penelitian terkait topik ini antara lain:

1. Kondisi *thermal* perlu dipertimbangkan pada analisis baik analitik, numerik, maupun eksperimen karena *thermal stress* sangat berpengaruh pada *stress/strain* yang terjadi pada FGM *cylindrical*.
2. Perlu menambahkan pembandingan hasil distribusi *radial* dan *hoop stress* secara eksperimen selain material homogen (FGM) untuk lebih mengetahui pengaplikasian analisis FGM pada kondisi nyata.
3. Persamaan analitik distribusi *radial* dan *hoop stress cylindrical* FGM masih dapat dikembangkan seperti kondisi pembebanan yang beragam, contohnya *external pressure* dan *combine pressure* (internal + eksternal).

DAFTAR PUSTAKA

- Abotula, S., Kidane, A., Chalivendra, V. B., & Shukla, A. (2012). Dynamic curving cracks in functionally graded materials under thermo-mechanical loading. *International Journal of Solids and Structures*, 49(13), 1637–1655. doi:10.1016/j.ijsolstr.2012.03.010
- Afshar, R., Bayat, M., Lalwani, R. K., & Yau, Y. H. (2011). Elastic behavior of glass-like functionally graded infinite hollow cylinder under hydrostatic loads using finite element method. *Materials & Design*, 32(2), 781–787. doi:10.1016/j.matdes.2010.07.023
- Alibeigloo, A. (2010). Exact solution for thermo-elastic response of functionally graded rectangular plates. *Composite Structures*, 92(1), 113–121. doi:10.1016/j.compstruct.2009.07.003
- Amos, S.O. (2020). Numerical analysis and material selection of functionally graded pipes based on metals and ceramics for deep offshore oil and gas operations in Gulf of Guinea. Thesis University of Strathclyde. doi:10.48730/WYZA-JQ20.
- Asemi, K., Salehi, M., & Akhlaghi, M. (2013). Three dimensional static analysis of two dimensional functionally graded plates. *IJMECH*, 2(2), 21-32.
- Batani, M., Kiani, Y., & Eslami, M. R. (2013). A comprehensive study on stability of FGM plates. *International Journal of Mechanical Sciences*, 75, 134–144. doi:10.1016/j.ijmecsci.2013.05.014

- Banks-Sills, L., Hershkovitz, I., Wawrzynek, P. A., Eliasi, R., & Ingraffea, A. R. (2005). Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I— $z=0$ is a symmetric plane. *Engineering Fracture Mechanics*, 72(15), 2328–2358. doi:10.1016/j.engfracmech.2004.12.007
- Bhattacharya, S., Singh, I. V., Mishra, B. K., & Bui, T. Q. (2013). Fatigue crack growth simulations of interfacial cracks in bi-layered FGMs using XFEM. *Computational Mechanics*, 52(4), 799–814. doi:10.1007/s00466-013-0845-8
- Bhardwaj, G., Singh, I. V., Mishra, B. K., & Bui, T. Q. (2015). Numerical simulation of functionally graded cracked plates using NURBS based XIGA under different loads and boundary conditions. *Composite Structures*, 126, 347–359. doi:10.1016/j.compstruct.2015.02.066
- Caela, J.G. (2017). Stress distribution in a thick cylinder. School of Computing, Science and Engineering Petroleum and Gas Engineering. University of Salford, Manchester, England.
- Cheng, Z.-Q., & Batra, R. C. (2000). Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate. *Composites Part B: Engineering*, 31(2), 97–106. doi:10.1016/s1359-8368(99)00069-4
- Cheng, Z., Zhang, G., Wang, Y., & Bobaru, F. (2015). A peridynamic model for dynamic fracture in functionally graded materials. *Composite Structures*, 133, 529–546. doi:10.1016/j.compstruct.2015.07.047
- Chu, L., & Dui, G. (2018). Exact solutions for functionally graded micro-cylinders in first gradient elasticity. *International Journal of Mechanical Sciences*, 148, 366–373. doi:10.1016/j.ijmecsci.2018.09.011
- Dag, S., Yildirim, B., & Erdogan, F. (2004). Interface crack problems in graded orthotropic media: Analytical and computational approaches. *International Journal of Fracture*, 130(1), 471–496. doi:10.1023/b:frac.0000049497.81105.c4

