BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL YANG MEMUAT GRAF HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LENGKAP

(Skripsi)

Oleh

LISTIA TUNGGA DEWI
1817031071

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL YANG MEMUAT GRAF HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LENGKAP

Oleh

LISTIA TUNGGA DEWI

Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang kemudian disebut dengan kelas warna, maka Π = $\{C_1,\ C_2$,..., $C_n\}$ merupakan himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah $k -$ pasangan terurut $(d(v, C_1),\ d(v, C_2),\ \ldots, d(v, C_k)$ dengan $d(v, C_i) = min\{d(v, x)|x \in\ C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi G. Operasi korona dari graf G dan graf H, dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari duplikat graf H sebanyak titik di graf G (duplikat graf H dinyatakan dengan $H_i, i = 1,2,3, \ldots, |V(G)|$) kemudian setiap titik ke-i di $V(G)$ bertetangga dengan setiap titik di H_i. Bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap $\chi_L(B_{(P_1 \odot K_m)})$ adalah $m + 2$ untuk $n = 1$ dan $\chi_L(B_{(P_2 \odot K_m)})$ adalah $m + 2$ untuk $n = 2$. Selanjutnya untuk $3 \leq n \leq m + 2$ terdapat dugaan bahwa bilangan kromatik lokasi dari $\chi_L B_{(P_n \odot K_m)}$ adalah $m + 2$.

Kata Kunci: bilangan kromatik lokasi graf, operasi korona graf, graf barbel, graf lintasan, graf lengkap.

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF BARBELL GRAPH THAT CONTAINS GRAPH RESULTS OF CORONA PRODUCT OF PATH AND COMPLETE GRAPH

Oleh

LISTIA TUNGGA DEWI

Let c be a proper coloring in graph G with $c(u) \neq c(v)$ for adjacent vertices u and v in G. Let C_i is a set of vertices receiving color i, which is then called the color class, then Π = $\{C_1$, C_2,..., $C_n\}$ is a partition of $V(G)$. The color code $c_\Pi(v)$ of vertex v in G is the ordered k −tuple $(d(v, C_1),\ d(v, C_2),\ \ldots, d(v, C_k)$ where $d(v, C_i) = min\{d(v, x)|x \in\ C_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If all distinct vertices of G have distinct color codes, then c is called a locating coloring of G. For any given graphs G and H, define the corona product $G \odot H$ between G and H as the graph obtained from G and H by taking one copy of G and $|V(G)|$ copies of H and then joining all the vertices of the i^{th} -copy of H with the i^{th}-vertex of G. The locating chromatic number of corona product $\chi_L(B_{(P_1 \odot K_m)})$ is $m + 2$ for $n = 1$ and $\chi_L(B_{(P_2 \odot K_m)})$ is $m + 2$ for $n = 2$. Next for $3 \leq n \leq m + 2$ there is a conjecture that the locating chromatic number of $\chi_L B_{(P_n \odot K_m)}$ is $m + 2$.

Keywords: the locating chromatic number, corona product, barbell graph, path, complete graph.

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL YANG MEMUAT GRAF HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LENGKAP

Oleh

LISTIA TUNGGA DEWI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL YANG MEMUAT GRAF HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LENGKAP**

Nama Mahasiswa : **Listia Tungga Dewi**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031071**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 19840627 200604 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP. 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **10 Agustus 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: Listia Tungga Dewi
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031071
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BARBEL YANG MEMUAT GRAF HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF LENGKAP**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 Agustus 2022

Penulis,

Listia Tungga Dewi

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Karang Anyar pada 20 September 2000. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara, dari Bapak Ahmad Jainudin dan Ibu Titik Lestari.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Pertiwi Karang Anyar tahun 2006. Pendidikan sekolah dasar di SD Negeri 1 Karang Anyar tahun 2012. Pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Braja Selebah tahun 2015. Pendidikan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Way Jepara 2018

Penulis melanjutkan jenjang pendidikan di Universitas Lampung jalur SBMPTN dan terdaftar sebagai mahasiswa jurusan Matematika FMIPA. Riwayat organisasi yakni Himatika 2018 dan 2019, ROIS 2019, Bendahara Karang Taruna Desa Karang Anyar 2022.

Sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, Penulis telah menyelesaikan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Karang Anyar Kecamatan Labuhan Maringgai pada tahun 2021, dan kuliah Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik Kabupaten Pringsewu tahun 2021.

