ALGORITMA DAN PEMROGRAMAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR 2-DIMENSI MENGGUNAKAN METODE NEWTON ORDE TIGA DAN METODE NEWTON-RAPHSON GANDA ORDE EMPAT

(Skripsi)

Oleh

DANU KUSUMA PUTRA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

ALGORITHM AND PROGRAMMING SOLUTIONS OF 2-DIMENSIONAL NONLINEAR EQUATION SYSTEMS USING THE THREE-ORDER NEWTON METHOD AND THE FOURTH-ORDER DOUBLE NEWTON-RAPHSON METHOD

By

Danu Kusuma Putra

In this paper, two numerical method algorithms are shown, namely the Third Order Newton Method and the Fourth Order Double Newton Raphson Method to solve a system of non-linear equations. To implement the algorithm, the Mathematica computer program has been used. To show the proposed algorithm works, an example of a non-linear system of equations is given in this paper. Based on the experimental results, the two algorithms provide a solution for a non-linear system of equations that approaches the root of the solution, but the Fourth Order Double Newton Raphson Method is better at finding the solution.

Kata kunci : Algorithm, Numerical Method, System Non-Linear Equation, Third Order Newton Method, Fourth Order Double Newton Raphson Method

ABSTRAK

ALGORITMA DAN PEMROGRAMAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR 2-DIMENSI MENGGUNAKAN METODE NEWTON ORDE TIGA DAN METODE NEWTON-RAPHSON GANDA ORDE EMPAT

Oleh

Danu Kusuma Putra

Pada skripsi ini, ditunjukkan dua algortima metode numerik yaitu Metode Newton Orde Tiga dan Metode Newton Raphson Ganda Orde Empat untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear. Untuk mengimplementasikan algortimanya, program komputer *Mathematica* telah digunakan. Untuk menunjukan algortima yang diusulkan bekerja, diberikan contoh sistem persamaan non linear dalam skripsi ini. Berdasarkan hasil percobaan, kedua algortima tersebut memberikan solusi sistem persamaan non linear yang menghampiri akar penyelesainnya namun Metode Newton Raphson Ganda Orde Empat lebih baik dalam mencari hasil solusinya.

Kata kunci : Algoritma, Metode Numerik, Sistem Persamaan Non Linear, Metode Newton Orde Tiga, Metode Newton Raphson Ganda Orde Empat.

ALGORITMA DAN PEMROGRAMAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR 2-DIMENSI MENGGUNAKAN METODE NEWTON ORDE TIGA DAN METODE NEWTON-RAPHSON GANDA ORDE EMPAT

Oleh

DANU KUSUMA PUTRA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
Sarjana Matematika

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **ALGORITMA DAN PEMROGRAMAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR 2-DIMENSI MENGGUNAKAN METODE NEWTON ORDE TIGA DAN METODE NEWTON-RAPHSON GANDA ORDE EMPAT**

Nama Mahasiswa : *Danu Kusuma Putra*

Nomor Pokok mahasiswa : **1817031057**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP. 196902131994021001	NIP. 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji:

Ketua	: **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**	....
Sekretaris	: **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T
NIP. 197407052000031001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **09 September 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Danu Kusuma Putra**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1817031057**
Jurusan	: **Matematika**
Judul	: **ALGORITMA DAN PEMROGRAMAN SOLUSI SISTEM PERSAMAAN NON LINEAR 2-DIMENSI MENGGUNAKAN METODE NEWTON ORDE TIGA DAN METODE NEWTON-RAPHSON GANDA ORDE EMPAT**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 09 September 2021
Penulis,

SEPULUH RIBU RUPIAH 10000 TGL. 20 METERAI TEMPEL 9F674AKX118347754

Danu Kusuma Putra
NPM. 1817031057

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lampung pada tanggal 13 Juni 2000, sebagai anak pertama dari tiga bersaudara, dari Bapak Sutarno dan Ibu Tri Rahayu.

Penulis menepuh pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) di TK Aisyah 1 Pringsewu diselesaikan tahun 2006, pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SD Muhammadiyah Pringsewu pada tahun 2012, pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) diselesaikan di SMPN 1 Pringsewu pada tahun 2015, dan pendidikan Sekolah Menengah Akhir (SMA) diselesaikan di SMAN 1 Pagelaran pada tahun 2018.

Pada tahun 2018 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswa penulis pernah bergabung menjadi Anggota Bidang Kaderisasi dan Kepemimpinan Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika periode 2019 dan Ketua Umum Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika periode 2020. Penulis juga pernah bergabung menjadi Kepala Dinas Pengembangan Sumber Daya Mahasiswa Badan Eksekutif Mahasiswa Periode 2021.

PERSEMBAHAN

Puji syukur kehadirat ALLAH SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya dalam menjalani kehidupan.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada:kedua orangtuaku yang sangat hebat yang tidak pernah putus mendoakan dan memotivasi putra sulungnya hingga tahap akhir penyelesaian skripsi ini. Terima kasih atas kemurahan hati pengertian, dan semua pengorbanan yang kalian lakukan hingga tingkat akhir pendidikanku.

Aku mengucap syukur atas kehadiran kalian kedua orang tuaku dihidupku.

KATA INSPIRASI

"Intinya satu jangan pernah berhenti mencoba dan tidak menyerah"

SANWACANA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan karunia serta kasih-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Algoritma Dan Pemrograman Solusi Sistem Persamaan Non Linear 2-Dimensi Menggunakan Metode Newton Orde Tiga Dan Metode Newton-Raphson Ganda Orde Empat". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Shalawat serta salam semoga selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang kita nantikan syafaatnya di yaumil akhir kelak.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Si. selaku pembimbing utama atas kesediaan waktu, pemikiran dalam memberikan evaluasi, arahan, dan saran yang membangun dalam proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku pembimbing kedua atas kesediaan waktu, saran, dan arahan selama proses penyusunan skripsi ini.

3. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku dosen penguji atas kesediaan waktu, saran, dan masukan yang membangun selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Para Dosen dan Staf Jurusan Metematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Papa, Mama, dan adik-adikku yang selalu mendoakan, mendukung, dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan perkuliahan.
8. Wahyu, Robby, Ulul, dan Syahrul sahabat-sahabatku atas keceriaan, pengalaman, dan dukungan yang diberikan kepada penulis.
9. Bang Desfan teman sekosan yang selalu membantu dan membimbing saya selama dijurusan Matematika.
10. Rendi teman perjalanan saya yang selama ini menemani disaat kejenuhan melanda.

11. Riska dan Sherli yang pernah membantu saya dalam mengerjakan skripsi ini.
12. Pimpinan HIMATIKA Periode 2020 yang memberi dukungan moral selama ini.
13. Teman-teman mahasiswa jurusan matematika angkatan 2018 serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 09 September 2021
Penulis,

Danu Kusuma Putra

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Persoalan yang melibatkan model matematika sangat banyak muncul di dalam berbagai disiplin ilmu pengetahuan, seperti bidang fisika, kimia, ekonomi, atau pada persoalan rekayasa. Model matematika tersebut muncul dalam bentuk yang tidak dapat diselesaikan dengan metode analitik untuk mendapatkan solusi sejati. Dalam mengatasi masalah itu diperlukan metode numerik untuk menentukan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitisnya. Banyak metode numerik yang telah dikembangkan untuk menyelesaikan persoalan non linear seperti, Biseksi, Secant, Newton Raphson dan lain-lain. Akan tetapi metode-metode tersebut tidak selamanya bisa digunakan dalam menyelesaikan persoalan yang ada. Misalnya metode Newton Raphson dan Secant yang tidak selalu konvergen jika nilai awal yang diberikan salah. Meskipun telah dilakukan beberapa perbaikan pada metode-metode tersebut.

Pada tahun 2017 penelitian yang dilakukan oleh Yudhi, dkk tentang modifikasi metode newton-raphson untuk mencari solusi persamaan linear dan non linear menemukan bahwa metode Newton-Raphson dapat dimodifikasi dalam mencari solusi persamaan tidak menggunakan turunan pertama. Pada modifikasi ini, metode Newton-Raphson diubah menjadi bentuk selisih terbagi (Yudhi, dkk., 2017).

Pada tahun 2018 penelitian yang dilakukan oleh Batarius tentang nilai awal pada metode Newton Raphson yang dimodifikasi dalam penentuan akar persamaan. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh penentuan nilai awal pada metode Newton Raphson yang dimodifikasi dalam menentukan akar persamaan yang memiliki satu akar tunggal dan dua akar ganda atau lebih (Batarius, 2018).

Pada tahun 2020 penelitian yang dilakukan oleh Megarani, dkk menyajikan sebuah algoritma metode Newton Raphson yang dimodifikasi untuk menyelesaikan suatu persamaan fuzzy non linear. Dalam penelitian digunakan Matlab sehingga persamaan tersebut dapat diselesaikan dengan seakurat dan sesingkat mungkin dibandingkan dengan metode yang lain (Megarani,dkk., 2020).

Dengan adanya berbagai macam metode penelitian metode Newton Raphson, muncul ketertarikan untuk mengkaji lebih dalam metode Newton Raphson dimana pada penelitian ini akan dikaji salah satu pengembangan pendekatan numerik untuk mencari nilai-nilai yang memenuhi sistem persamaan non linear, yaitu pada metode Newton Raphson, yang dikembangkan menjadi metode Newton Orde Tiga dan Metode Newton-Raphson Ganda Orde Empat. Orde disini akan menjelaskan kecepatan iterasi sebuah metode Newton dalam mencari akar-akar penyelesaian sistem persamaan non linear. Dengan menentukan algoritma dan implementasinya, sistem persamaan non linear akan dapat diselesaikan dengan pendekatan yang lebih akurat dan dalam waktu yang lebih singkat dengan metode yang sudah ada.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui kinerja dan efektivitas metode Newton Orde Tiga dan Metode Newton-Raphson Ganda Orde Empat dalam menyelesaikan sistem persamaan non linear.

1.3 Manfaat Penelitian

Dari penelitian ini diharapkan dapat memberi manfaat diantaranya:

1. Memperluas pengetahuan pengembangan keilmuan khususnya dalam bidang ilmu matematika mengenai perkembangan dari metode numerik.
2. Sebagai referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika khususnya di bidang metode numerik.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Non Linear dan Sistem Persamaan Non Linear

Persamaan non linear dapat diartikan sebagai persamaan yang memiliki derajat suku 2 atau lebih dan jika dibuat grafik akan membentuk kurva atau garis yang tidak lurus. Misalkan $f(\mathbf{x})$ adalah suatu fungsi kontinu. Setiap bilangan $\mathbf{x}$ pada domain f yang memenuhi $f(\mathbf{x})=0$ disebut akar persamaan atau disebut juga pembuat nol fungsi $f(\mathbf{x})$. Secara singkat, $\mathbf{x}$ disebut akar fungsi $f(\mathbf{x})$ (Maharani & Suprapto, 2018).

Di kehidupan sehari-hari, umumnya model matematika muncul dalam bentuk sistem persamaan. Persamaan yang diselesaikan tidak hanya satu, tetapi dapat lebih dari satu, sehingga membentuk sebuah sistem yang disebut sistem persamaan non linear. Bentuk umum sistem persamaan non linear dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{gathered} f_1(x_1, x_2, \ ..., x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \ ..., x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, x_2, \ ..., x_n) = 0 \end{gathered} \tag{1}$$

Penyelesaian sistem ini adalah himpunan nilai $\mathbf{x}$ simultan, $x_1, x_2, \ ..., x_n$, yang memenuhi seluruh persamaan (Munir, 2015).

Sistem persamaan (1) dengan fungsi $f_i; = 1, 2, ..., n$ merupakan fungsi yang memetakan dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(f_1(x_1, x_2, ..., x_n), f_2(x_1, x_2, ..., x_n), ..., f_n(x_1, x_2, ..., x_n)\right)^T \qquad (2)$$

Jika variabel $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ merupakan suatu vektor yang digunakan untuk menjelaskan sistem persamaan (1) maka persamaan tersebut dapat ditulis dengan bentuk sebagai berikut:

$$F(\mathbf{x}) = 0 \qquad (3)$$

Fungsi $f_1, f_2, ..., f_n$ disebut dengan koordinat fungsi dari F (Burden & Faires, 1997).