- Elishakoff, I., Pentaras, D., Gentilini, C. (2015). *Mechanics of Functionally Graded Material Structure*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Hackensack New Jersey.
- Fallah, F., & Nosier, A. (2012). Nonlinear behavior of functionally graded circular plates with various boundary supports under asymmetric thermo-mechanical loading. *Composite Structures*, 94(9), 2834–2850. doi:10.1016/j.compstruct.2012.03.029
- Fukui, Y., (1991). Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force. *JSME International Journal Series III*, 34, 144–148.
- Golmakani, M. E., & Kadkhodayan, M. (2011). Large deflection analysis of circular and annular FGM plates under thermo-mechanical loadings with temperature-dependent properties. *Composites Part B: Engineering*, 42(4), 614–625. doi:10.1016/j.compositesb.2011.02.018
- Gu, P., & Asaro, R. J. (1997). Cracks in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*, 34(1), 1–17. doi:10.1016/0020-7683(95)00289-8
- Hornbogen, E. (1994). *Werkstoffe*. Springer-Verlag, 6th edition Berlin.
- Hosseini, S. S., Bayesteh, H., & Mohammadi, S. (2013). Thermo-mechanical XFEM crack propagation analysis of functionally graded materials. *Materials Science and Engineering: A*, 561, 285–302. doi:10.1016/j.msea.2012.10.043
- Jabbari, M., Bahtui, A., & Eslami, M. R. (2009). Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 86(5), 296–306. doi:10.1016/j.ijpvp.2008.12.002

- Jackson, T. R., Liu, H., Patrikalakis, N. M., Sachs, E. M., & Cima, M. J. (1999). Modeling and designing functionally graded material components for fabrication with local composition control. *Materials & Design*, 20(2-3), 63–75. doi:10.1016/s0261-3069(99)00011-4
- Jastrzebski, Z. D. (1976). *The Nature and Properties of Engineering Materials*. John Wiley & Sons
- Jiang, A.M., Ding, H.J. (2005). The analytical solutions for orthotropic beam (II): Solutions for density functionally graded beams. *Journal of Zhejiang University SCIENCE*. 6A(3), 155–158. doi:10.1007/BF02872313
- Joachim, R., Harders, H. & Bäkeret, M. (2007). *Mechanical Behavior of Engineering Materials; Metals, Ceramics, Polymers and Composite*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Jung, W.-Y., & Han, S.-C. (2014). Transient analysis of FGM and laminated composite structures using a refined 8-node ANS shell element. *Composites Part B: Engineering*, 56, 372–383. doi:10.1016/j.compositesb.2013.08.044
- Kang, Y.-A., & Li, X.-F. (2009). Large Deflections of a Non-linear Cantilever Functionally Graded Beam. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 29(12), 1761–1774. doi:10.1177/0731684409103340
- Kim, J.-H., & Paulino, G. H. (2002). Finite element evaluation of mixed mode stress intensity factors in functionally graded materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53(8), 1903–1935. doi:10.1002/nme.364
- Koizumu, M. (1993). The concept of FGM. *Ceramic Transactions, Functionally Gradient Materials*, 34:3-10.

- Lee, W.-H., Han, S.-C., & Park, W.-T. (2015). A refined higher order shear and normal deformation theory for E-, P-, and S-FGM plates on Pasternak elastic foundation. *Composite Structures*, 122, 330–342. doi:10.1016/j.compstruct.2014.11.047
- Li, X.-F., Peng, X.-L., & Kang, Y.-A. (2009). Pressurized Hollow Spherical Vessels with Arbitrary Radial Nonhomogeneity. *AIAA Journal*, 47(9), 2262–2266. doi:10.2514/1.41995
- Li, X.-F. (2008). A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functionally graded Timoshenko and Euler–Bernoulli beams. *Journal of Sound and Vibration*, 318(4-5), 1210–1229. doi:10.1016/j.jsv.2008.04.056
- Logan, D. L. (2016). *A first course in finite element method: Sixth edition (Sixth edition)*. Mason, OH. Cengage Learning.
- Malekzadeh, P., & Shojaee, S. A. (2013). Dynamic response of functionally graded plates under moving heat source. *Composites Part B: Engineering*, 44(1), 295–303. doi:10.1016/j.compositesb.2012.05.023
- Malekzadeh, P., & Monajjemzadeh, S. M. (2015). Nonlinear response of functionally graded plates under moving load. *Thin-Walled Structures*, 96, 120–129. doi:10.1016/j.tws.2015.07.017
- Matsunaga, H. (2008). Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 82(4), 499–512. doi:10.1016/j.compstruct.2007.01.030
- Mazzolani, F. M., Landolfo, R., Faggiano, B., Esposito, M., Perotti, F., & Barbella, G. (2008). Structural Analyses of the Submerged Floating Tunnel Prototype in Qiandao Lake (PR of China). *Advances in Structural Engineering*, 11(4), 439–454. doi:10.1260/136943308785836862