KATA INSPIRASI

“Teruslah berjalan ke depan tanpa menjatuhkan orang lain. Ingat, bahwa semua sudah diatur kamu hanya perlu menjalankan kehidupan ini dengan penuh rasa syukur dan bahagia.
Tidak melulu harus selalu bahagia, karena kehiduan itu seimbang antara susah dan senang, sedih dan bahagia.
Berjalan sesuai aturan, maka hidupmu akan damai.”

“BANGUN, WUJUDKAN MIMPIMU.
JANGAN SAMPAI ORANG LAIN MEMPEKERJAKANMU
UNTUK MEWUJUDKAN MIMPINYA.”

“Perjuangkan apa yang ingin kau dapat.
Karena, waktu tak mungkin terulang.
Jangan lupa untuk selalu berdoa,
mintakan kebaikan dan keberkahan didalamnya.
Usaha dan doa adalah satu kesatuan yang tidak dapat dipisahkan.
Jadi, lakukan keduanya beriringan.”

PERSEMBAHAN

Alhamdulilah dan syukur kepada Allah SWT atas hidayah dan kasih sayang-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Rasa syukur dan bahagia saya persembahkan Skripsi ini untuk:

Bapak Ahmad Jainudin dan Ibu Titik Lestari

serta

Muhammad Fathul Akbar

Terima kasih atas doa, dukungan, dan semangat yang telah diberikan
Terima kasih atas cinta dan kasih sayang yang telah diberikan
Terima kasih atas kesabaran yang telah diberikan.

SANWACANA

Segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala nikmat dan karunia-Nya yang tak terhingga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel yang Memat Graf Hasil Operasi Korona Graf Lintasan dengan Graf Lengkap”**. Penulisan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bimbingan, bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Sehingga, pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan bimbingan, saran, dan kritik dalam proses penyelesaian skripsi.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing II dan dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, serta saran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku dosen penguji atas kesediannya dalam menguji dan dengan sabar memberikan kritik dan saran yang membangun.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff, karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak, Mamak, akbar, dan seluruh keluarga yang selalu mendukung, menemani, mendoakan serta memberikan semangat dengan penuh kasih sayang sehingga menguatkan penulis dalam menjalani setiap proses meraih gelar sarjana.

8. Keluarga Della yang telah memberikan tempat tinggal serta doanya selama penyusunan skripsi ini.
9. Sahabatku Della, Yuni, Riris, Ahya, dan Wulan Riska yang selalu mendoakan, memberikan semangat, motivasi, pengertian, pencerahan serta mendengarkan keluhan penulis.
10. Semua teman sejurusan matematika 2018 dan teman kelas B yang telah membantu serta memberikan semangat kepada penulis yang mana tidak bisa disebutkan satu persatu.
11. Seluruh pihak-pihak terkait yang telah banyak membantu, baik dalam penyelesaian skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat untuk para pembaca.

Bandar Lampung, 10 Agustus 2022
Penulis,

Listia Tungga Dewi

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Munculnya konsep bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari konsep dimensi metrik dan pewarnaan titik. Dimensi metrik pertama kali dikenalkan oleh Slater (1975) dan Harary serta Melter (1976). Konsep dimensi metrik merupakan konsep untuk menentukan berapa banyak alat pendeteksi sonar pada suatu jaringan atau menentukan lintasan robotik. Dimensi metrik ini yang dicari adalah basisnya yang merupakan kardinalitas terkecil dari himpunan pembeda yang merupakan pembeda dari representasi suatu titik terhadap jarak-jaraknya.

Pada tahun 1998 Chartrand dkk. mengenalkan dimensi partisi yang merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Pada dimensi partisi untuk titik yang bertengga dapat diberikan warna yang sama atau dapat masuk dalam partisi yang sama. Kemudian diberikan syarat pewarnaan titik yaitu untuk dua titik yang bertetangga tidak dapat diberikan warna yang sama. Oleh karena itu, konsep dimensi partisi yang ada di himpunan pembeda dengan diberikan syarat pewarnaan titik akan menghasilkan konsep bilangan kromatik lokasi.

Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. pada tahun 2002. Banyak peneliti yang mengkaji tentang bilangan kromatik lokasi karena merupakan topik baru yang menarik untuk dipelajari dan belum adanya teorema atau algoritma yang berlaku umum untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dari sebarang graf. Untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf dilakukan dengan banyaknya warna minimum yang digunakan dalam pewarnaan lokasi dan kode warna yang berbeda di setiap titik pada graf tersebut.

