PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR MODUL PROYEKTIF

Skripsi

Oleh

GUSTI AYU DWI YANTI
NPM. 1917031003

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

THE IMPLEMENTATION OF A ROUGH SET ON STRUCTURE PROJECTIVE MODULE

By

Gusti Ayu Dwi Yanti

Let an approximation space (U, R) where a non-empty set U and equivalence relation R on U. The relation that is reflective, symmetric, and transitive is the equivalence relation. The equivalence relation form separate partitions called equivalence classes. If X is a subset of U, then the union of equivalence classes contained in X is called the lower approximation and is denoted by $\underline{Apr}(X)$. The union of equivalence classes that intersect with the set X is called the upper approximation, denoted by $\overline{Apr}(X)$. The subset X is a rough set if $\underline{Apr}(X) \neq \overline{Apr}(X)$. If two binary operations are defined, X form a rough module if it satisfy certain conditions. In this research, we investigate some characteristics of the rough projective module and we construct examples of the rough projective module. In addition, we determine the external direct sum of some projective modules. Furthermore, we build a program to determine a module is a rough module by using phyton.

Keywords: *Approximation space, rough set, rough module, rough projective module, direct sum external.*

ABSTRAK

PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR MODUL PROYEKTIF

Oleh

Gusti Ayu Dwi Yanti

Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dengan himpunan tak kosong U dan relasi ekuivalensi R pada U. Relasi yang bersifat reflektif, simetris dan transitif disebut relasi ekuivalensi. Relasi ekuivalensi membentuk partisi-partisi yang saling lepas yang disebut kelas ekuivalensi. Jika X merupakan himpunan bagian dari U, maka gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang termuat dalam X disebut aproksimasi bawah dan dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan X dan bukan merupakan himpunan kosong disebut aproksimasi atas dan dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$. Suatu himpunan bagian X merupakan himpunan *rough* jika $\underline{Apr}(X) \neq \overline{Apr}(X)$. Jika didefinisikan operasi biner pada X, X akan membentuk modul *rough* apabila memenuhi syarat-syarat tertentu. Pada penelitian ini, dibahas beberapa sifat modul proyektif *rough* serta diberikan contoh konstruksi modul proyektif *rough*. Selain itu, ditentukan modul proyektif *rough* dari hasil jumlah langsung eksternal suatu modul proyektif *rough* dan program untuk menentukan suatu modul merupakan modul *rough*.

Kata Kunci: *Ruang aproksimasi, himpunan rough, modul rough, modul proyektif rough, hasil jumlah langsung eksternal.*

PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR MODUL PROYEKTIF

GUSTI AYU DWI YANTI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR MODUL PROYEKTIF**

Nama Mahasiswa : **Gusti Ayu Dwi Yanti**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1917031003**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.	**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 19840627 200604 2 001	NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ftriani, S.Si., M.Sc.** .....

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** .....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **2 Desember 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Gusti Ayu Dwi Yanti**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1917031003**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Penerapan Konsep Himpunan *Rough* pada Struktur Modul Proyektif**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 2 Desember 2022

Penulis,

Gusti Ayu Dwi Yanti

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Gusti Ayu Dwi Yanti yang lahir di Bakauheni pada tanggal 21 Agustus 2001. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Idrus dan Lis Rahmawati.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK BHAKTI IBU pada tahun 2006 sampai tahun 2007. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan sekolah dasar di SDS BHAKTI IBU pada tahun 2007 sampai tahun 2013. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan sekolah menengah pertama di SMP Negeri 1 Bakauheni pada tahun 2013 sampai tahun 2016. Penulis melanjutkan sekolah menengah atas di SMA Negeri 1 Kalianda.

Pada tahun 2019, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Nilai Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN). Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif mengikuti kegiatan organisasi. Pada tahun 2020, penulis merupakan anggota Unila Robotika dan Otomasi (URO) dan anggota biro dana dan usaha Himpunan Mahasiswa Matematika Jurusan Matematika (HIMATIKA) FMIPA Unila. Pada tahun 2021, penulis merupakan anggota divisi Lingkungan Hidup (LH) GenBI Komisariat Unila dan sekretaris biro dana dan usaha HIMATIKA FMIPA Unila. Pada tahun 2022, penulis merupakan kepala divisi pendidikan GenBI Komisariat Unila.

Sebagai penerapan ilmu yang didapat, pada awal tahun 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Komunikasi, Informatika dan Statistik

(Diskominfotik) Provinsi Lampung selama 40 hari. Kemudian, pada pertengahan tahun 2022 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Argomulyo, Kecamatan Sumberejo, Kabupaten Tanggamus pada tanggal 27 Juni 2022 sampai dengan 5 Agustus 2022.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"
(Q.S Al-Insyirah: 5)

"Hidup seperti bersepeda, jika kamu ingin menjaga keseimbanganmu maka kamu harus terus bergerak maju"
(Albert Einstein)

"Tidak ada impian yang terlalu tinggi, yang ada hanyalah kemalasan bertopeng pesimisme"
(Felix Y. Siauw)

"*Take action. An inch of movement will bring you closer to your goals than a mile of intention*"
(Steve Marobali)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,
Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga skripsi ini dapat selesai. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhamma Shallallahu'Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya yang sederhana ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada Ayah dan Ibu telah menjadi sosok yang selalu kuandalkan, serta atas semua doa dan dukungan yang senantiasa diberikan kepadaku. Terimakasih telah menjadi rumah ternyaman bagiku untuk pulang ketika lelah mengerjakan skripsi ini. Terimakasih kepada adikku yang selalu menjadi motivasi untukku bahwa seorang kakak harus bisa menjadi panutan bagi adiknya.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah sangat berjasa dalam membantu, memberi masukan dan arahan, serta ilmu yang sangat bermanfaat.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada sahabat-sahabatku ku atas semua doa, dukungan, kebahagiaa, serta canda tawa yang telah menyertai kehidupan perkuliahanku.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahirabbilalamin, puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT atas limpahan rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Penerapan Konsep Himpunan *Rough* pada Struktur Modul Proyektif" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang telah ditentukan. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu memberikan bimbingan, dukungan, arahan, motivasi serta saran sehingga skripsi ini dapat terselesaikan. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus pembimbing akademik yang telah meluangkan waktu untuk memberikan arahan, bimbingan, motivasi, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan dan dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat menjadi lebih baik lagi.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Ayah, mama dan adik yang selalu memotivasi, mendukung serta mendoakan penulis.
7. Mia Fitriani, Ahmad Rizki Wiranto, Rizke Fridayati, Aulia Melinda, Yazid Zinedine, Nanda Evitarina dan Aji Alfalianto yang selalu menjadi pendengar yang baik dan memberikan semangat kepada penulis.
8. Teman-teman Pimpinan dan Anggota Biro Dana dan Usaha HIMATIKA FMIPA UNILA Periode 2021 yang telah memberikan banyak pelajaran hidup dan kenangan indah kepada penulis.
9. Teman-teman satu bimbingan yang telah memberikan semangat maupun saran kepada penulis.
10. Teman-teman Matematika angkatan 2019 dan semua pihak yang terlibat dalam proses penyusunan skripsi ini.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 2 Desember 2022
Penulis,

Gusti Ayu Dwi Yanti

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR ISI ..... **xiv**

DAFTAR TABEL ..... **xv**

DAFTAR GAMBAR ..... **xvii**

I. PENDAHULUAN **1**
1.1 Latar Belakang dan Masalah 1
1.2 Tujuan Penelitian 2
1.3 Manfaat Penelitian 2

II. TINJAUAN PUSTAKA **4**
2.1 Himpunan 4
2.2 Grup 7
2.3 Ring 13
2.4 Modul 17
2.5 Modul Proyektif *Rough* ..... .41

III. METODE PENELITIAN **51**
3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 51
3.2 Metode Penelitian 51

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN **53**
4.1 Modul Proyektif *Rough* 52
4.2 Sifat-sifat Modul Proyektif *Rough* 74
4.3 Program Modul *Rough* 94