Salah satu contoh persamaan non linear adalah persamaan kuadrat. Bentuk umum dari persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$.

Contoh: Tentukan akar persamaan non linear dari $x^2 - 5x + 6 = 0$

Jawab: $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$ (diselesaikan secara analitik).

Akar-akar tersebut memberikan nilai-nilai yang menjadikan persamaan itu sama dengan nol. Namun untuk bentuk-bentuk persamaan non linear dengan derajat lebih dari dua, terkadang akan ditemukan kesulitan untuk mendapatkan akar-akarnya. Maka dari itu, dibutuhkan metode numerik untuk dapat dicari akar-akar penyelesainnya (Pandia & Sitepu, 2021).

2.2 Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segiempat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut anggota dalam matriks tersebut. Beberapa contoh bentuk matriks sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Ukuran matriks diberikan oleh jumlah baris (garis horizontal) dan kolom (garis vertikal) yang dikandungnya. Misalnya matriks yang mempunyai tiga baris dan dua kolom, sehingga ukurannya adalah 3 kali 2 atau ditulis 3×2.
Dalam suatu uraian ukuran, angka pertama selalu menyatakan jumlah baris dan angka kedua menyatakan jumlah kolom (Anton, 2000).

Sebuah matriks dinotasikan dengan simbol kapital seperti $A_1, A_2, ..., A_n$ atau $A, B, ..., X, Y, Z$ dan sebagainya. Sebuah matriks *A* yang berukuran m baris dan n kolom dapat ditulis sebagai berikut:

$$A_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Atau juga dapat ditulis:

$$A = \left[a_{ij} \right] \quad i = 1, 2, ..., m; \quad j = 1, 2, ..., n \quad (6)$$

Matriks *A* disebut matriks m x n, karena terdiri dari m baris dan n kolom. Setiap a_{ij} disebut elemen (unsur) dari matriks *A*, sedangkan indeks *i* dan *j* berturut-turut menyatakan baris dan kolom. Jadi elemen a_{ij} terdapat pada baris ke-*i* dan kolom ke-*j*. Pasangan bilangan (m, n) disebut dimensi (ukuran atau bentuk) dari matriks *A*. Contoh:

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Disebut matriks A dengan 2 baris dan 3 kolom. Jika A sebuah matriks, maka digunakan a_{ij} untuk menyatakan elemen yang terdapat di dalam baris i dan kolom j dari A. Dalam contoh ini $i = 1, 2.$ dan $j = 1, 2, 3.$ atau dapat ditulis

$$A = \left(a_{ij}\right) \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3. \tag{8}$$

(Supranto, 2003).

2.2.1 Invers Matriks

Jika A adalah sebuah matriks bujur sangkar, dan jika sebuah matriks B yang berukuran sama bisa didapatkan sedemikian sehingga $AB = BA = I$, maka A disebut bisa dibalik dan B disebut invers dari A.

Contoh

Matriks $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ adalah invers dari $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ karena $AB = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ dan $BA = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

Teorema

Jika B dan C keduanya invers matriks A, maka $B = C$.

Bukti. Karena B adalah invers dari A, maka $BA = I$. Mengalikan kedua ruas pada sisi kanan dengan C memberikan $\left(BA\right)C = IC = C.$ Tetapi $\left(BA\right)C = B\left(AC\right) = BI = B,$ sehingga $C = B$.

Jika A bisa dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan simbol A^{-1}. Jadi,

$$AA^{-1} = I \quad \text{dan} \quad A^{-1}A = I \tag{9}$$

Q.E.D.

Invers dari A memainkan peran sama dalam aritmatika matriks seperti a^{-1} dalam hubungan numerik $aa^{-1} = 1$ dan $a^{-1}a = 1$. Selanjutnya akan dikembangkan suatu metode untuk menemukan invers dari matriks-matriks berukuran sebarang yang dapat dibalik; akan tetapi, teorema berikut memberikan syarat agar matriks 2×2 bisa dibalik dan memberikan suatu rumus sederhana untuk mencari inversnya.

Matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$ atau yang disebut determinan matriks A, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{10}$$

(Anton, 2000).

Matriks adjoin A adalah transpose dari matriks kofaktor (K) dimana jika A adalah matriks bujur sangkar berukuran $n \times n$. Maka kofaktor (K) dari matriks A:

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{21} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \tag{11}$$

dimana, $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ (Ruminta, 2009).

2.2.2 Matriks Jacobian

Pandang sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ ..., x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ ..., x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \ ..., x_n) \end{aligned} \tag{12}$$

Maka dengan menghitung turunan parsial masing-masing $f_1, f_2, ..., f_n$. didapatkan bentuk matriks Jacobiannya sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{13}$$

Matriks diatas adalah matriks yang berukuran $n \times n$, matriks ini sering kali ditulis sebagai matriks $J(x)$ (Ruminta, 2009).

2.3 Deret Taylor

Misalkan f fungsi yang turunan ke-$(n+1)$, $f^{(n+1)}(x)$ ada untuk masing-masing x dalam interval terbuka I yang mengandung a. Maka untuk masing-masing x dalam I ,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O_n(x) \tag{14}$$

dengan sisa (atau galat) $O_n(x)$ diberikan oleh rumus

$$O_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{15}$$

dan c suatu titik di antara x dan a (Purcell, dkk., 2008).

2.4 Metode Numerik

Analisis numerik adalah cara lain untuk menyelesaikan masalah matematika selain dengan analisis analitik menggunakan bantuan komputer, analisis ini banyak digunakan oleh para ilmuwan dan insinyur untuk memecahkan masalah model matemtika. Keuntungan utama untuk analisis numerik adalah penyelesaian numerik dapat diperoleh bahkan ketika persoalan matematika tidak memiliki solusi "analitis". Misalnya integral berikut yang memberikan panjang satu lengkungan kurva $y = \sin(x)$ yang tidak memiliki solusi bentuk tertutup:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos^2(x)}\,dx \tag{16}$$

Analisis numerik dapat menghitung panjang kurva ini dengan metode standar yang berlaku untuk integral apa pun, tidak ada kebutuhan khusus untuk membuat substitusi atau melakukan integrasi pada bagian-bagian tertentu untuk mendapatkan hasil. Selanjutnya, operasi matematika yang diperlukan adalah penambahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian ditambah juga dengan pembuatan perbandingan. Dengan bantuan komputer, analisis numerik menjadi kombinasi yang sempurna karena operasi ini akan dapat dengan mudah ditemukan saat iterasi dilakukan secara otomatis oleh program komputer.