Pada tahun 2002 Chartrand dkk. telah berhasil menemukan graf berorde n dengan bilangan kromatik lokasi n, yaitu graf multipartit lengkap dari n titik. Kemudian tahun 2003, Chartrand dkk. berhasil mengkonstrusi graf pohon dengan n titik, $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi bervariasi dari 3 sampai n, kecuali untuk $(n-1)$. Pada tahun 2011, Asmiati dkk. telah mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bintang seragam $S_{k,m}$ dan tak seragam $S_{k,(n_1,\dots,n_k)}$ untuk $k \geq 2$. Kemudian, Asmiati dkk. (2012) berhasil menemukan bilangan kromatik lokasi untuk graf kembang api. Pada tahun 2014, Asmiati juga telah mendapatkan penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bintang tak homogen. Selajutnya, Asmiati dkk. (2019) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf lengkap dan graf Petersen diperumum.

Terkait pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi telah banyak dipelajari, termasuk pada operasi antara dua graf yang merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat banyak jenis operasi dalam graf salah satunya adalah operasi korona graf $G_1 \odot G_2$ yang diperkenalkan oleh Harary dan Frucht pada tahun 1970. Pada tahun 2012, Baskoro dkk. menentukan bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona dua graf terhubung $G \odot H$ dan nilai eksak bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona dari graf tertentu. Muthia dan Narwen (2019) mendapatkan bilangan kromatik lokasi untuk graf lintasan dengan komplemen graf lengkap $P_n \odot \bar{K}_m$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 1$. Kemudian, Adriani dan Narwen (2019) menentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf lintasan dengan graf lengkap $P_n \odot K_m$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 2$.

Pada penelitian ini akan dikaji bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap $B_{(P_n \odot K_m)}$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

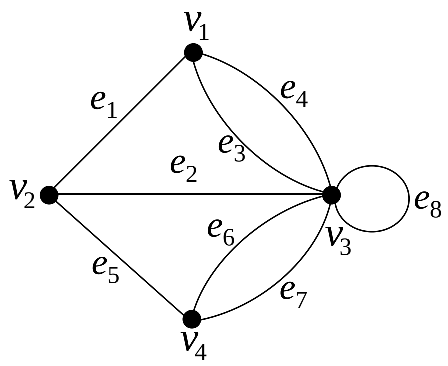
Manfaat dari Penelitian ini adalah :

1. memberikan pemahaman tentang bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap;
2. memberikan bahan referensi bagi peneliti lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Konsep dasar graf yang diambil dari (Deo, 1989). Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan terurut $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ himpunan tidak-kosong dengan elemen-elemennya disebut dengan titik (*vertices*) dan $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ himpunan pasangan tak terurut dari elemen-elemen di $V(G)$ yang anggotanya disebut dengan sisi (*edge*). Dengan kata lain, titik menggambarkan objek-objek tertentu dan sisi menggambarkan hubungan antara objek-objek tersebut. Berikut adalah contoh graf yang mempunyai sisi paralel dan *loop*.



Gambar 1. Contoh graf dengan 4 titik dan 8 sisi

Graf pada Gambar 1 merupakan graf (V, E) dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Pada Gambar 1 terdapat *loop* pada titik v_3 yaitu e_8, sedangkan e_3, e_4, e_6, dan e_7 disebut sisi paralel. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik awal dan titik akhir yang sama.

Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Derajat pada masing-masing titik pada Gambar 1 adalah $d(v_1) = 3, d(v_2) = 3, d(v_3) = 7, d(v_4) = 3$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu. Graf yang tidak memiliki *loop* dan sisi paralel disebut graf sedehana.

Jalan (*walk*) dalam suatu graf G adalah barisan berhingga bergantian antara titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya serta terjadi pengulangan pada titik dan sisinya. Contoh jalan (*walk*) berdasarkan Gambar 1 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_2 - e_5 - v_4 - e_6 - v_4 - e_7 - v_3 - e_3 - v_3 - e_4 - v_3 - e_8$. Lintasan (*path*) adalah jalan yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda dimana titik-titik yang dilewati tepat satu kali graf. Contoh lintasan (*path*) berdasarkan Gambar 1 adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_4 - e_6 - v_3$.

Graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Jika tidak, maka G disebut graf tak terhubung. Suatu sisi e pada graf G disebut jembatan, jika sisi e dihilangkan mengakibatkan G menjadi tidak terhubung.

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Chartrand dkk. (2002) mendefinisikan bilangan kromatik lokasi sebagai berikut. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan lokasi di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan titik v yang bertetangga di graf G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, selanjutnya disebut dengan kelas warna, maka $\prod = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna c_{Π} dari v adalah k-pasang terurut

$(d(v, C_1), d(v, C_2)\ , \dots\ , d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi.