- Mechab, I., Mechab, B., & Benaissa, S. (2013). Static and dynamic analysis of functionally graded plates using Four-variable refined plate theory by the new function. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 748–757. doi:10.1016/j.compositesb.2012.07.015
- Nakamura, T., Wang, T., & Sampath, S. (2000). Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation. *Acta Materialia*, 48(17), 4293–4306. doi:10.1016/s1359-6454(00)00217-2
- Nguyen-Xuan, H., Tran, L. V., Thai, C. H., Kulasegaram, S., & Bordas, S. P. A. (2014). Isogeometric analysis of functionally graded plates using a refined plate theory. *Composites Part B: Engineering*, 64, 222–234. doi:10.1016/j.compositesb.2014.04.001
- Niino, M., Hirai, T. (1984). Watanabe, R.: The functionally gradient materials. *Japanese Journal of Applied Physics*. 13, 257–264
- Uysal, M. (2013). Investigation of Thermal and Mechanical Loading on Functional Graded Material Plates. *International Journal of Aerospace and Mechanical Engineering*, 7(11), 2283 - 2289. doi: 10.5281/zenodo.1089162
- Pan, H., Song, T., & Wang, Z. (2015). An analytical model for collinear cracks in functionally graded materials with general mechanical properties. *Composite Structures*, 132, 359–371. doi:10.1016/j.compstruct.2015.05.055
- Parameswaran, V., & Shukla, A. (2000). Processing and characterization of a model functionally gradient material. *Journal of Materials Science*, 35(1), 21–29. doi:10.1023/a:1004767910762
- Pradhan, K. K., & Chakraverty, S. (2013). Free vibration of Euler and Timoshenko functionally graded beams by Rayleigh–Ritz method. *Composites Part B: Engineering*, 51, 175–184. doi:10.1016/j.compositesb.2013.02.027

- Qian, L. F., & Batra, R. C. (2004). Transient Thermoelastic Deformations of A Thick Functionally Graded Plate. *Journal of Thermal Stresses*, 27(8), 705–740. doi:10.1080/01495730490440145
- Reddy, J. N. (2000). Analysis of functionally graded plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47(1-3), 663–684. doi:10.1002/(sici)1097-0207(20000110/30)47:1/3<663::aid-nme787>3.0.co;2-8
- Reddy, J., & Cheng, Z.-Q. (2001). Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 20(5), 841–855. doi:10.1016/s0997-7538(01)01174-3
- Sator, L., Sladek, V., Sladek, J., & Young, D. L. (2016). Elastodynamics of FGM plates by mesh-free method. *Composite Structures*, 140, 309–322. doi:10.1016/j.compstruct.2015.12.065
- Salehi, M., Alizadeh Vaghasloo, Y., Naderi, M., Ramezani Movaffagh, M., & Varmaziar, A. (2013). Fatigue behavior of functionally graded steel produced by electro-slag remelting. *Materials Science and Engineering: A*, 584, 143–149. doi:10.1016/j.msea.2013.06.051
- Setoodeh, A. R., & Afrahim, S. (2014). Nonlinear dynamic analysis of FG micro-pipes conveying fluid based on strain gradient theory. *Composite Structures*, 116, 128–135. doi:10.1016/j.compstruct.2014.05.013
- Shariyat, M., & Jafari, R. (2013). Nonlinear low-velocity impact response analysis of a radially preloaded two-directional-functionally graded circular plate: A refined contact stiffness approach. *Composites Part B: Engineering*, 45(1), 981–994. doi:10.1016/j.compositesb.2012.05.014