Penting untuk disadari bahwa solusi analisis numerik selalu numerik, maksudnya metode analitik biasanya memberikan hasil dalam bentuk fungsi matematika yang kemudian dapat dievaluasi untuk contoh tertentu. Untuk hasil analitik, dalam perilaku dan sifat-sifat fungsi sering terlihat, ini bukan kasus untuk hasil numerik murni. Namun, hasil numerik dapat diplotkan untuk menunjukkan beberapa perilaku solusi.

Perbedaan penting lainnya adalah bahwa hasil dari analisis numerik merupakan perkiraan, tetapi hasil dapat dibuat seakurat yang diinginkan. (ada batasan tingkat akurasi yang dapat dicapai karena cara komputer dalam melakukan aritmatika.) untuk mencapai akurasi tinggi banyak operasi terpisah harus dilakukan, tetapi bukan menjadi masalah yang berarti karena komputer melakukannya dengan sangat cepat tanpa pernah membuat kesalahan. Sebenarnya, mengevaluasi hasil analisis untuk mendapatkan jawaban numerik bisa dilakukan dengan menggunakan aplikasi tertentu walaupun hasilnya akan memiliki kesalahan yang sama juga. Analisis kesalahan komputer dan sumber kesalahan lain dalam metode numerik adalah bagian yang sangat penting dari studi analisis numerik (Gerald & Wheatley, 1994).

2.5 Metode Penentuan Nilai Akar

Dalam metode numerik, pencarian akar $f\left(x\right)=0$ dilakukan secara iteratif. Sampai saat ini sudah banyak ditemukan metode pencarian akar. Secara umum, semua metode pencarian akar tersebut dapat dikelompokkan menjadi dua golongan besar:

2.5.1 Metode Tertutup *(Bracketing Method)*

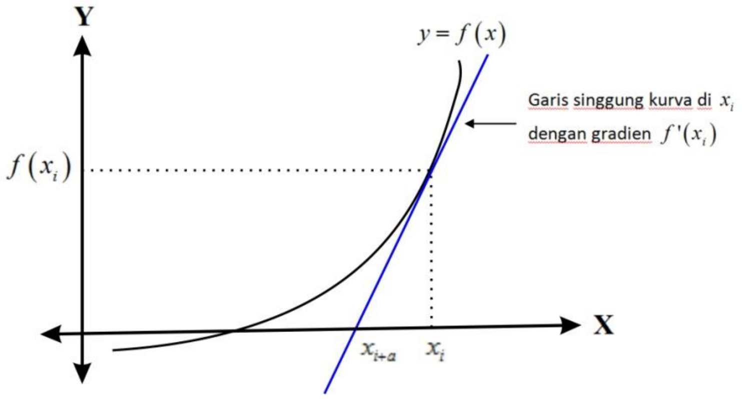
Metode yang termasuk ke dalam golongan ini mencari akar di dalam selang [*a*,*b*]. Selang [*a*,*b*] dipastikan berisi minimal satu buah akar, karena itu metode jenis ini selalu berhasil menemukan akar. Dengan kata lain, iterasinya selalu konvergen (menuju) ke akar, karena itu metode tertutup kadang-kadang dinamakan juga metode konvergen. Ada dua metode klasik yang termasuk ke dalam metode tertutup, yaitu metode bagi-dua dan metode regula-falsi (Munir, 2015).

2.5.2 Metode Terbuka

Berbeda dengan metode tertutup, metode terbuka tidak membutuhkan selang [*a*,*b*] yang mengandung akar, tetapi yang diperlukan adalah tebakan (guest) awal akar. Lalu, dengan prosedur iterasi, kita menggunakannya untuk menghitung hampiran akar yang baru. Pada setiap kali iterasi, hampiran akar yang lama dipakai untuk menghitung hampiran akar yang baru. Mungkin saja hampiran akar yang baru mendekati akar sejati (konvergen), atau mungkin juga menjauhinya (divergen). Karena itu, metode terbuka tidak selalu berhasil menemukan akar, kadang-kadang konvergen, kadangkala ia divergen. Ada beberapa metode yang termasuk ke dalam metode terbuka, yaitu metode Newton-Raphson dan metode Secant (Munir, 2015).

2.6 Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson merupakan metode yang banyak digunakan dari semua formula penempatan akar. Metode ini bisa digunakan jika nilai awal dari akar adalah x_i, sebuah garis singgung dapat diperluas dari titik $\left[x_i, f\left(x\right)\right]$. Titik di mana garis singgung ini memotong sumbu x biasanya menunjukan sebuah taksiran perbaikan dari akar.



Gambar 1. Grafik Metode Newton-Raphson

Metode Newton-Raphson dapat diturunkan berdasarkan interpretasi geometrik (sebuah metode alternatif yang didasarkan pada deret taylor). Seperti pada Gambar 1, turunan pertama pada x_i ekuivalen terhadap kemiringan (slope):

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - 0}{x_i - x_{i+1}}, \tag{17}$$

yang dapat diatur kembali menjadi:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{18}$$

maka dinamakan formula Newton Raphson (Chapra & Canale, 2010).

Dalam mencari hampiran akar-akar $f(x) = 0$ menggunakan rumus iterasi metode Newton-Raphson maka dibutuhkan titik awal sebagai tebakan awal, dan selanjutnya untuk iterasinya menggunakan persamaan (17).

Kondisi berhentinya iterasi metode Newton-Raphson dapat dilakukan dengan cara pembatasan pada banyaknya iterasi atau dengan cara memperhatikan galat, yakni apabila

$$\left|x_{n+1}-x_n\right|<\varepsilon, \tag{19}$$

dimana ε merupakan toleransi galat yang diinginkan (Stalis, 2009).