Chartrand dkk. (2002) telah membuktikan tentang teorema dasar bilangan kromatik lokasi.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)
Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) = c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

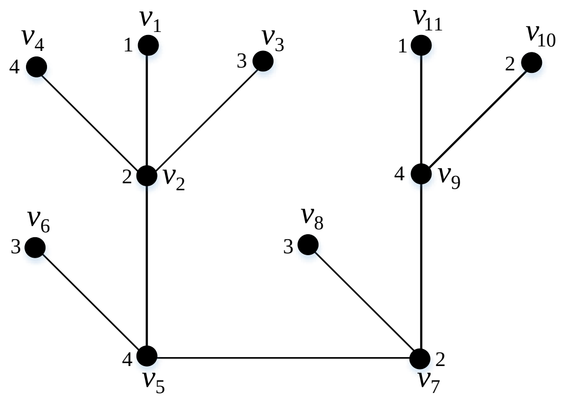
Bukti :
Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\prod = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada pada kelas warna yang sama, misal C_i dari $\prod$. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) \neq d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_{\Pi}(u) = c_{\Pi}(v)$ sehinggan c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. ∎

Akibat dari Teorema 2.1 didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk sebarang graf.

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)
Jika G adalah graf terhubung. Jika G suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti :

Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap $x_i, i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$. ∎



Gambar 2. Pewarnaan lokasi minimum pada graf G dengan $\chi_L(G) = 4$.

Diberikan graf G pada Gambar 2 akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G. Karena pada titik v_2 mempunyai 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq 4$. (2.1)

Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna. Pada graf G diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\prod = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_{11}\}, C_2 = \{v_2, v_7, v_{10}\}, C_3 = \{v_3, v_6, v_8\}$, dan $C_4 = \{v_4, v_5, v_9\}$. Oleh karena itu, diperoleh kode warna sabagai serikut :

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,2)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,1)$; $c_\Pi(v_3) = (2,1,0,2)$;

$c_\Pi(v_4) = (2,1,2,0)$; $c_\Pi(v_5) = (2,1,1,0)$; $c_\Pi(v_6) = (3,2,0,1)$;

$c_\Pi(v_7) = (0,2,1,1)$; $c_\Pi(v_8) = (3,1,0,2)$; $c_\Pi(v_9) = (1,1,2,0)$;

$c_\Pi(v_{10}) = (2,0,3,1)$; $c_\Pi(v_{11}) = (0,2,3,1)$.

Karena kode warna dari semua titik di G berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya $\chi_L(G) \geq 4$. Jadi, $\chi_L(G) = 4$.

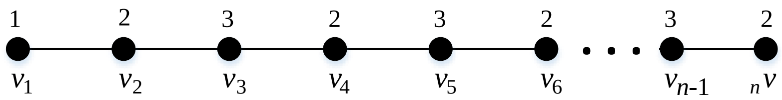
Berikut ini akan diberikan bilangan kromatik lokasi beberapa kelas graf sederhana.

Graf lintasan yang dinotasikan dengan P_n merupakan graf terhubung sederhana yang membentuk lintasan terdiri dari n titik dan $n - 1$ sisi dengan $n \geq 2$. Kedua titik ujung pada graf ini merupakan daun *(pendant)*, karena titiknya berderajat satu.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)
Bilangan kromatik lokasi graf lintasan $P_n (n \geq 3)$ adalah 3.

Bukti :
Perhatikan bahwa $\chi_L(P_n) = 1$ dan $\chi_L(P_n) = 2$. Jelas bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Akibat 2.1 $\chi_L(G) \geq k + 1$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$, maka $\chi_L(P_n) \geq 2 + 1$. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq 3$. Jadi, terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ∎

Berikut adalah contoh pewarnaan lokasi pada graf lintasan.



Gambar 3. Pewarnaan pada graf lintasan P_n

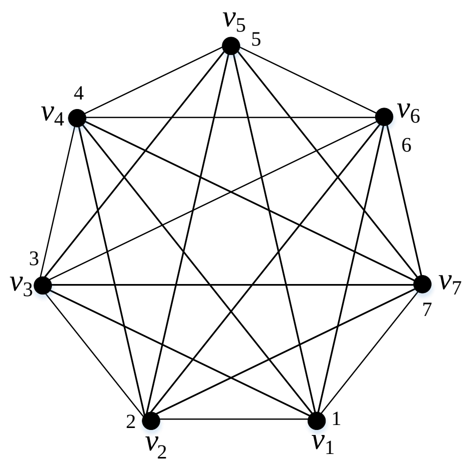
Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titik pada graf lengkap saling terhubung. Graf lengkap dengan n buah titik dilambangkan dengan K_n. Banyaknya sisi pada suatu graf lengkap adalah $n(n-1)/2$ dan setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$.