V. KESIMPULAN DAN SARAN **101**
5.1 Kesimpulan 101
5.2 Saran 101

DAFTAR PUSTAKA **103**

LAMPIRAN **106**

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.2.1. Tabel *Cayley* dari grup P_2 12
Tabel 4.1.1. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 80 pada R 56
Tabel 4.1.2. Tabel invers dari anggota himpunan R 57
Tabel 4.1.3. Tabel *Cayley* perkalian modulo 80 pada R 57
Tabel 4.1.4. Tabel *Cayley* Penjumlahan modulo 80 pada S 58
Tabel 4.1.5. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* S terhadap ring *rough* T 59
Tabel 4.1.6. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 80 pada T 60
Tabel 4.1.7. Tabel Cayley perkalian skalar modul *rough* T terhadap ring *rough* R 60
Tabel 4.1.8. Tabel *Cayley* pemjumlahan modulo 80 pada V 61
Tabel 4.1.9. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* V terhadap ring *rough* R 61
Tabel 4.1.10. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 50 pada S 66
Tabel 4.1.11. Tabel invers dari anggota himpunan S 67
Tabel 4.1.12. Tabel *Cayley* perkalian modulo 50 pada himpunan S 67
Tabel 4.1.13. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 50 pada T 68
Tabel 4.1.14. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* T terhadap ring *rough* S 69
Tabel 4.1.15. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 50 pada V 70
Tabel 4.1.16. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* V terhadap ring *rough* S 70
Tabel 4.1.17. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 50 pada W 71
Tabel 4.1.18. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* W terhadap ring

rough S 71
Tabel 4.2.1. Tabel *Cayley* penjumlahan modulo 12 pada R 80
Tabel 4.2.2. Tabel invers dari anggota himpunan R 80
Tabel 4.2.3. Tabel *Cayley* perkalian modulo 80 pada R 81
Tabel 4.2.4. Tabel *Cayley* Penjumlahan modulo 12 pada M_1 82
Tabel 4.2.5. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* M_1 terhadap ring *rough* R 82
Tabel 4.2.6. Tabel *Cayley* Penjumlahan modulo 12 pada M_2 83
Tabel 4.2.7. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* M_2 terhadap ring *rough* R 83
Tabel 4.2.8. Tabel *Cayley* Penjumlahan modulo 12 pada M_3 84
Tabel 4.2.9. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* M_3 terhadap ring *rough* R 84
Tabel 4.2.10. Tabel *Cayley* Penjumlahan modulo 12 pada A 85
Tabel 4.2.11. Tabel *Cayley* perkalian skalar modul *rough* A terhadap ring *rough* R 86
Tabel 4.2.12. Tabel *Cayley* Penjumlahan modulo 12 pada B 87
Tabel 4.2.13. Tabel *Cayley* Penjumlahan skalar modul *rough* B terhadap ring *rough* R 87

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.2.1. Gambar langkah-langkah penelitian 52
Gambar 4.3.1. *Flowchart* Relasi Ekuivalensi 94
Gambar 4.3.2. *Flowchart* ring *rough* 95
Gambar 4.3.3. *Flowchart* modul *rough* 96
Gambar 4.3.4. Sintaks menginput himpunan tak kosong U 97
Gambar 4.3.5. Sintaks pengecekan relasi ekuivalensi 97
Gambar 4.3.6. Sintaks pengecekan himpunan *rough* 97
Gambar 4.3.7. Sintaks pengecekan ring *rough* 98
Gambar 4.3.8. Sintaks pengecekan modul *rough* 98
Gambar 4.3.9. *Output* modul *rough* S 99
Gambar 4.3.10. *Output* modul *rough* M 99
Gambar 4.3.11. *Output* Tabel *Cayley* penjumlahan $\mathbb{Z}_{12}$ 100
Gambar 4.3.12. *Output* Tabel *Cayley* perkalian $\mathbb{Z}_{12}$ 100

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori himpunan *rough* pertama kali dikemukakan oleh seorang matematikawan bernama Pawlak pada tahun 1982. Teori himpunan *rough* merupakan teknik untuk menangani masalah ketidakjelasan (*vagueness*) dan ketidakpastian (*uncertainty*). Dasar dari teori ini yaitu relasi ekuivalensi dan ruang aproksimasi. Relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat refleksif, simetris dan transitif. Partisi-partisi yang dibentuk dari relasi ekuivalensi disebut kelas-kelas ekuivalensi. Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari suatu himpunan bagian ditentukan oleh kelas ekuivalensi. Pasangan berurut dari suatu himpunan tak kosong dan relasi ekuivalensi dari himpunan tersebut disebut dengan ruang aproksimasi. Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dengan himpunan tak kosong U dan R relasi ekuivalensi dari U. Jika X merupakan himpunan bagian dari U, maka gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang termuat dalam X disebut aproksimasi bawah (*lower approximation*) dan dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$. Gabungan kelas-kelas ekuivalensi yang beririsan dengan himpunan X dan bukan merupakan himpunan kosong disebut aproksimasi atas (*upper approximation*), dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$. Selanjutnya, himpunan X merupakan himpunan *rough* jika $\underline{Apr}(X) \neq \overline{Apr}(X)$.

Penelitian mengenai penerapan teori himpunan *rough* telah banyak dilakukan di berbagai bidang. Salah satunya di bidang struktur aljabar. Biswas dan Nanda (1994) melakukan penelitian mengenai grup *rough* dan subgrup *rough* dengan keduanya terikat pada aproksimasi atas tetapi tidak pada aproksimasi bawah.

Selanjutnya, De-song (2004) mengemukakan gagasan mengenai penerapan teori dari himpunan *rough* pada grup dan ring. Pada tahun 2005, Miao dkk juga melakukan penelitian mengenai grup *rough*, subgrup *rough* dan sifat-sifat nya. Penelitian dilakukan oleh Davvaz dan Mahdavipour pada tahun 2006 mengenai *rough* pada modul, dan Qun-Feng dkk (2006) melakukan penelitian mengenai modul *rough* dan beberapa sifatnya. Selain itu, penelitian juga dilakukan oleh Sinha dan Prakash pada tahun 2014 dan mengemukakan gagasan mengenai modul proyektif *rough*.

Penelitian ini akan mengkaji tentang penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur aljabar. Topik yang akan dikaji yaitu penerapan himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur modul proyektif pada suatu ruang aproksimasi tertentu. Modul proyektif merupakan salah satu bentuk khusus dari suatu modul atas ring R. Suatu modul dikatakan proyektif jika modul tersebut merupakan penjumlah langsung dari modul bebas. Pada penelitian ini juga akan dibahas sifat-sifat dari suatu struktur modul proyektif *rough.*

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu menerapkan teori himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur modul proyektif dari suatu ruang aproksimasi tertentu dan menyelidiki sifat-sifat dari modul proyektif *rough*, kaitan antara modul proyektif dengan modul proyektif *rough*, serta membuat program untuk menentukan suatu himpunan berhingga merupakan modul *rough* atas suatu ruang aproksimasi tertentu.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. memberikan pengetahuan mengenai konsep modul proyektif *rough* dan sifat-sifatnya;

2. mengembangkan wawasan mengenai penerapan himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur modul proyektif;
3. menjadikan tulisan ini sebagai referensi dalam mempelajari penerapan himpunan *rough* dalam mengkonstruksi modul proyektif.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini membahas beberapa definisi-definisi dasar yang mendukung pembahasan dalam penelitian. Definisi-definisi tersebut antara lain yaitu himpunan, grup, ring, modul, barisan eksak, modul bebas, modul proyektif, relasi ekuivalensi, himpunan *rough* (*rough set*), grup *rough* (*rough group*), ring *rough* (*rough ring*) dan modul proyektif *rough* (*rough projective module*).

2.1 Himpunan

Pada tahun 1845-1918 seorang matematikawan berkebangsaan Jerman bernama George Cantor mengembangkan konsep himpunan. Konsep himpunan merupakan dasar dari semua cabang matematika. Berikut ini diberikan definisi himpunan.

Definisi 2.1.1

Himpunan dapat dipandang sebagai kumpulan objek-objek yang berbeda terdefinisi dengan jelas tetapi dapat dianggap sebagai satu kesatuan. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen suatu himpunan. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti $A, B, C, \ldots$ dan anggota himpunan biasanya dinotasikan dengan huruf kecil seperti $a, b, c, \ldots$ (Wibisono, 2008).

Contoh dari himpunan adalah kumpulan bulan dalam setahun. Kumpulan bulan dalam setahun dikatakan suatu himpunan karena objek-objek di dalamnya terdefinisi dengan jelas yaitu bulan Januari, Februari, Maret, April, Mei, Juni, Juli, Agustus, September, Oktober, November, dan Desember.

Terdapat beberapa konsep dalam teori himpunan yaitu kardinalitas himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian dan himpunan kuasa. Berikut ini diberikan definisi dari kardinalitas.

Definisi 2.1.2

Banyaknya elemen di dalam himpunan A disebut kardinalitas dari himpunan A. Kardinalitas dari himpunan A dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Wibisono, 2008).

Untuk lebih memahami definisi dari kardinalitas himpunan. Berikut ini diberikan contoh kardinalitas dari suatu himpunan.

Contoh 2.1.1

Himpunan $A = \{$Januari, Februari, Maret, April, Mei, Juni, Juli, Agustus, September, Oktober, November, Desember$\}$. Jadi $|A| = 12$.

Setelah memahami definisi dan contoh kardinalitas dari suatu himpunan, selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh mengenai himpunan kosong.

Definisi 2.1.3

Himpunan kosong merupakan himpunan dengan kardinalitas 0. Himpunan kosong dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\ \}$ (Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.2

Diberikan himpunan B dengan B merupakan himpunan bilangan prima yang habis dibagi 4. Karena tidak ada bilangan prima yang habis dibagi 4, dapat disimpulkan bahwa B merupakan himpunan kosong atau $B = \emptyset$.

Setelah diberikan definisi dan contoh dari himpunan kosong, berikutnya akan diberikan definisi dan contoh himpunan semesta.