2.7 Metode Newton Orde Tiga

Modifikasi metode Newton diperoleh dari pengembangan metode Newton dengan menambahkan satu langkah. Langkah pertama untuk mengkontruksi modifikasi metode Newton dengan pendekatan integral, yaitu:

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}_n)+\int_{\mathbf{y}_n}^{\mathbf{x}} f'(t)\,dt, \tag{20}$$

dengan,

$$\mathbf{y}_n=\mathbf{x}_n+\frac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)},\ \text{untuk}\ f'(\mathbf{x}_n)\neq 0. \tag{21}$$

Pandang persamaan (20), yaitu bagian integral

$$\int_{\mathbf{y}_n}^{\mathbf{x}} f'(t)\,dt. \tag{22}$$

Bagian integral (22) dihampiri dengan metode titik tengah, yaitu

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{y}_n}^{\mathbf{x}} f'(t)\,dt &\approx (\mathbf{x}-\mathbf{y}_n)\, f'\left(\mathbf{y}_n+\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{y}_n)\right)\\ \int_{\mathbf{y}_n}^{\mathbf{x}} f'(t)\,dt &\approx (\mathbf{x}-\mathbf{y}_n)\, f'\left(\frac{\mathbf{y}_n+\mathbf{x}}{2}\right)\end{aligned} \tag{23}$$

Persamaan (23) disubtitusikan ke persamaan (20) diperoleh:

$$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{y}_n)+(\mathbf{x}-\mathbf{y}_n)\, f'\left(\frac{\mathbf{x}+\mathbf{y}_n}{2}\right)$$

Misal $\mathbf{x}=\mathbf{x}_{n+1}$ dengan $f(\mathbf{x}_{n+1})=0$. Sehingga:

$$\mathbf{x}_{n+1}=\mathbf{y}_n-\frac{f(\mathbf{y}_n)}{f'\left(\frac{\mathbf{x}_{n+1}+\mathbf{y}_n}{2}\right)}, \tag{24}$$

dengan

$$\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \frac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)} \tag{25}$$

Karena persamaan (24) memuat pada bagian, maka dapat dimisalkan

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^*_{n+1} \tag{26}$$

Nilai dari $\mathbf{x}^*_{n+1}$ dapat diperoleh dengan metode Newton, yaitu:

$$\mathbf{x}^*_{n+1} = \mathbf{x}_n - \frac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)} \tag{27}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{x}_{n+1} + \mathbf{y}_n}{2} &= \frac{\mathbf{x}^*_{(n+1)} + \mathbf{y}_n}{2} \\ &= \frac{\mathbf{x}_n - \dfrac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)} + \mathbf{y}_n}{2} \\ &= \mathbf{x}_n \end{aligned} \tag{28}$$

Jadi persamaan (24) dapat disederhanakan menjadi dua langkah, yaitu:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_n &= \mathbf{x}_n + \frac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)}, \\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{y}_n - \frac{f(\mathbf{y}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)}\end{aligned} \tag{29}$$

Pada persamaan non linear $f(\mathbf{x}) = 0$, metode Newton-Raphson memerlukan turunan dari fungsi $f(\mathbf{x})$ yaitu $f'(\mathbf{x})$ untuk setiap iterasinya. Sedangkan untuk menyelesaikan persoalan persamaan yang lebih dari satu atau sistem persamaan non linear $F(\mathbf{x}) = 0$ metode Newton-Raphson memerlukan matriks Jacobian $J(\mathbf{x})$ untuk setiap iterasinya. Matriks Jacobian tersebut digunakan sebagai pengganti turunan fungsi $F(\mathbf{x})$ atau dalam matematika ditulis $F'(\mathbf{x})$, dengan syarat matriks $J(\mathbf{x})$ adalah matriks nonsingular.

Rumus metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut :

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{n-1} - J^{-1}(\mathbf{x}_{n-1}) F(\mathbf{x}_{n-1}) \tag{30}$$

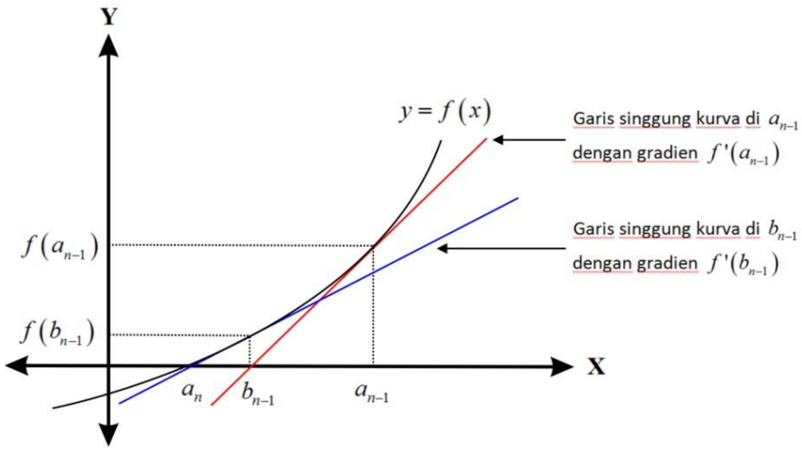
Berdasarkan persamaan diperoleh rumus metode Newton Orde Tiga untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_n &= \mathbf{x}_n + J^{-1}(\mathbf{x}_n)F(\mathbf{x}_n)\\ \mathbf{x}_{n+1} &= \mathbf{y}_n - J^{-1}(\mathbf{x}_n)F(\mathbf{y}_n)\end{aligned} \tag{31}$$

(Rahayu, dkk., 2020).

2.8 Metode Newton Raphson Ganda

Metode Newton-Raphson Ganda merupakan salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan non linear dengan orde konvergensi empat. Untuk menurunkan metode Newton-Raphson Ganda digunakan pendekatan secara geometri yang dapat dilihat pada gambar.