Teorema 2.3 (Chartrand dkk., 2002)
Bilangan kromatik lokasi graf lengkap K_n adalah n untuk $n \geq 2$.

Bukti :

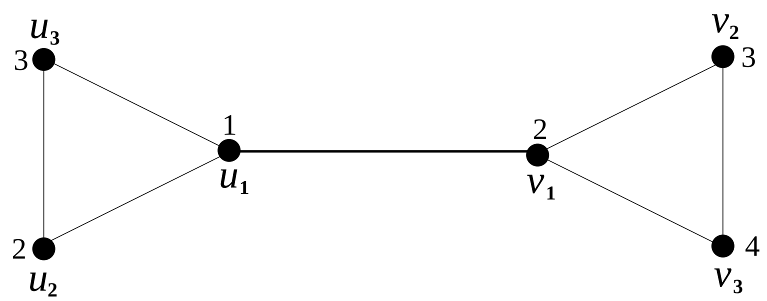
Karena setiap titik pada graf lengkap saling terhubung maka setiap titik diberi warna yang berbeda, jadi $\chi_L(K_n) = n$ untuk $n \geq 2$. ∎

Berikut adalah contoh pewarnaan pada graf lengkap.



Gambar 4. Pewarnaan lokasi pada graf lengkap K_7

Graf barbel (B_n) adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan graf lengkap yang dihubungkan dengan sebuah sisi untuk $n \geq 3$ dan n adalah bilangan asli (Ihwan dkk., 2014).



Gambar 5. Pewarnaan lokasi pada graf barbel $B_{3,3}$

Teorema 2.4 (Adriani dan Narwen, 2019)

Bilangan kromatik lokasi dari $P_n \odot K_m$ dengan $n \geq 1$ dan $m \geq 2$ sebagai berikut.

$$\chi_L(P_n \odot K_m) = \begin{cases} m+1\,, & \text{jika } n = 1; \\ m+2\,, & \text{jika } 2 \le n \le 2(m+2); \\ m+3, & \text{jika } n \ge \ 2(m+2)+1. \end{cases}$$

Bukti :

Setiap dua titik yang ada di K_{m_i}, harus dalam kelas warna yang berbeda. Selanjutnya karena x_i bertetangga dengan semua titik dari K_{m_i}, maka x_i haruslah berada dalam kelas warna yang berbeda dengan semua kelas warna di $V(K_{m_i})$. ∎

Pembuktian diberikan dalam dua kasus.

Kasus 1. $n = 1$

Akan dibuktikan bahwa untuk $n = 1$, bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \odot K_m$ adalah

$$\chi_L(P_1 \odot K_m) = m + 1.$$

Misalkan $V(P_1) = \{x_1\}$, $V(K_m) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ dan $E(K_m) = \{a_i a_j | i = 1{,}1 \le j \le m\}$. Karena P_i hanya terdiri dari satu titik, maka duplikat K_m hanya sebanyak satu buah. Selanjutnya $V(P_1 \odot K_m) = \{x_1, a_1, \dots, a_m\}$ dan $E(P_1 \odot K_m) = \{x_1 a_j \big| 1 \le i \le m\} \cup \{a_i a_j | i = 1{,}1 \le j \le m\}$.

Sesuai dengan definisi pada teorema 2.4 jika $\chi_L(P_1 \odot K_m) = m + 1$, maka diperoleh bahwa $P_1 \odot K_m \simeq K_{m+1}$. Karena K_{m+1} adalah graf lengkap dengan $m + 1$ titik, maka setiap dua titik di K_{m+1} bertetangga. Sesuai dengan definisi pewarnaan bahwa setiap dua titik bertetangga memiliki warna yang berbeda, maka untuk mewarnai $m+1$ titik di K_{m+1} dibutuhkan sebanyak $m + 1$warna, sehingga diperoleh bahwa :

$$\chi_L(P_n \odot K_m) = \chi_L(K_{m+1}) = m+1, \text{ untuk } n \ge 1.$$

Kasus 2. $2 \leq n \leq 2(m+2)$**.**

Akan dibuktikan bahwa untuk $2 \leq n \leq 2(m+2)$, bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \odot K_m$ adalah $\chi_L(P_n \odot K_m) = m+2$. Perhatikan bahwa:

$$V(P_n) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

$$V(K_{m_i}) = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{im} | 1 \leq i \leq n\}$$

$$= \{a_{ij} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

Definisikan $A_i = \{x_i\} \cup \{V(K_{m_i})\}$, atau himpunan yang berisi gabungan titik x_i dengan titik-titik yang ada di K_{m_i}, untuk $i = 1,2, \dots, n$.