Definisi 2.1.4

Himpunan semesta merupakan himpunan dari semua objek yang berbeda. Himpunan semesta dinotasikan dengan U (Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.3

Diberikan U merupakan himpunan seluruh bulan. Jadi $U = \{$Januari, Februari, Maret, April, Mei, Juni, Juli, Agustus, September, Oktober, November, Desember$\}$.

Berikut ini diberikan definisi himpunan bagian beserta contohnya.

Definisi 2.1.5

Himpunan A dikatakan himpunan bagian B jika dan hanya jika semua anggota-anggota di A adalah anggota himpunan di B. Himpunan bagian A dari himpunan B dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Wibisono, 2008).

Contoh 2.1.4

Diberikan himpunan $A = \{$Januari, Maret, April$\}$. Berdasarkan Contoh 2.1.3, dapat disimpulkan bahwa himpunan A merupakan himpunan bagian dari U atau $A \subseteq U$.

Setelah diberikan definisi dan contoh mengenai himpunan bagian, selanjutnya akan diberikan penjelasan mengenai himpunan kuasa.

Definisi 2.1.6

Himpunan kuasa dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A itu sendiri. Himpunan kuasa dari suatu himpunan A dinotasikan sebagai $P(A)$. Apabila himpunan A terdiri dari n anggota, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa dari himpunan A adalah 2^n (Munir, 2005).

Contoh 2.1.5

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3\}$, diperoleh $|A| = 3$, sehingga $P(A) = 2^3 = 8$. Himpunan kuasa dari himpunan A yaitu:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

2.2 Grup

Dasar dari pembentukan suatu grup yaitu operasi biner. Oleh karena itu, sebelum membahas mengenai definisi grup, terlebih dahulu akan diberikan definisi operasi biner.

Definisi 2.2.1

Diberikan suatu himpunan tak kosong G dengan $a, b \in G$. Operasi biner "$*$" pada himpunan G didefinisikan sebagai fungsi $*: G \times G \to G$, dengan $*(a, b) = a * b$, untuk setiap $(a, b) \in G \times G$ (Ayres dan Jaisingh, 2004).

Untuk lebih memahami Definisi 2.2.1, berikut ini diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.2.1

Diberikan himpunan

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Untuk setiap matriks $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in A$, berlaku:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \in A.$$

Jadi, operasi perkalian matriks merupakan operasi biner pada A.

Setelah memahami definisi dan contoh dari operasi biner, berikut ini diberikan definisi grup.

Definisi 2.2.2

Sistem matematika $(G,*)$ dikatakan grup jika memenuhi:

i) untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$, (berlaku sifat asosiatif terhadap operasi $*$ di G);

ii) terdapat elemen e di G yang memenuhi $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$, (e merupakan elemen identitas di G);

iii) untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen $a^{-1} \in G$ yang memenuhi

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e,$$

(a^{-1} merupakan elemen invers dari a di G) (Arifin, 2000).

Berikut ini diberikan contoh grup untuk lebih memahami Definisi 2.2.2.

Contoh 2.2.2

$G = \mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ merupakan grup terhadap operasi $*$ dengan definisi

$$x * y = x + y + xy$$

untuk setiap $x, y \in G$.

Akan ditunjukkan $\langle G,*\rangle$ merupakan grup.

i) Akan ditunjukkan bahwa $*$ merupakan operasi biner pada G (tertutup dan *well-defined*).

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{Q}$ dan $x, y \neq -1$, berlaku

$$x * y = x + y + xy \neq -1.$$

Terbukti bahwa operasi $*$ bersifat tertutup di G.

Untuk setiap $x_1, x_2, y_1, y_2 \in G$ dengan $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$, berlaku

$$x_1 * y_1 = x_1 + y_1 + x_1y_1 = x_2 + y_2 + x_2y_2 = x_2 * y_2.$$

Dengan demikian, operasi $*$ bersifat *well-defined*.

ii) Akan ditunjukkan operasi $*$ bersifat asosiatif.

Untuk setiap $x, y, z \in G$, berlaku

$$\begin{aligned}(x * y) * z &= (x + y + xy) * z \\ &= x + y + xy + z + (x + y + xy)z \\ &= x + y + xy + z + xz + yz + xyz \\ &= x + y + z + yz + xy + xz + xyz \\ &= x + (y + z + yz) + x(y + z + yz) \\ &= x * (y + z + yz) \\ &= x * (y * z).\end{aligned}$$

Jadi, operasi biner $*$ bersifat asosiatif di G.

iii) Terdapat $0 \in G$, sehingga berlaku

$0 * x = 0 + x + 0 \cdot x = x$ dan $x * 0 = x + 0 + x.0 = x$, untuk setiap $x \in G$.

Oleh karena itu, $0 \in G$ merupakan elemen identitas di G terhadap operasi biner $*$.

iv) Untuk setiap $x \in G$, terdapat $y = \frac{-x}{1+x} \in G$ sehingga

$$\begin{aligned} x * y &= x + y + xy \\ &= x + \left(\frac{-x}{1+x}\right) + x\left(\frac{-x}{1+x}\right) \\ &= \frac{x(1+x) - x - x^2}{1+x} \\ &= \frac{x + x^2 - x - x^2}{1+x} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Jadi, setiap $x \in G$ memiliki invers di G terhadap operasi biner $*$.

Dengan demikian, terbukti bahwa G merupakan grup.

Definisi 2.2.3

Grup G dikatakan komutatif jika untuk setiap elemen a dan b di G berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000).

Berikut ini diberikan contoh untuk lebih memahami definisi grup komutatif.

Contoh 2.2.2

Diberikan $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$ untuk setiap $x, y \in G$, maka G grup komutatif.

Akan dibuktikan G grup komutatif. Misalkan G grup. Diberikan sebarang $x, y \in G$, dengan $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$. Diperoleh

$$\begin{aligned} xy &= ((xy)^{-1})^{-1} \\ &= (x^{-1}y^{-1})^{-1} \\ &= (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} \\ &= yx. \end{aligned}$$

Dengan demikian, terbukti bahwa G grup komutatif.

Setelah diberikan definisi dan contoh dari grup, selanjutnya akan diberikan definisi subgrup.

Definisi 2.2.4

Himpunan bagian tak kosong S dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika S membentuk grup terhadap operasi biner yang sama pada grup G (Herstein, 1975).

Berikut ini contoh untuk lebih memahami definisi subgrup.

Contoh 2.2.3

Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$ dan $3\mathbb{Z} = \{3n | n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, yaitu semua himpunan bilangan bulat dengan kelipatan 3. Dapat ditunjukkan $(3\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup. Oleh karena itu, $3\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

Untuk mendukung definisi subgrup. Berikut ini diberikan proposisi tentang subgrup.

Proposisi 2.2.1

Himpunan bagian H dari grup G dikatakan subgrup jika dan hanya jika

i) $H \neq \emptyset$, dan

ii) Untuk setiap $x, y \in H,\ xy^{-1} \in H$ (Dummit dan Foote, 1999).

Bukti:

Diketahui H adalah subgrup dari G, maka $H \neq \emptyset$. Himpunan H adalah subgrup sehingga setiap elemen pada H mempunyai invers di H. Jika $y \in H$ maka $y^{-1} \in H$. Oleh karena itu, berdasarkan sifat tertutup pada grup, diperoleh untuk setiap $xy \in H$ maka $xy^{-1} \in H$.

Sebaliknya, diketahui $H \leq G$, maka $H \neq \emptyset$ sehingga terdapat $x \in H$. Misalkan $x = y$ berakibat $xx^{-1} = e \in H$. Jadi, H mempunyai elemen identitas. Untuk $e, x \in H$ berakibat $ex^{-1} = x^{-1} \in H$. Jadi, setiap elemen H mempunya invers. Diberikan sebarang $x, y \in H$, akan dibuktikan $xy \in H$. Diketahui setiap elemen H memiliki invers, maka $y^{-1} \in H$. Hal ini berakibat $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H$. Jadi H merupakan grup. ■

Pada struktur aljabar, terdapat salah satu bentuk khusus dari grup yaitu grup permutasi. Sebelum membahas definisi grup permutasi, terlebih dahulu akan dibahas mengenai fungsi. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.2.5

Fungsi f merupakan suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam suatu himpunan yang disebut daerah asal, dengan suatu nilai unik $f(x)$ dari

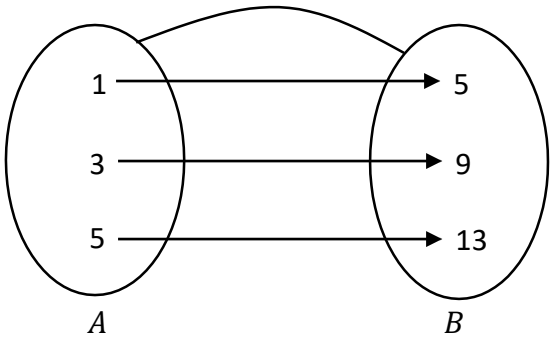
himpunan kedua. Himpunan yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil fungsi tersebut (Varberg dkk., 2016).