- Singha, M. K., Prakash, T., & Ganapathi, M. (2011). Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(4), 453–460. doi:10.1016/j.finel.2010.12.001
- Swaminathan, K., Naveenkumar, D. T., Zenkour, A. M., & Carrera, E. (2015). Stress, vibration and buckling analyses of FGM plates. *Composite Structures*, 120, 10–31. doi:10.1016/j.compstruct.2014.09.070
- Thai, H.-T., & Kim, S.-E. (2015). A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 128, 70–86. doi:10.1016/j.compstruct.2015.03.010
- Tran, L. V., Ferreira, A. J. M., & Nguyen-Xuan, H. (2013). Isogeometric analysis of functionally graded plates using higher-order shear deformation theory. *Composites Part B: Engineering*, 51, 368–383. doi:10.1016/j.compositesb.2013.02.045
- Tung, H. V., & Duc, N. D. (2010). Nonlinear analysis of stability for functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Composite Structures*, 92(5), 1184–1191. doi:10.1016/j.compstruct.2009.10.015
- Tutuncu, N., & Ozturk, M. (2001). Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels. *Composites Part B: Engineering*, 32(8), 683–686. doi:10.1016/s1359-8368(01)00041-5
- Valizadeh, N., Natarajan, S., Gonzalez-Estrada, O. A., Rabczuk, T., Bui, T. Q., & Bordas, S. P. A. (2013). NURBS-based finite element analysis of functionally graded plates: Static bending, vibration, buckling and flutter. *Composite Structures*, 99, 309–326. doi:10.1016/j.compstruct.2012.11.008
- Vel, S. S., & Batra, R. C. (2002). Exact Solution for Thermoelastic Deformations of Functionally Graded Thick Rectangular Plates. *AIAA Journal*, 40(7), 1421–1433. doi:10.2514/2.1805

- Vel, S. S., & Batra, R. C. (2003a). Three-dimensional analysis of transient thermal stresses in functionally graded plates. *International Journal of Solids and Structures*, 40(25), 7181–7196. doi:10.1016/s0020-7683(03)00361-5
- Vel, S. S., & Batra, R. C. (2003b). Generalized Plane Strain Thermopiezoelectric Analysis of Multilayered Plates. *Journal of Thermal Stresses*, 26(4), 353–377. doi:10.1080/713855902
- Vullo, V. (2014). *Circular Cylinders and Pressure Vessels*, Springer Series in Solid and Structural Mechanics. Springer International Publishing, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00690-1>
- Wang, Z.-M., & Liu, Y.-Z. (2016). Transverse vibration of pipe conveying fluid made of functionally graded materials using a symplectic method. *Nuclear Engineering and Design*, 298, 149–159. doi:10.1016/j.nucengdes.2015.12.007
- Xie, J., Hao, S., Wang, W., & Shi, P. (2021). Analytical solution of stress in functionally graded cylindrical/spherical pressure vessel. *Archive of Applied Mechanics*, 91(7), 3341–3363. doi:10.1007/s00419-021-01970-w
- Yamanouchi, M., Koizumi, M., Shioya, T. (1990). *Proceedings of the first International Symposium on Functionally Gradient Materials*, Japan,.
- Yang, T., Zheng, W., Huang, Q., & Li, S. (2016). Sound radiation of functionally graded materials plates in thermal environment. *Composite Structures*, 144, 165–176. doi:10.1016/j.compstruct.2016.02.065
- Yildirim, B., Dag, S., & Erdogan, F. (2005). Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading. *International Journal of Fracture*, 132(4), 371–397. doi:10.1007/s10704-005-2527-9
- Zhang, D.-G. (2013). Nonlinear bending analysis of FGM beams based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. *Composite Structures*, 100, 121–126. doi:10.1016/j.compstruct.2012.12.024

Zhang, X.-H., Han, J.-C., He, X.-D., & Kvanin, V. L. (2000). Journal of Materials Synthesis and Processing, 8(1), 29–34. doi:10.1023/a:1009469610918

Zhong, Z., & Yu, T. (2007). Analytical solution of a cantilever functionally graded beam. Composites Science and Technology, 67(3-4), 481–488. doi:10.1016/j.compscitech.2006.08.023