Fakta 1.

Tidak ada bilangan bulat i dan j sehingga $c(A_i) = c(A_j)$, $c(x_i) \neq c(x_j)$. Hal ini benar, karena jika $j = i + 1$ dan $i = 1$ maka x_i dan a_{jk} untuk suatu k, akan memiliki kode warna yang sama. Jika $j = i + 1$ dan $i \neq 1$ maka salah satu titik (x_j dan a_{ik}) atau (a_{ik} dan a_{ji}), akan memiliki kode warna yang sama untuk suatu k, l.

Untuk membedakan titik x_i dengan titik dari K_{m_j}, diperoleh $x_{i-1} \in S_m$ atau $x_{i+1} \in S_m$. Dengan cara yang sama, akan diperoleh $x_{j-1} \in S_m$ atau $x_{j+1} \in S_m$. Oleh karena itu, terdapat dua titik a_{ik} dan a_{jl} dengan kode warna yang sama untuk suatu k, l.

Fakta 2.

Tidak ada bilangan bulat i,j, dan k sehingga $c(A_i) = c(A_j) = c(A_k)$ dan $c(x_i) = c(x_j) = c(x_k)$. Tanpa menghilangkan keumumann, misalkan $c(A_i) = [1, m+1]$ dan $c(x_i) = m$ untuk $i < j < k$, maka $j \geq i + 2$ dan $k \geq j + 2$. Jadi, $d(x_i, S_m) = 1$ atau 2. Ini menunjukkan bahwa kode warna dua titik yang berdeba dalam $\{x_i, x_j, x_k\}$ akan sama.

Dari dua fakta ini, dapat disimpulkan bahwa terdapatkan pewarnaan dengan $(m+2)$ warna di G, atau dituliskan $(m+2)-$ pewarnaan c di G. Jika $c(A_i) = c(A_j)$, untuk $i < j$, maka $c(x_i) = c(x_j)$ dan tidak dapat diperoleh tiga A_i dengan $c(A_i)$ yang sama. Oleh karena itu, sebuah $(m+2)-$ pewarnaan c hanya ada di G jika $n \leq 2(m+2)$.

Kasus 3. $n \geq 2(m+2)+1$

Akan ditunjukkan bahwa untuk $n \geq 2(m+2)+1$, bilangan kromatik lokasi dari graf $P_n \odot K_m$ adalah $\chi_L(P_n \odot K_m) = m+3$. Untuk menampilkan batas atas, definisikan pewarnaan $c : V(P_n \odot K_m) \to [1, m+3]$ sehingga:

$$c(x_i) = \begin{cases} m+3, & \text{jika } i = 1, \\ 2, & \text{jika } i \text{ genap}, \\ 3, & \text{jika } i \text{ ganjil}, i \neq 1 \end{cases}$$

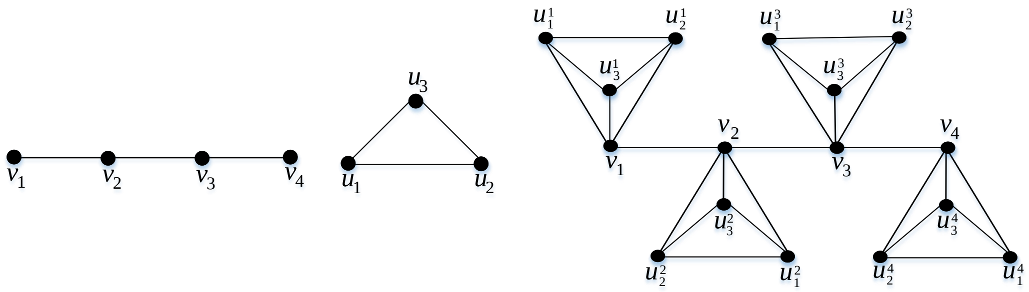
$$c(V(K_{mi})) = \begin{cases} [1, m], & \text{jika } i = 1, \\ [1, m+2] - \{2,3\}, & \text{jika selainnya.} \end{cases}$$