Gambar 2. Tafsiran Geometri Metode Newton-Raphson Ganda

Berdasarkan gambar, garis singgung kurva di a_{n-1}, dengan gradien garis singgungnya adalah

$$f'(A_{n-1}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(A_{n-1}) - 0}{A_{n-1} - B_{n-1}} \tag{32}$$

atau

$$f'(A_{n-1}) = \frac{f(A_{n-1})}{A_{n-1} - B_{n-1}} \tag{33}$$

Sedangkan untuk garis singgung kurva di b_{n-1}, dengan gradien garis singgungnya adalah

$$f'(B_{n-1}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(B_{n-1}) - 0}{B_{n-1} - A_n} \tag{34}$$

atau

$$f'(B_{n-1}) = \frac{f(B_{n-1})}{B_{n-1} - A_n} \tag{35}$$

Berdasarkan persamaan (33) dan (35) maka diperoleh rumus metode Newton-Raphson Ganda sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= A_{n-1} - \frac{f(A_{n-1})}{f'(A_{n-1})}, \ f'(A_{n-1}) \neq 0 \\ \mathrm{A}_n &= B_{n-1} - \frac{f(B_{n-1})}{f'(B_{n-1})}, \ f'(B_{n-1}) \neq 0 \end{aligned} \tag{36}$$

Pada persamaan non linear $f(x) = 0$, metode Newton-Raphson memerlukan turunan dari fungsi $f(x)$ yaitu $f'(x)$ untuk setiap iterasinya. Sedangkan untuk menyelesaikan persoalan persamaan yang lebih dari satu atau sistem persamaan non linear $F(x) = 0$ metode Newton-Raphson memerlukan matriks Jacobian $J(x)$ untuk setiap iterasinya. Matriks Jacobian tersebut digunakan sebagai pengganti turunan fungsi $F(x)$ atau dalam matematika ditulis $F'(x)$, dengan syarat matriks $J(x)$ adalah matriks nonsingular. Rumus metode Newton-Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$X_n = X_{n-1} - J^{-1}(X_{n-1}) F(X_{n-1}) \tag{37}$$

Berdasarkan persamaan diperoleh rumus metode Newton-Raphson Ganda untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= A_{n-1} - J^{-1}(A_{n-1}) F(A_{n-1}) \\ A_n &= B_{n-1} - J^{-1}(B_{n-1}) F(B_{n-1}) \end{aligned} \tag{38}$$

(Devitriani, dkk., 2019).

2.9 Tingkat Orde Metode Iterasi

Tingkat orde metode iterasi merupakan kecepatan suatu metode iterasi dalam menemukan akar-akar secara hampiran dari persamaan fungsi f .

Teorema

Misalkan barisan $x_1, x_2, ..., x_n$ konvergen terhadap α dan $e_n := x_n - \alpha$ dimana $n \geq 0.$ Jika orde metode iterasi $p > 0$ dan konstanta galat $C \neq 0$, dengan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - \alpha|}{|x_n - \alpha|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = C \tag{39}$$

maka barisan $\{x_n\}$ konvergen terhadap α dengan orde konvergensi p (Mathews, 1992).

Jika $p = 1$ maka metode iterasi memiliki orde linier.

Jika $p = 2$ maka metode iterasi memiliki orde kuadratik.

Jika $1 < p < 2$ maka metode iterasi memiliki orde superlinier (Senning, 2019).

Jika $p = 3$ maka metode iterasi memiliki orde kubik (Kasturiarachi, 2002).

Apabila $e_n = x_n - \alpha$ adalah notasi kesalahan (galat) pada iterasi ke-n pada suatu metode numerik yang menghasilkan suatu barisan $\{x_n\}$, maka suatu persamaan :

$$e_{n+1} = ce_n^p + O\left(e_n^{p+1}\right) \tag{40}$$

disebut persamaan galat pada iterasi ke-(n+1) dan c merupakan konstanta kesalahan asimtotik atau disebut juga koefisien orde galat ke-*p* (Mathews, 1992).

Berikut cara memperoleh orde metode iterasi dari suatu metode numerik.

2.9.1 Tingkat Orde Metode Newton-Raphson

Rumus iterasi metode Newton, yakni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{41}$$

Subtitusi $x_n = \alpha + e_n$ pada persamaan (41) diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\alpha + e_n)}{f'(\alpha + e_n)} \tag{42}$$

Perluasan $f(\alpha + e_n)$ dan $f'(\alpha + e_n)$ dalam deret Taylor sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= e_n - \frac{\left[e_n f'(\alpha) + \frac{1}{2} e_n^2 f''(\alpha) + \cdots\right]}{f'(\alpha) + e_n f''(\alpha) + \cdots} \\ &= e_n - \left[e_n + \frac{1}{2} e_n^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \cdots\right]\left[1 + e_n \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + \cdots\right]^{-1} \\ &= \frac{1}{2} e_n^2 \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} + O\left(e_n^3\right) \end{aligned} \tag{43}$$

Sehingga diperoleh

$$e_{n+1} = C e_n^2 \tag{44}$$

dimana

$$C = \frac{1}{2} \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \tag{45}$$

Dengan demikian tingkat orde metode Newton-Raphson adalah kuadratik (Kumar & Vipan, 2015).

2.9.2 Tingkat Orde Metode Newton Orde 3

Teorema: Misalkan bahwa fungsi $F : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memiliki $x^* \in D$ akar sederhana, dimana D adalah interval terbuka. Jika $f(x)$ memiliki turunan pertama, kedua dan ketiga dalam interval D, maka metode yang didefinisikan konvergen secara kubik ke x^* di daerah x^*.

Bukti. Diberikan $e_n = \mathbf{x}_n - x^*$ dan $d_n = \mathbf{y}_n - \mathbf{x}_n$, dimana $\mathbf{y}_n = \mathbf{x}_n + \dfrac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)}$.