Berikut ini merupakan contoh untuk memahami definisi fungsi.

Contoh 2.2.4

Diberikan himpunan $A = \{1,3,5\}$ dan $B = \{5,9,13\}$. Didefinisikan fungsi f dari A ke B dengan aturan $f(x) = 2x + 3$. Perhatikan gambar berikut.

$$f(x) = 2x + 3$$



Gambar 2.2.1. Contoh suatu fungsi

Suatu fungsi memiliki tiga sifat yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif dan fungsi bijektif.

i) Fungsi $f: A \to B$ dikatakan fungsi injektif jika untuk setiap $a_1, a_2 \in A$ dan $a_1 \neq a_2$ berlaku $f(a_1) \neq f(a_2)$,
ii) fungsi $f: A \to B$ dikatakan fungsi surjektif jika untuk setiap $b \in B$ minimal terdapat satu $a \in A$ sedemikian sehingga $b = f(a)$,
iii) fungsi $f: A \to B$ dikatakan bijektif jika fungsi tersebut bersifat injektif dan surjektif (Setiawan, 2008).

Definisi 2.2.6

Permutasi dari suatu himpunan A merupakan suatu fungsi dari A ke A yang injektif dan surjektif. Grup permutasi dari suatu himpunan A merupakan suatu himpunan permutasi dari A yang membentuk grup terhadap komposisi fungsi (Abdurahim dkk., 2011).

Contoh 2.2.5

Diberikan himpunan tak kosong $A = \{11,12\}$ dan P_2 adalah himpunan semua permutasi pada A. Semua permutasi pada A adalah sebagai berikut.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} \text{ dan } a_2 = \begin{pmatrix} 11 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix}.$$

Akibatnya, diperoleh himpunan $P_2 = \{a_1, a_2\}$. $(P_2,\circ)$ membentuk grup dengan Tabel *Cayley* berikut.

Tabel 2.2.1. Tabel *Cayley* dari grup P_2

$\circ$	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2
a_2	a_2	a_1

Berdasarkan Tabel 2.2.1., diperoleh elemen identitas P_2 adalah $a_1, (a_1)^{-1} = a_1$ dan $(a_2)^{-1} = a_2$.

Pada struktur aljabar, terdapat istilah yang disebut dengan koset. Berikut ini definisinya.

Definisi 2.2.7

Diberikan grup G dan subgrup H di G. Untuk setiap $a \in G$, maka:

i) $aH = \{ah: h \in H\}$ dinamakan koset kiri dari H yang memuat a.

ii) $Ha = \{ha: h \in H\}$ dinamakan koset kanan dari H yang memuat a (Adkins dan Weintraub, 1992).

Berikut ini diberikan contoh dari koset untuk lebih memahami Definisi 2.2.7.

Contoh 2.2.6

Diberikan grup $(\mathbb{Z}, +)$. Akan ditentukan koset kiri dan koset kanan dari subgrup $5\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$.

Penyelesaian

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat n adalah $n + 5\mathbb{Z}$.

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 0 yaitu:

$$5\mathbb{Z} = \{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, \dots\}.$$

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 1 yaitu:

$$1 + 5\mathbb{Z} = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}.$$

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 2 yaitu:

$$2 + 5\mathbb{Z} = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}.$$

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 3 yaitu:

$$3 + 5\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}.$$

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 4 yaitu:

$$4 + 5\mathbb{Z} = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}.$$

Koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 5 sama dengan koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yang memuat 0. Oleh karena itu, koset-koset kiri dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yaitu $5\mathbb{Z}, 1 + 5\mathbb{Z}, 2 + 5\mathbb{Z}, 3 + 5\mathbb{Z}$, dan $4 + 5\mathbb{Z}$. Dengan cara yang sama, diperoleh koset-koset kanan dari subgrup $5\mathbb{Z}$ yaitu $5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z} + 1, 5\mathbb{Z} + 2, 5\mathbb{Z} + 3$, dan $5\mathbb{Z} + 4$.

2.3 Ring

Setelah memahami definisi beserta contoh dari grup dan subgrup yang merupakan dasar pembentukan suatu ring, selanjutnya akan diberikan definisi dari ring. Jika dalam grup memerlukan satu operasi biner, pada ring diperlukan dua operasi biner.

Definisi 2.3.1

Diberikan suatu himpunan tak kosong R. Himpunan tak kosong R bersama dua operasi biner $+$ dan $\cdot$ dikatakan ring jika memenuhi:

i) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b \in R$,

ii) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a + b = b + a$, (operasi $+$ bersifat komutatif di R),

iii) untuk setiap $a, b, c \in R$ maka $(a + b) + c = a + (b + c)$, (operasi $+$ bersifat asosiatif di R),

iv) terdapat elemen identitas yaitu $0 \in R$, sedemikian sehingga $a + 0 = a$ untuk setiap $a \in R$,

v) untuk setiap $a \in R$, terdapat elemen invers yaitu $-a \in R$, sehingga $a + (-a) = 0$,

vi) untuk setiap $a, b \in R$, berlaku $a \cdot b \in R$ (berlaku sifat tertutup di R),

vii) untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (berlaku sifat asosiatif di R),

viii) untuk setiap a, b, c berlaku:

a) $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ (hukum distributif kiri),

b) $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (hukum distributif kanan) (Herstein, 1986).

Berikut ini diberikan contoh untuk lebih memahami definisi dari ring.

Contoh 2.3.1

Diberikan F himpunan semua fungsi $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$ didefinisikan

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

dan

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Akan dibuktikan bahwa $\langle F, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

i) Untuk setiap $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{R}.$$

ii) Untuk setiap $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x).$$

Akibatnya, berlaku sifat komutatif di F terhadap operasi $+$.

iii) Untuk setiap $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned}((f + g) + h))(x) &= (f + g)(x) + h(x) \\ &= f(x) + g(x) + h(x) \\ &= f(x) + \big(g(x) + h(x)\big) \\ &= f(x) + (g + h)(x) \\ &= \big(f + (g + h)\big)(x).\end{aligned}$$

Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif di F.

iv) Terdapat $0 \in F$ dengan $0(x) = 0$, untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, sedemikian sehingga

$$f(x) + 0(x) = f(x) + 0 = f(x).$$

v) Untuk setiap $f \in F$, terdapat $-f \in F$, sehingga

$$\big(f + (-f)\big)(x) = f(x) + (-f)(x) = 0.$$

vi) Untuk setiap $f, g \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \in \mathbb{R}.$$

vii) Untuk setiap $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}\big((fg)h\big)(x) &= (fg)(x)h(x)\\ &= f(x)g(x)h(x)\\ &= f(x)(gh)(x)\\ &= \big(f(gh)\big)(x).\end{aligned}$$

viii) Untuk setiap $f, g, h \in F$ dan $x \in \mathbb{R}$, berlaku

$$\begin{aligned}\big(f(g+h)\big)(x) &= f(x)(g+h)(x)\\ &= f(x)(g(x)+h(x))\\ &= f(x)g(x)+f(x)h(x)\\ &= (fg)(x)+(fh)(x)\\ &= (fg+fh)(x)\end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned}\big((f+g)h\big)(x) &= (f+g)(x)h(x)\\ &= \big(f(x)+g(x)\big)h(x)\\ &= f(x)h(x)+g(x)h(x)\\ &= (fh)(x)+(gh)(x)\\ &= (fh+gh)(x).\end{aligned}$$

Jadi, berlaku hukum distributif kiri dan hukum distributif kanan pada F.

Oleh karena itu, terbukti bahwa $\langle F, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

Suatu himpunan bagian tak kosong G pada ring R disebut subring jika G merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian yang sama pada ring R. Berikut ini definisinya.

Definisi 2.3.2

Diberikan ring $(R, +, \cdot)$ merupakan suatu ring, G merupakan subring dari R, jika untuk setiap $a, b \in G$, berlaku:

i) $G \neq \emptyset$,

ii) $a - b \in G$,

iii) $a \cdot b \in G$ (Mas'oed, 2013).

Contoh 2.3.2

Diberikan himpunan $k\mathbb{Z} = \{kz | z \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan $k\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $a, b \in k\mathbb{Z}$. Terdapat $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga $a = kz_1$ dan $b = kz_2$.

i) Karena $0 \in k\mathbb{Z}$, $k\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

ii) $a - b = kz_1 - kz_2 = k(z_1 - z_2) \in k\mathbb{Z}$,

iii) $ab = (kz_1)(kz_2) = k(kz_1z_2) \in k\mathbb{Z}$.

Jadi, terbukti $k\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$.

Ideal dari suatu ring terdiri atas ideal kiri dan ideal kanan. Ideal dari suatu ring dikatakan ideal jika ring tersebut merupakan ideal kiri dan ideal kanan. Berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 2.3.3

Himpunan tak kosong $I \subseteq R$ disebut ideal dari R jika:

i) $a - b \in I$, untuk setiap $a, b \in I$;

ii) $ra \in I$ dan $ar \in I$, untuk setiap $a \in I, r \in R$ (Herstein, 1975).