Untuk menunjukan bahwa c adalah pewarnaan lokasi di G, cukup dilihat kasus titik u, v seperti $d(u, x_1) = d(v, x_1)$. Ini berarti bahwa $u = a_{ik}$ dan $v = x_{i+1}$ untuk suatu i, k. Jika $i > 1$ maka u dan v harus dalam kelas warna yang berbeda di c. Jika $i = 1$ maka $d(u, s_{m+1}) \neq d(v, s_{m+1})$. Oleh karena itu, c adalah pewarnaan lokasi di G. ∎

2.3 Operasi Korona Graf

Operasi korona dari graf G dan graf H, dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari duplikat graf H sebanyak titik di graf G (duplikat graf H dinyatakan dengan $H_i, i = 1,2,3, \ldots, |V(G)|$ kemudian setiap titik ke-i di $V(G)$ bertetangga dengan setiap titik di H_i (Harary dan Fruch., 1970).

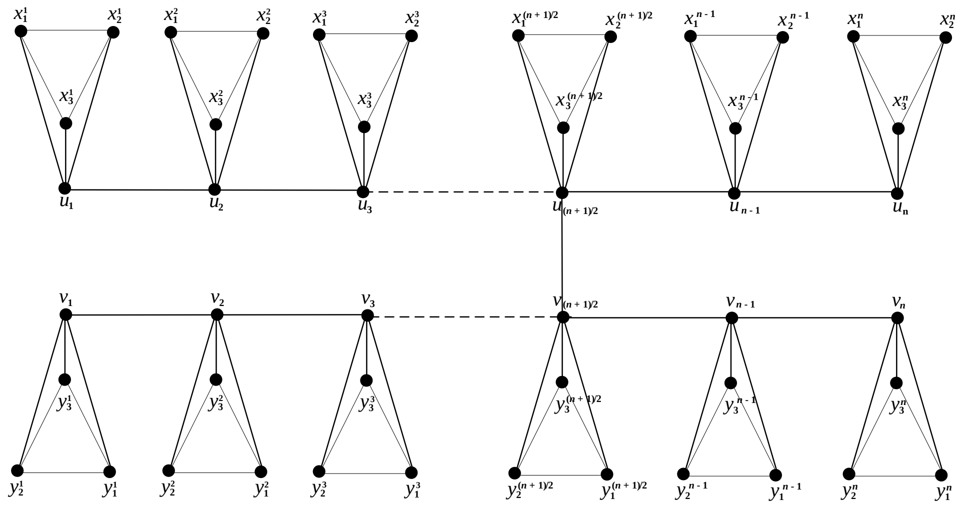
Berikut adalah contoh graf hasil operasi korona $P_4 \odot K_3$.



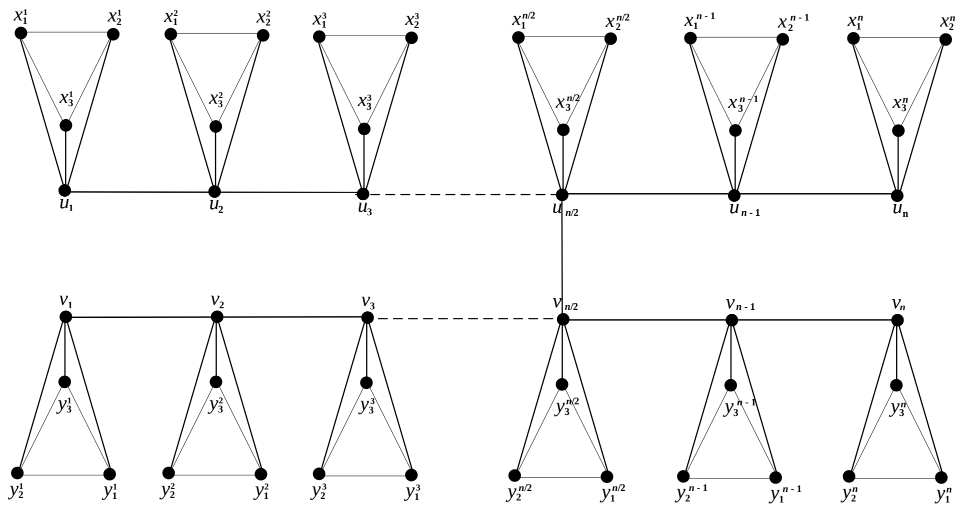
(a) (b) (c)

Gambar 6. (a) Graf lintasan P_4, (b) Graf lengkap K_3, (c) Graf hasil operasi korona $P_4 \odot K_3$

Graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap adalah graf yang diperoleh dari dua graf lintasan dan dua graf lengkap yang dihubungkan oleh suatu jembatan yaitu sisi, dinotasikan dengan $B_{(P_n \odot K_m)}$. Berikut adalah contoh dari graf $B_{(P_n \odot K_3)}$ untuk n ganjil dan n genap.