Menggunakan deret Taylor, maka

$$f(x^*) = f(\mathbf{x}_n) - f'(\mathbf{x}_n)e_n + \frac{1}{2}f''(\mathbf{x}_n)e_n^2 - \frac{1}{6}f^{(3)}(\mathbf{x}_n)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{46}$$

Karena $f(x^*) = 0$, maka

$$f(\mathbf{x}_n) = f'(\mathbf{x}_n)e_n - \frac{1}{2}f''(\mathbf{x}_n)e_n^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\mathbf{x}_n)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{47}$$

Selanjutnya,

$$d_n = \frac{f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)} = e_n - \frac{1}{2}\frac{f''(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)}e_n^2 + \frac{1}{6}\frac{f^{(3)}(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)}e_n^3 + O(e_n^4). \tag{48}$$

Kemudian, deret Taylor dari $f(\mathbf{y}_n)$ terhadap $\mathbf{x}_n$ adalah

$$f(\mathbf{y}_n) = f(\mathbf{x}_n) + f'(\mathbf{x}_n)d_n + \frac{1}{2}f''(\mathbf{x}_n)d_n^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\mathbf{x}_n)d_n^3 + O(d_n^4). \tag{49}$$

lalu kita punya

$$f(\mathbf{y}_n) - f(\mathbf{x}_n) = f'(\mathbf{x}_n)d_n + \frac{1}{2}f''(\mathbf{x}_n)d_n^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(\mathbf{x}_n)d_n^3 + O(d_n^4). \tag{50}$$

Subtitusikan (48) ke (50), maka

$$f(\mathbf{y}_n) - f(\mathbf{x}_n) = f'(\mathbf{x}_n)e_n - \frac{1}{2}\frac{f''(\mathbf{x}_n)^2}{f'(\mathbf{x}_n)}e_n^3 + \frac{1}{3}f^{(3)}(\mathbf{x}_n)e_n^3 + O(e_n^4). \tag{51}$$

diperoleh

$$e_{n+1} = e_n - \frac{f(\mathbf{y}_n) - f(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)} = \frac{f'(\mathbf{x}_n)e_n - \left(f(\mathbf{y}_n) - f(\mathbf{x}_n)\right)}{f'(\mathbf{x}_n)}, \tag{52}$$

Subtitusikan (51) ke (52), maka

$$e_{n+1} = \frac{1}{2}\frac{f''(\mathbf{x}_n)^2}{f'(\mathbf{x}_n)^2}e_n^3 - \frac{1}{3}\frac{f^{(3)}(\mathbf{x}_n)}{f'(\mathbf{x}_n)}e_n^3 + O\left(e_n^4\right). \tag{53}$$

Kemudian

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e_{n+1}}{e_n^3} = \frac{1}{2}\frac{f''\left(x^*\right)^2}{f'\left(x^*\right)^2} - \frac{1}{3}\frac{f^{(3)}\left(x^*\right)}{f'\left(x^*\right)}, \text{ untuk } f'\left(x^*\right) \neq 0. \tag{54}$$

Jadi, terbukti bahwa persamaan ini memiliki tingkat orde kubik (Rahayu, dkk., 2020).

2.9.3 Tingkat Orde Metode Newton-Raphson Ganda

Teorema: Misalkan $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi yang mempunyai turunan pada interval *D*. misalkan juga *F* mempunyai akar sederhana $\alpha \in D$. Jika diberikan nilai awal A_0 cukup dekat ke α maka metode iterasi persamaan Newton Raphson Ganda mempunyai tingkat orde empat dan memenuhi persamaan galat:

$$E_n = C_2^* C_2^2 E_{n-1}^4 + O\left(\left\|E_{n-1}^5\right\|\right) \tag{55}$$

dengan $C_j = \dfrac{F'\left(A_{n-1}\right)^{-1} F^{(j)}\left(A_{n-1}\right)}{j!}$

dan $C_j^* = \dfrac{F'\left(B_{n-1}\right)^{-1} F^{(j)}\left(B_{n-1}\right)}{j!}$, $j \geq 1$ dan $E_{n-1} = A_{n-1} - \alpha$

Bukti: Misalkan $\alpha \in D$ dimana α merupakan akar dari $F(A)$, maka $F(\alpha) = 0$ dan $F'(\alpha)$ merupakan matriks nonsingular. Deret Taylor dari $F(A)$ disekitar $A = A_{n-1}$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} F(A) &= F\left(A_{n-1}\right) + F'\left(A_{n-1}\right)\left(A - A_{n-1}\right) + \frac{1}{2!}F''\left(A_{n-1}\right)\left(A - A_{n-1}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}F'''\left(A_{n-1}\right)\left(A - A_{n-1}\right)^3 + \cdots \end{aligned} \tag{56}$$

Karena α merupakan akar dari $F(A)$, maka $F(\alpha)=0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} F(A_{n-1}) &= F'(A_{n-1})(A_{n-1}-\alpha)-\frac{1}{2!}F''(A_{n-1})(A_{n-1}-\alpha)^2 \\ &\quad +\frac{1}{3!}F'''(A_{n-1})(A_{n-1}-\alpha)^3-\cdots \end{aligned} \tag{57}$$

Pada Persamaan (57) kedua ruas dikalikan dengan $F'(A_{n-1})^{-1}$ diperoleh:

$$\begin{aligned} A_{n-1}-F'(A_{n-1})^{-1}F(A_{n-1}) &= \alpha+\frac{1}{2!}F'(A_{n-1})^{-1}F''(A_{n-1})(A_{n-1}-\alpha)^2 \\ &\quad -\frac{1}{3!}F'(A_{n-1})^{-1}F'''(A_{n-1})(A_{n-1}-\alpha)^3+\cdots \\ B_{n-1} &= \alpha+C_2E_{n-1}^2-C_3E_{n-1}^3+\cdots \\ B_{n-1}-\alpha &= C_2E_{n-1}^2-C_3E_{n-1}^3+\cdots \end{aligned} \tag{58}$$

Selanjutnya akan dicari $F'(B_{n-1})^{-1}F(B_{n-1})$ dengan menggunakan deret Taylor dari $F(B)$ disekitar $B=B_{n-1}$ sebagai berikut:

$$F(B)=F(B_{n-1})+F'(B_{n-1})(B-B_{n-1})+\frac{1}{2!}F''(B_{n-1})(B-B_{n-1})^2+\cdots \tag{59}$$

Karena α merupakan akar dari $F(B)$, maka $F(\alpha)=0$ sehingga diperoleh:

$$F(B_{n-1})=F'(B_{n-1})(B_{n-1}-\alpha)-\frac{1}{2!}F''(B_{n-1})(B_{n-1}-\alpha)^2+\cdots \tag{60}$$

Pada persamaan (60) kedua ruas dikalikan dengan $F'(B_{n-1})^{-1}$ diperoleh:

$$F'(B_{n-1})^{-1}F(B_{n-1})=(B_{n-1}-\alpha)-C_2^*(B_{n-1}-\alpha)^2+\cdots \tag{61}$$