Berikut ini diberikan contoh dari ideal untuk lebih memahami Definisi 2.3.3.

Contoh 2.3.3

Diberikan ring $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ dan $k\mathbb{Z} = \{kz | z \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjuukan I merupakan ideal dari ring $\mathbb{Z}$.

i) Berdasarkan Contoh 2.3.2, terbukti bahwa $k\mathbb{Z}$ merupakan subring $\mathbb{Z}$.

ii) Untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$, berlaku:

$(kz)r = k(zr) \in k\mathbb{Z}$ dan $r(kz) = k(rz) \in k\mathbb{Z}$.

Oleh karena itu, terbukti bahwa $k\mathbb{Z}$ merupakan ideal $\mathbb{Z}$.

Setelah diberikan definisi dan contoh dari ring dan subring. Selanjutnya akan diberikan definisi dari jumlah langsung eksternal dan jumlahan langsung internal dari ring.

Definisi 2.3.4

Diberikan ring $R_1, R_2, \dots, R_n$ dan R merupakan hasil kali kartesian pada himpunan R_i, dan operasi pada R didefinisikan sebagai berikut:

i) $(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$,

ii) $-(r_1, r_2, \dots, r_n) = (-r_1, -r_2, \dots, -r_n)$,

iii) $(r_1, r_2, \dots, r_n)(s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 s_1, r_2 s_2, \dots, r_n s_n)$.

$(0,0, \dots ,0)$ merupakan elemen identitas di ring R dan R disebut jumlahan langsung eksternal dari $R_1, R_2, \dots, R_n$ dan dinotasikan $R_1 \oplus R_2 \oplus \dots \oplus R_n$ (Hartley dan Hawkes, 1970).

Definisi 2.3.5

Diberikan ring R, dan $J_1, \dots ,J_n$ adalah ideal dari ring R, sedemikian sehingga:

i) $R = \sum_{i=1}^{n} J_i$, dan

ii) $J_1 \cap \dots \cap J_n = \{0\}$.

Ring R disebut jumlahan langsung internal dari ideal-ideal J_i dan dinotasikan dengan $R = \bigoplus J_i$ (Hartley dan Hawkes, 1970).

2.4 Modul

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor dengan operasi pergandaan skalar yang memenuhi beberapa aksioma. Modul terdiri atas modul kiri dan modul kanan atas suatu ring R. Berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 2.4.1

Diberikan grup komutatif $(G, +)$ dan ring dengan elemen satuan R, serta operasi pergandaan skalar $\circ: R \times G \to G$. Grup G dikatakan modul kiri atas ring R terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut.

a) $r_1 \circ (g_1 + g_2) = r_1 \circ g_1 + r_1 \circ g_2$;

b) $(r_1 + r_2) \circ g_1 = r_1 \circ g_1 + r_2 \circ g_1$;

c) $(r_1 . r_2) \circ g_1 = r_1 \circ (r_2 \circ g_1)$;

d) $1_R \circ g_1 = g_1$,

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $g_1, g_2 \in G$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.2

Diberikan grup komutatif $(G, +)$ dan ring dengan elemen satuan R, serta operasi pergandaan skalar $\circ: R \times G \to G$. Grup G dikatakan modul kanan atas ring R terhadap operasi $\circ$ dengan memenuhi aksioma-aksioma berikut:

a) $r_1 \circ (g_1 + g_2) = r_1 \circ g_1 + r_1 \circ g_2$;

b) $(r_1 + r_2) \circ g_1 = r_1 \circ g_1 + r_2 \circ g_1$;

c) $(r_1 . r_2) \circ g_1 = r_2 \circ (r_1 \circ g_1)$;

d) $1_R \circ g_1 = g_1$,

untuk setiap $r_1, r_2 \in R$ dan $g_1, g_2 \in G$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Jika R merupakan ring komutatif maka setiap modul kiri atas ring R merupakan modul kanan, dan setiap modul kanan atas ring R merupakan modul kiri.

Berikut contoh dari modul sebagai berikut.

Contoh 2.4.1

Diberikan grup komutatif

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

terhadap operasi pergandaan skalar

$$\bullet : M_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(A, v) \to \bullet(A, v) = Av$$

memenuhi aksioma modul kiri.

Dengan demikian, $\mathbb{R}^3$ merupakan modul kiri atas ring $M_3(\mathbb{R})$.

Contoh 2.4.2

Diberikan grup komutatif

$$\mathbb{R}_b^3 = \{[a_1\ a_2\ a_3] | a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

terhadap operasi pergandaan skalar

$$\bullet : M_3(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_b^3 \to \mathbb{R}_b^3$$
$$(A, v) \to \bullet(A, v) = vA$$

memenuhi aksioma modul kanan.

Dengan demikian, $\mathbb{R}_b^3$ merupakan modul kanan atas ring $M_3(\mathbb{R})$.

Himpunan bagian dari suatu modul yang juga merupakan modul terhadap operasi pergandaan skalar yang sama di modulnya disebut dengan submodul. Berikut ini diberikan definisi submodul.

Definisi 2.4.3

Diberikan modul M atas ring R. Himpunan tak kosong $K \subseteq M$ dikatakan submodul dari M jika K adalah subgrup dari M terhadap operasi yang sama dengan M, serta K juga merupakan modul atas ring R terhadap operasi pergandaan skalar yang sama dengan operasi pergandaan pada modul M atas ring R (Malik dkk, 1998).

Berikut teorema yang merupakan syarat perlu dan cukup himpunan tak kosong $K \subseteq M$ merupakan submodul dari M atas ring R.

Teorema 2.4.1

Diberikan modul M atas ring R dan himpunan tak kosong $K \subseteq M$. Himpunan K merupakan submodul di M jika dan hanya jika memenuhi:

i) $k_1 - k_2 \in K$, untuk setiap $k_1, k_2 \in K$,

ii) $r \circ k \in K$, untuk setiap $r \in R$ dan $k \in K$ (Malik dkk., 1998).

Bukti:

Diketahui K adalah submodul dari M, sehingga K merupakan subgrup komutatif dari M. Hal ini berakibat untuk setiap $k_1, k_2 \in K$ maka $k_1 - k_2 \in K$. Apabila K adalah submodul dari M, maka operasi pergandaan skalar pada M juga berlaku di K. Akibatnya, untuk setiap $r \in R$ dan $k \in K$, berlaku $r \circ k \in K$.

Sebaliknya, jika untuk setiap $k_1, k_2 \in K$ berlaku $k_1 - k_2 \in K$, maka K merupakan subgrup komutatif dari modul M. Kemudian untuk setiap $r \in R$ dan $k \in K$ berlaku $r \circ k \in K$, maka operasi pergandaan skalar pada modul M berlaku di K. Dengan demikian, K merupakan submodul di M.

Berikut diberikan contoh dari submodul.

Contoh 2.4.3

Diberikan Modul $\mathbb{Z}$ atas $\mathbb{Z}$. Himpunan $5\mathbb{Z}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$, karena apabila diberikan sebarang $5k_1, 5k_2 \in 5\mathbb{Z}$ dan $r \in \mathbb{Z}$, diperoleh bahwa

$$5k_1 - 5k_2 = 5(k_1 - k_2) \in 5\mathbb{Z}$$

dan

$$r5k_1 = 5(rk_1) \in 5\mathbb{Z}.$$

Apabila terdapat modul M atas ring R dan submodul-submodul G_1, G_2 dalam M maka jumlahan dari submodul G_1 dan G_2 sebagai berikut:

$$G_1 + G_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{x + y | x \in G_1 \text{ dan } y \in G_2\}.$$

Berikut ini merupakan lemma yang mendukung pernyataan tersebut.

Lemma 2.4.1

Diberikan modul M atas ring R. Jika G_1 dan G_2 merupakan submodul di M maka

i) $G_1 \cap G_2$ merupakan submodul di M.

ii) $G_1 + G_2$ merupakan submodul di M (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

i) Diberikan sebarang $k_1, k_2 \in G_1 \cap G_2$. Diperoleh $k_1, k_2 \in G_1$ dan $k_1, k_2 \in G_2$ karena G_1 dan G_2 merupakan submodul, berlaku $k_1 - k_2 \in G_1$ dan $k_1 - k_2 \in G_2$. Akibatnya, $k_1 - k_2 \in G_1 \cap G_2$.