Gambar 7. Graf $B_{(P_n \odot K_3)}$untuk n ganjil



Gambar 8. Graf $B_{(P_n \odot K_3)}$untuk n genap

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini akan dilakukan pada semester genap tahun akademik 2021/2022 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap $B_{(P_n \odot K_m)}$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 3$ dengan menggunakan batas bawah trivial, karena graf tersebut memuat operasi korona antara graf lintasan dengan graf lengkap $P_n \odot K_m$ maka sekurang-kurangnya memuat warna dari graf tersebut.
2. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap $B_{(P_n \odot K_m)}$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 3$. Batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap $B_{(P_n \odot K_m)}$ dapat ditentukan dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi. Konstruksi dapat diawali dari pewarnaan pada titik-titik graf lintasan kemudian graf lengkap dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna dan minimum pewarnaan pada titik-titik graf tersebut yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.

3. Jika batas atas bilangan kromatik lokasi $\chi_L\left(B_{(P_n \odot\ K_m)}\right) \leq a$ dan batas bawah bilangan kroatik lokasi $\chi_L\left(B_{(P_n \odot\ K_m)}\right) \geq a$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L\left(B_{(P_n \odot\ K_m)}\right) = a$.
4. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika dan membuktikan hasil-hasil yang diperoleh.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bilangan kromatik lokasi graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dengan graf lengkap $B_{(P_n \odot K_m)}$ untuk $n \geq 1$ dan $m \geq 3$. Berikut adalah hasil yang telah diperoleh:

$$\chi_L\left(B_{(P_n \odot K_m)}\right) = \begin{cases} m+2, & \text{jika } n = 1; \\ m+2, & \text{jika } n = 2. \end{cases}$$

Selanjutnya, untuk $3 \leq n \leq m+2$ terdapat dugaan bahwa bilangan kromatik lokasi dari $B_{(P_n \odot K_m)}$ adalah $m+2$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf barbel yang memuat graf hasil operasi korona graf lintasan dan graf lengkap bersubdivisi sebanyak s titik dengan $s \in \mathbb{N}$.

DAFTAR PUSTAKA

Adriani, M., dan Narwen, N. 2019. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Pn o Km dengan n≥ 1 dan m≥ 2. *Jurnal Matematika UNAND*. **4(3)**:90-94.

Asmiati, Assiyatun H, Baskoro, ET, Suprijanto D, Simanjuntak R, Uttunggadewa S. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **3(1)**:11-23.

Asmiati, Assiyatun H, Baskoro ET. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.Sci*. **43A**: 1-8.

Asmiati, A., Ketut Sadha Gunce Yana, I., dan Yulianti, L. 2019. On the Locating Chromatic Number of Subdivision of Barbell Graphs Containing Generalized Petersen Graph. *IJCSNS International Journal of Computer Science and Network Security*. **19(7)**:45-50.

Asmiati. 2014. The locating-chromatic number of non-homogeneous amalgamation of stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **93(1)**: 89-96.

Baskoro, E. T., dan Purwasih, A. I. 2012. The locating-chromatic number for corona product of graphs. *Southeast Asian Journal of Sciences*. **1(1)**:126-136.

Chartrand G, Salehi E, Zhang P. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer*. **130**:157-168.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., dan Zhang, P. 2002. The locating-chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*. **36**:89-101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., dan Zhang, P. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number n− 1. *Discrete mathematics*. **269(1-3)**:65-79.

Deo, N. 1989. *Graph theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Harary, F. dan Fruch, R. 1970. On the Corona of Two Graphs. *Aequationes mathematicae*. **4**:264-264.

Harary F, Melter RA. 1976. On the metric dimension of a graph. *Ars Combinatori*. **2**:191-195.

Ihwan, M. D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear *Gn* dan Graf Barbel *Bn*. *Jurnal Gagasan Matematika dan Ilmu Informatika*. **5(1)**:39-50.

Muthia, I., dan Narwen, N. 2019. Bilangan Kromatik Lokasi untuk Graf Pn o Km dengan n≥ 1 dan m≥ 1. *Jurnal Matematika UNAND*, **4(4)**:43-48.