Subtitusikan persamaan (58) ke persamaan (61) sehingga diperoleh:

$$F'(B_{n-1})^{-1}F(B_{n-1})=C_2E_{n-1}^2-C_3E_{n-1}^3+\ldots-C_2^*C_2E_{n-1}^4+C_2^*C_2C_3E_{n-1}^5-\cdots \tag{62}$$

Subtitusikan persamaan (58) dan (62) ke persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned} A_n &= B_{n-1}-F'(B_{n-1})^{-1}F(B_{n-1}) \\ &= \alpha+C_2^*C_2E_{n-1}^4-C_2^*C_2C_3E_{n-1}^5+\cdots \\ A_n-\alpha &= C_2^*C_2E_{n-1}^4-C_2^*C_2C_3E_{n-1}^5+\cdots \\ E_n &= C_2^*C_2E_{n-1}^4+O\left(\left\|E_{n-1}^5\right\|\right) \end{aligned} \tag{63}$$

Jadi, terbukti bahwa persamaan Newton-Raphson Ganda memiliki tingkat orde empat (Devitriani, dkk., 2019).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap tahun ajaran 2021/2022 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Menyusun algortima metode Newton Orde Tiga dan metode Newton Raphson Ganda Orde Empat.
2. Penyelesaian Sistem Persamaan Non Linear (1) dengan metode Newton Orde Tiga dan metode Newton Raphson Ganda Orde Empat.
3. Dua metode tersebut diaplikasikan untuk menyelesaikan sistem persamaan dengan bentuk khusus sebagai berikut:

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{cases} 3\sin^2(x) + y - 1 = 0 \\ x^2 + 5y^2 - 8 = 0 \end{cases} \tag{64}$$

4. Membuat program komputer berdasarkan definisi dan teorema yang telah ditentukan menggunakan software *Mathematica.*
5. Analisis iterasi dan galat dari metode Newton Orde Tiga dan Newton-Raphson Ganda Orde Empat.
6. Menentukan kesimpulan.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah didapatkan, disimpulkan bahwa penggunaan metode Newton Orde Tiga menghasilkan solusi dengan iterasi yang lebih banyak dan terdapat pula nilai awal yang tidak didapatkan solusinya atau divergen. Namun, dapat menemukan 4 titik solusi dari sistem persamaan yang ditentukan. Sedangkan untuk metode Newton Raphson Ganda Orde Empat menghasilkan solusi dengan iterasi yang lebih sedikit/lebih cepat dengan masing-masing solusi disetiap nilai awalnya. Namun, hanya menemukan 3 titik solusi dari sistem persamaan yang ditentukan. Oleh karena itu, jika ditinjau dari sisi jumlah iterasi yang minim metode Newton Raphson Ganda Orde Empat masih lebih baik dibandingkan metode Newton Orde Tiga walaupun titik solusi yang didapatkan lebih sedikit.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat ditindak lanjuti dengan mencari solusi untuk sistem persamaan non linear dengan peubah lebih dari 3 menggunakan metode Newton Raphson Orde Empat atau meningkatkan orde konvergensinya agar didapatkan hasil yang lebih efektif.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H. 2000. *Dasar-dasar Aljabar Linear*. Interaksara, Batam.

Batarius, P. 2018. Nilai Awal pada Metode Newton-Raphson yang dimodifikasi dalam Penentuan Akar Persamaan. Pi. *Mathematics Education Journal*.

Burden, R.L. & Faires, J.D. 1997. *Numerical Analysis.* 9th Edition. Brooks/Cole Cengage Learning, USA.

Chapra, S.C., & Canale, R.P. 2010. *Numerical Methods for Engineers*. 6th Edition. McGraw-Hill Companies, Inc., New York.

Devitriani, Kiftiah, M., & Yudhi. 2019. Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*.

Gerald, C.F. & Wheatley, P. 1994. *Applied Numerical Analysis*. 7th Edition. Addison-Wesley, Boston.

Kasturiarachi, A.B. 2002. Leap-Frogging Newton's Method.*International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*.

Kumar, R.& Vipan. 2015. Comparative Analysis of Convergence of Various Numerical Methods. *Journal of Computer and Mathematical Sciences.* **6**(6):290-297.

Maharani, S. & Suprapto, E. 2018. *Analisis Numerik Berbasis Group*. AE Media Grafika, Jawa Timur.

Mathews, J.H. 1992. *Numerical Methods for Mathematics, Science, and Engineering*. Prentice-Hall Inc., New Jersey

Megarani, W., Aziz, D., Amanto, Zakaria, L. 2020. Algoritma Penyelesaian Persamaan Nonlinear Fuzzy dengan Metode Modifikasi Newton-Raphson. *Jurnal Siger Matematika*. **1**(2).

Munir, R. 2015. *Metode numerik.* Informatika, Bandung.

Pandia, W., & Sitepu, I. 2021. Penentuan Akar Persamaan Non Linier dengan Metode Numerik. **6**(2).

Purcell, E.J., Varberg, D., Ridgon, S.E. 2008. *Kalkulus Edisi Kesembilan*. Jilid 2, Erlangga, Jakarta.

Rahayu, Y., Noviani, E., & Yudhi. 2020. Modifikasi Metode Newton dengan Konvergensi Orde Tiga untuk Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear. Bimaster: *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*. **9**(4):533-540.

Ruminta. 2009. *Matriks Persamaan Linier dan Pemrograman Linier*. Rekayasa Sains, Bandung:

Senning, J.R. 2019. *Computing and Estimating the Rate of Convergence*. Department of Mathematics and Computer Science, Gordon College.

Stalis, C. 2009. Perbandingan Metode Newton Raphson dengan Metode Halley dalam Menyelesaikan Akar-akar Persamaan Nonlinier. Malang: UIN Maliki Malang.

Supranto, J. 2003. *Pengantar Matriks*. Rineka Cipta, Jakarta

Yudhi, Mahmul, & Kiftiah, M. 2017. Modifikasi Metode Newton-Raphson Untuk Mencari Solusi Persamaan Linear dan Nonlinear. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*..