   Diberikan sebarang $r \in R$. Karena G_1 dan G_2 merupakan submodul, berlaku $rk_1, rk_2 \in G_1$ dan $rk_1, rk_2 \in G_2$. Akibatnya, $rk_1, rk_2 \in G_1 \cap G_2$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $G_1 \cap G_2$ merupakan submodul di M.

ii) Diketahui $G_1 + G_2 = \{x + y | x \in G_1$ dan $y \in G_2\}$. Diberikan sebarang $k_1, k_2 \in G_1 + G_2$, berlaku $k_1 = x_1 + y_1$ dan $k_2 = x_2 + y_2$ untuk suatu $x_1, x_2 \in G_1$ dan $y_1, y_2 \in G_2$. Karena G_1 dan G_2 merupakan submodul, diperoleh $x_1 - x_2 \in G_1$ $y_1 - y_2 \in G_2$. Hal ini berakibat:

$$k_1 - k_2 = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \in G_1 + G_2.$$

   Diberikan sebarang $r \in R$, G_1 dan G_2, maka $rx_1 \in G_1$ dan $ry_1 \in G_2$. Jadi

$$rk_1 = r(x_1 + y_1) = rk_1 + ry_1 \in G_1 + G_2.$$

   Oleh karena itu, terbukti bahwa $G_1 + G_2$ merupakan submodul di M. ■

Untuk kasus lebih dari dua submodul, maka Lemma 2.4.1 dapat diperumum seperti yang disajikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 2.4.2

Diberikan modul M atas ring R dan himpunan indeks Δ. Jika G_α merupakan submodul di M untuk setiap $\alpha \in \Delta$ maka

i) $\bigcap_{\alpha\in\Delta} G_\alpha$ merupakan submodul di M,

ii) $\sum_{\alpha\in\Delta} G_\alpha = \left\{\sum_{i=1}^{n} G_{\alpha_i} | \alpha_i \in \Delta, n \in \mathbb{N}\right\}$ merupakan submodul di M (Adkins dan Weintraub, 1992)

Submodul-submodul pada modul M atas ring R dapat membentuk hasil jumlah langsung. Berikut ini diberikan definisi jumlahan langsung eksternal dan jumlahan langsung internal pada modul.

Definisi 2.4.4

Diberikan modul-modul atas ring R yaitu $M_1, M_2, \dots, M_n$. Pada hasil kali kartesian pada himpunan $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_n$ didefinisikan:

i) $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$,

ii) $a(x_1, x_2, \dots, x_n) = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$.

$(0,0, \dots ,0)$ merupakan elemen identitas dan jumlahan langsung eksternal dari $M_1, M_2, \dots, M_n$ dinotasikan dengan $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.5

Diberikan modul M atas ring R, G_1 dan G_2 merupakan submodul di M. Jika $G_1 \cap G_2 = \{0_M\}$, sehingga hasil jumlah dari submodul tersebut merupakan jumlahan langsung internal dan dinotasikan dengan $G_1 \oplus G_2$ (Roman, 2005).

Sebelum membahas definisi barisan eksak, terlebih dahulu akan didefinisikan mengenai homomorfisma modul. Berikut ini diberikan definisinya.

Definisi 2.4.6

Diberikan K, L modul-modul atas ring R. Fungsi $f: K \to L$ adalah homomorfisma modul jika:

i) $f(k_1 + k_2) = f(k_1) + f(k_2)$, untuk setiap $k_1, k_2 \in K$;

ii) $f(ak) = af(k)$, untuk setiap $a \in R$ dan $k \in K$ (Dummit dan Foote, 1999).

Definisi 2.4.7

Diberikan homomorfisma modul atas R yang didefinisikan dengan $f: K \to L$. *Kernel* dan *image* dari f didefinisikan sebagai berikut:

i) *Kernel* $(f) = \ker(f) = \{k \in K | \, f(k) = 0\}$,

ii) *Image* $(f) = \mathrm{Im}(f) = f(K) = \{l \in L | \, l = f(k)$, untuk $k \in K\}$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.8

Diberikan homomorfisma modul atas R yang didefinisikan dengan $f: M \to M'$.

i) Fungsi f disebut monomorfisma modul atas R jika f injektif (1-1), yaitu: untuk setiap $m_1, m_2 \in M$, $f(m_1) = f(m_2)$ berakibat $m_1 = m_2$,

ii) Fungsi f disebut epimorfisma modul atas R jika f surjektif (onto), yaitu $\mathrm{Im}(f) = M'$,

iii) Fungsi f disebut isomorfisma modul atas R jika f bijektif (injektif dan surjektif) (Dummit dan Foote, 1999).

Modul M dan M' dikatakan isomorfik jika terdapat suatu isomorfisma modul atas R dari M ke M', yang dinotasikan dengan $M \cong M'$.

Untuk lebih memahami definisi homomorfisma modul, berikut ini diberikan contoh homomorfisma modul.

Contoh 2.4.4

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ atas ring $\mathbb{Z}$. Didefinisikan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $f(a) = 5a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.

i) Diberikan sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku

$$\begin{aligned} f(a+b) &= 5(a+b) \\ &= 5a + 5b \\ &= f(a) + f(b) \end{aligned}$$

ii) Diberikan sebarang $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$, berlaku

$$\begin{aligned} f(na) &= 5(na) \\ &= n(5a) \\ &= nf(a) \end{aligned}$$

Jadi, f merupakan homomorfisma modul atas R dari $\mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$.

Contoh 2.4.5

Diberikan modul $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas $\mathbb{Z}$. Pemetaan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(a) = -a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ merupakan isomorfisma modul.

Teorema 2.4.2

Jika modul M atas ring R dan $M_1, \dots, M_n$ submodul dari M sedemikian sehingga

i) $M = M_1 + \cdots + M_{n,}$ dan

ii) $M_i \cap (M_1 + \cdots + M_{i-1} + \cdots + M_{i+1} + \cdots + M_n) = \{0\}$, untuk $1 \leq i \leq n$,

maka

$M_1 \oplus \dots \oplus M_n \cong M$ (Dummit dan Foote, 1999).

Bukti:

Diberikan $f_i: M_i \to M$ merupakan pemetaan inklusi, maka $f_i(x) = x$ untuk semua $x \in M_i$ dan didefinisikan

$$f: M_1 \oplus \dots \oplus M_n \to M$$

maka

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \cdots + x_n.$$

f merupakan homomorfisma modul atas R dan berdasarkan kondisi (i) maka f bersifat surjektif. Misalkan $(x_1, \dots, x_n) \in \ker(f)$. Akibatnya $x_1 + \cdots + x_n = 0$, sehingga untuk $1 \leq i \leq n$,

$$x_i = -(x_1 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n).$$

Oleh karena itu,

$$x_i \in M_i \cap (M_1 + \cdots + M_{i-1} + \cdots + M_n) = \{0\}$$

sehingga $(x_1, \dots, x_n) = 0$ dan f merupakan isomorfisma. ■

Setelah memahami definisi dan contoh mengenai homomorfisma modul, selanjutnya akan diberikan definisi mengenai barisan eksak.

Definisi 2.4.9

Diberikan modul M atas ring R. Barisan modul atas R dan homomorfisma modul atas R

$$\dots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_i \xrightarrow{f_{i+1}} M_{i+1} \to \cdots \tag{1}$$

dikatakan eksak di M_i jika $\mathrm{Im}(f_i) = \ker(f_{i+1})$. Barisan (1) dikatakan eksak jika eksak di setiap M_i untuk setiap $i \in I$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Salah satu bentuk khusus dari suatu barisan eksak yaitu barisan pendek. Berikut ini definisinya.

Definisi 2.4.10

Diberikan modul M atas ring R. Terdapat submodul M_1 dan M_2 pada submodul M, serta homomorfisma modul f dan g. Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ dikatakan barisan pendek (Adkins dan Weintraub, 1992).

Berdasarkan definisi barisan pendek, diperoleh teorema berikut ini.

Teorema 2.4.3

Diberikan modul M atas ring R. Terdapat submodul M_1 dan M_2 pada submodul M, serta homomorfisma modul f dan g.

i) Barisan $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M$ eksak di M_1 jika dan hanya jika f injektif,

ii) Barisan $M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$ eksak di M_2 jika dan hanya jika g surjektif (Adkins dan Weintraub, 1992).

Teorema 2.4.4

Barisan pendek:

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

dikatakan barisan eksak jika dan hanya jika f injektif, g surjektif, dan $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$. Berdasarkan Teorema Utama Homomorfisma Modul, diperoleh bahwa $M/\mathrm{Im}(f) \cong M_2$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh 2.4.6

Barisan

$$0 \to \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \to 0$$

merupakan barisan eksak pendek dengan $f(a + 3\mathbb{Z}) = 2a + 12\mathbb{Z}$ dan $g(b + 12\mathbb{Z}) = (b \mod 2) + 2\mathbb{Z}$ untuk setiap $a + 3\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ dan $b + 12\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}$. Berdasarkan Teorema Utama Homomorfisma Modul diperoleh bahwa $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

Setelah diberikan definisi mengenai barisan eksak dan barisan eksak pendek, maka selanjutnya akan diberikan definisi mengenai barisan eksak terpisah.

Definisi 2.4.11

Barisan eksak pendek:

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

dikatakan barisan eksak terpisah jika $\mathrm{Im}(f) = \ker(g)$ merupakan hasil jumlah langsung di M (Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh 2.4.7

Berdasarkan pada Contoh 2.5.3, diketahui bahwa:

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(f) &= \ker(g)\\ &= \mathbb{Z}/_{12\mathbb{Z}}\\ &= \{0 + 12\mathbb{Z}, 2 + 12\mathbb{Z}, 4 + 12\mathbb{Z}, 6 + 12\mathbb{Z}, 8 + 12\mathbb{Z}, 10 + 12\mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Oleh karena itu, barisan eksak pendek pada Contoh 2.4.6 merupakan barisan eksak terpisah.

Barisan eksak merupakan barisan eksak terpisah jika memenuhi syarat seperti pada Teorema 2.4.5.

Teorema 2.4.5

Diberikan barisan

$$0 \to M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \to 0$$

merupakan barisan eksak pendek dari modul atas R, maka pernyataan berikut ekuivalen:

i) terdapat homomorfisma $\alpha: M \to M_1$ sehingga $\alpha \circ f = 1_{M_1}$;

ii) terdapat homomorfisma $\beta: M_2 \to M$ sehingga $g \circ \beta = 1_{M_2}$;

iii) barisan tersebut merupakan barisan eksak terpisah.

Jika kondisi tersebut terpenuhi, maka:

$$\begin{aligned} M &\cong Im(f) \oplus \ker(\alpha) \\ &\cong \ker(g) \oplus Im(\beta) \\ &\cong M_1 \oplus M_2 \end{aligned}$$

(Adkins dan Weintraub, 1992).

Teorema 2.4.6

Diberikan

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \tag{2}$$

merupakan barisan dari modul atas R dan homomorfisma modul atas R. Oleh karena itu Barisan (2) merupakan barisan eksak jika dan hanya jika barisan

$$0 \to Hom_R(N, M_1) \xrightarrow{\phi_*} Hom_R(N, M) \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(N, M_2) \tag{3}$$

merupakan barisan eksak dari modul atas $\mathbb{Z}$ untuk semua modul N atas R. Jika

$$M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \to 0 \tag{4}$$

merupakan barisan dari modul atas R dan homomorfisma modul atas R, maka Barisan (4) eksak jika dan hanya jika barisan

$$0 \to Hom_R(M_2, N) \xrightarrow{\psi^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{\phi^*} Hom_R(M_1, N) \tag{5}$$

merupakan barisan eksak dari modul atas $\mathbb{Z}$ untuk semua modul N atas R (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Asumsikan Barisan (2) merupakan barisan eksak dan modul N merupakan sembarang modul atas R. Diketahui bahwa $f \in Hom_R(N, M)$ dan $\phi_*(f) = 0$, maka

$$0 = \phi \circ f(x) = \phi\big(f(x)\big),$$

untuk semua $x \in N$. ϕ bersifat injektif, sehingga $f(x) = 0$ untuk semua $x \in N$. Oleh karena itu $f = 0$ dan ϕ_* bersifat injektif.

Diketahui $\psi \circ \phi = 0$ (karena Barisan (2) merupakan barisan eksak di M), diperoleh

$$\psi_*(\phi_*(f)) = \psi \circ \phi_*(f) = \psi \circ \phi \circ f = 0,$$

untuk setiap $f \in Hom_R(N, M)$. Dengan demikian, $\mathrm{Im}(\phi_*) \subseteq \ker(\psi_*)$. Andaikan $g \in Hom_R(N, M)$ dengan $\psi_*(g) = 0, \psi(g(x)) = 0$ untuk semua $x \in N$. Jika $\ker(\psi) = \mathrm{Im}(\phi)$, untuk setiap $x \in N$, maka $g(x) = \phi(y)$ dengan $y \in M_1$. Diketahui ϕ bersifat injektif, y merupakan unik berdasarkan persamaan $g(x) = \phi(y)$. Hal ini memungkinkan untuk mendefinisikan fungsi $f: N \to M_1$ oleh $f(x) = y$ dengan $g(x) = y$. Karena $\phi_*(f) = g$, dapat disimpulkan $\ker(\psi_*) = \mathrm{Im}(\phi_*)$. Jadi, Barisan (3) merupakan barisan eksak.

Sebaliknya, asumsikan Barisan (3) merupakan eksak untuk semua modul N atas R. Akibatnya, ϕ_* bersifat injektif, untuk setiap modul N atas R. Diberikan $N = \ker(\phi)$ dan $\iota: N \to M_1$, sehingga $\phi_*(\iota) = \phi \circ \iota = 0$.

$\phi_*: Hom_R(N, M_1) \to Hom_R(N, M)$ bersifat injektif, $\iota = 0, N = (0)$. Oleh karena itu, ϕ bersifat injektif.

Diberikan $N = M_1$,diperoleh

$$0 = (\psi_* \circ \phi_*)\big(1_{M_1}\big) = \psi \circ \phi.$$

Dengan demikian $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \ker(\psi)$. Diberikan $N = \ker(\psi)$ dan $\iota: N \to M$. Diketahui $\psi_*(\iota) = \psi \circ \iota = 0$, eksak dari Barisan (3) berimplikasi bahwa $\iota = \phi_*(\alpha)$, untuk suatu $\alpha \in Hom_R(N, M_1)$. Dengan demikian,

$$\mathrm{Im}(\phi) \supseteq \mathrm{Im}(\iota) = N = \ker(\psi),$$

dan menghasilkan Barisan (2) merupakan barisan eksak. ■

Teorema 2.4.7

Diberikan modul M atas ring R. Jika

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M_2 \to 0 \qquad (6)$$

merupakan barisan eksak terpisah dari modul atas ring R, maka barisan

$$0 \to Hom_R(N, M_1) \xrightarrow{\phi_*} Hom_R(N, M) \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(N, M_2) \to 0 \qquad (7)$$

dan

$$0 \to Hom_R(M_2, N) \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{\phi_*} Hom_R(M_1, N) \to 0 \ldots\ldots\ldots \ (8)$$

merupakan barisan eksak terpisah dari grup komutatif (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Akan dibuktikan bahwa Barisan (7) dan (8) merupakan barisan eksak terpisah. Berdasarkan Teorema 2.4.5, akan ditunjukkan bahwa ψ_* bersifat surjektif dan terdapat pemisahan pada Barisan (7). Diambil sebarang $\beta: M_2 \to M$ Barisan eksak terpisah (6) dan misalkan $f \in Hom_R(N, M_2)$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\psi_* \circ \beta_*(f) &= \psi_*(\beta \circ f) \\
&= (\psi \circ \beta) \circ f \\
&= \left(1_{M_2}\right) \circ f \\
&= \left(1_{Hom_R(N,M_2)}\right)(f).
\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh $\psi_* \circ \beta_* = \left(1_{Hom_R(N,M_2)}\right)$. Jadi ψ_* bersifat surjektif dan barisan β_* merupakan barisan eksak terpisah. ■

Sebelum membahas mengenai definisi modul bebas, terlebih dahulu akan didefinisikan mengenai ideal utama.

Definisi 2.4.12

Diberikan ring komutatif dengan elemen satuan $(R, +, .)$. Ideal di R disebut ideal utama jika I dapat dibangun oleh suatu elemen dalam R, yaitu ada $a \in R$ sehingga $I = \langle a \rangle = \langle ra | r \in R \rangle$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Untuk lebih memahami definisi tersebut, berikut ini diberikan contoh ideal utama.

Contoh 2.4.8

1) Di dalam ring $\mathbb{Z}$, ideal-ideal berikut adalah ideal utama: $\langle 2\rangle, \langle 4\rangle, \langle 11\rangle$, dan seterusnya.
2) Di dalam ring $\mathbb{Z}[x]$, ideal-ideal berikut adalah ideal utama: $\langle x\rangle, \langle 2\rangle, \langle x^3\rangle$, dan seterusnya.

Suatu ideal disebut sebagai ideal utama jika memiliki satu elemen pembangun tunggal. Berikut ini diberikan definisi daerah ideal utama.

Definisi 2.4.13

Daerah integral R disebut daerah ideal utama (DIU) jika setiap idealnya merupakan ideal utama, yakni setiap idealnya dapat dibangun oleh satu elemen (Adkins dan Weintraub, 1992).

Berikut ini contoh daerah ideal utama.

Contoh 2.4.9

1) $\mathbb{Z}, \mathbb{R}[x], F$, dan $\mathbb{Z}[i]$ merupakan daerah ideal utama.
2) $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$, dan $\mathbb{R}[x, y]$ bukan merupakan daerah ideal utama.

Definisi 2.4.14

Diberikan modul M atas ring R. Himpunan bagian $X \subseteq M$ dikatakan bergantung linear jika terdapat elemen $x_1, x_2, \dots, x_n$ di X dan elemen $r_1, r_2, \dots, r_n$ di R yang tidak semua nol sedemikian sehingga $r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n = 0$. Himpunan yang tidak bergantung linear disebut himpunan bebas linear (Adkins dan Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.15

Diberikan modul M atas ring R. Himpunan X dikatakan basis untuk modul M jika X membangun modul M atas ring R dan X bebas linear (Adkins dan Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.16

Modul M atas ring R disebut modul bebas $(free\ R - module)$ apabila modul tersebut memiliki basis (Adkins dan Weintraub, 1992).

Definisi 2.4.17

Diberikan daerah integral R dan modul M atas ring R. Elemen $x \in M$ disebut elemen torsi jika terdapat $r \in R - \{0\}$, sehingga $rx = 0_M$. Modul M dikatakan modul torsi jika setiap elemen di M merupakan elemen torsi, dinotasikan dengan $M = M_T$. Modul M disebut modul bebas torsi jika elemen torsi di M hanya 0_M, atau dengan kata lain $M_T = \{0_M\}$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Proposisi 2.4.1

Jika R merupakan daerah integral dan M modul bebas atas ring R, maka M adalah modul bebas torsi (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan M adalah modul bebas dengan basis $S = \{x_j\}_{j \in J}$ dan misalkan $x \in M_\tau$. Oleh karena itu, $ax = 0$ untuk beberapa $a \neq 0 \in R$. Untuk $x = \sum_{j \in J} a_j x_j$, sehingga

$$0 = ax = \sum_{j \in J} (aa_j) x_j.$$

Diketahui S adalah basis dari modul M, $aa_j = 0$ untuk semua $j \in J$, $a \neq 0$ dan R adalah daerah integral, sehingga $a_j = 0$ untuk semua $j \in J$. Oleh karena itu, $x = 0, M_\tau = \langle 0 \rangle$. Akibatnya, M adalah modul bebas torsi. ■

Proposisi 2.4.2

Jika diberikan modul bebas M atas ring R dengan basis S, modul N atas ring R, dan fungsi $h: S \to N$, maka terdapat dengan tunggal $f \in Hom_R(M, N)$ sedemikian sehingga $f|_s = h$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan $S = \{x_j\}_{j\in J}$. Setiap $x \in M$ dapat ditulis menjadi $x = \sum_{j\in J} a_j x_j$ dengan tak hingga banyaknya a_j adalah tidak nol. Didefinisikan $f: M \to N$ maka

$$f(x) = \sum_{j\in J} a_j h(x_j). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.4.8

Jika R ring komutatif dan M, N merupakan modul bebas atas ring R yang dibangun secara berhingga, maka $Hom_R(M, N)$ merupakan modul bebas atas ring R yang dibangun secara berhingga (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan $B = \{v_1, \dots, v_m\}$ merupakan basis dari modul M dan $C = \{w_1, \dots, w_n\}$ merupakan basis dari modul N. Didefinisikan $f_{ij} \in Hom_R(M, N)$ untuk $1 \le i \le m$ dan $1 \le j \le n$ sehingga

$$f_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_j & \text{jika } k = i, \\ 0 & \text{jika } k \neq i. \end{cases}$$

f_{ij} merupakan elemen dari $Hom_R(M, N)$ yang didefinisikan secara tunggal berdasarkan Proposisi 2.4.2.

Misalkan $f_{ij}: 1 \le i \le m; 1 \le j \le n$ merupakan basis dari $Hom_R(M, N)$. Misalkan $f \in Hom_R(M, N)$ dan $f(v_i) = a_{i1}w_1 + \cdots + a_{in}w_n$ untuk $1 \le i \le m$. Misalkan

$$g = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_{ij}$$

maka $g(v_k) = a_{k1}w_1 + \cdots + a_{kn}w_n = f(v_k)$ untuk $1 \le k \le m$, jadi $g = f$ merupakan dua homomorfisma dengan basis M. Oleh karena itu, $\{f_{ij}: 1 \le i \le m; 1 \le j \le n\}$ membangun $Hom_R(M, N)$. $\blacksquare$

Proposisi 2.4.3

Setiap modul M atas ring R adalah lapangan hasil bagi dari modul bebas dan jika modul M dibangun secara berhingga, maka M adalah lapangan hasil bagi dari modul M atas ring R yang dibangun secara berhingga (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan $S = \{x_j\}_{j\in J}$ adalah himpunan yang dibangun untuk modul M atas ring R dan misalkan $F = \bigoplus_{j\in J} R_j$ dengan $R_j = R$ merupakan modul bebas atas ring R. Didefinisikan homomorfisma $\psi: F \to M$ sehingga

$$\psi\left(\left(a_j\right)_{j\in J}\right) = \sum_{j\in J} a_j x_j.$$

Diketahui S merupakan himpunan yang membangun modul M, ψ merupakan fungsi yang bersifat surjektif dan $M \cong F/\ker(\psi)$. Catatan jika $|S| < \infty$ maka F dibangun secara berhingga. Diketahui M merupakan hasil bagi dari F, sehingga $\mu(M) \leq \mu(F)$. Tetapi F merupakan modul bebas dengan indeks j sehingga $\mu(F) \leq |J|$, dan J merupakan indeks yang membangun modul M, berimplikasi bahwa $\mu(F) \leq \mu(M)$ jika S merupakan himpunan pembangun minimal dari modul M. Oleh karena itu, $\mu(F) = \mu(M)$. ■

Definisi 2.4.18

Diberikan M adalah modul atas R maka barisan eksak pendek

$$0 \to K \to F \to M \to 0$$

dengan F merupakan modul bebas atas R merupakan presentasi bebas dari M (Adkins dan Weintraub, 1992).

Proposisi 2.4.4

Jika F adalah modul bebas atas R, maka setiap barisan eksak pendek

$$0 \to M_1 \to M \xrightarrow{f} F \to 0$$

dari modul atas R adalah eksak terpisah (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan $S = \{x_j\}_{j\in J}$ adalah basis dari modul bebas F. Karena f surjektif, untuk setiap $j \in J$ terdapat elemen $y_j \in M$ sedemikian sehingga $f(y_j) = x_j = 1_F(x_j)$. Didefinisikan $h: S \to M$ dengan $h(x_j) = y_j$. Berdasarkan Proposisi 2.4.2, terdapat dengan tunggal $\beta \in Hom_R(F, M)$, sehingga $\beta|_S = h$. Karena $f \circ \beta(x_j) = x_j = 1_F(x_j)$ untuk setiap $j \in J$. Akibatnya, $f \circ \beta = 1_F$. ■

Akibat 2.4.1

Diberikan N merupakan modul atas R dan F merupakan modul bebas atas R. Jika

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} F \to 0 \qquad (9)$$

merupakan barisan eksak pendek dari modul atas R, maka

$$0 \to Hom_R(N, M_1) \xrightarrow{\phi_*} Hom_R(N, M) \xrightarrow{\psi_*} Hom_R(N, F) \to 0$$

merupakan barisan eksak terpisah dari grup abel ($R - modul$ jika R komutatif) (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Berdasarkan Proposisi 2.4.4, Barisan (9) merupakan barisan eksak terpisah. ■

Salah satu bentuk khusus dari modul atas ring R yaitu modul proyektif. Modul proyektif berkaitan dengan modul bebas dan barisan eksak. Sebelum diberikan definisi modul proyektif, berikut ini diberikan teorema yang berkaitan dengan modul proyektif.

Teorema 2.4.9

Modul P atas ring R ekuivalen dengan:

(1) Setiap barisan eksak pendek dari modul atas R

$$0 \to M_1 \to M \to P \to 0$$

adalah barisan eksak terpisah.

(2) Terdapat modul P' pada modul atas ring R sedemikian rupa sehingga $P \oplus P'$ adalah modul bebas atas ring R.

(3) Untuk setiap N pada modul atas ring R dan homomorfisma modul atas ring R bersifat surjektif dengan pemetaan $\psi: M \to P$, homomorfisma

$$\psi_*: Hom_R(N, M) \to Hom_R(N, P)$$

surjektif.

(4) Untuk setiap homomorfisma modul atas ring R surjektif dengan pemetaan $\phi: M \to N$, homomorfisma

$$\phi_*: Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, N)$$

surjektif (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Misalkan barisan $0 \to K \to F \to P \to 0$. Barisan ini merupakan barisan eksak pendek terpisah. Berdasarkan Teorema 2.4.5, diperoleh $F \cong P \oplus K$. Akibatnya, terdapat modul K atas ring R sedemikian sehingga $P \oplus K$ merupakan modul bebas atas ring R.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Misalkan $F = P \oplus P'$ adalah modul bebas. Diberikan homomorfisma modul atas ring R bersifat surjektif dengan pemetaan $\psi: M \to P$, misalkan $\psi' = M \oplus P' \to P \oplus P' = F$ dengan $\psi'\big((m,q)\big) = (\psi(m), q)$ untuk setiap $(m,q) \in M \oplus P'$ adalah homomorfisma surjektif, sehingga terdapat barisan eksak

$$0 \to \ker(\psi') \to M \oplus P' \xrightarrow{\psi'} F \to 0. \tag{8}$$

Berdasarkan Proposisi 2.4.4, karena F adalah modul bebas berimplikasi bahwa Barisan (8) adalah barisan eksak terpisah. Teorema 2.4.6 menunjukkan bahwa

$$\psi'_*: Hom_R(N, M \oplus P') \to Hom_R(N, P \oplus P')$$

adalah homomorfisma surjektif. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa homomorfisma

$$\psi_*: Hom_R(N, M) \to Hom_R(N, P)$$

surjektif. Misalkan $f \in Hom_R(N, P)$ dan $f' = \iota \circ f$, dengan $\iota: P \to P \oplus P'$. Diperoleh bahwa $f' \in Hom_R(N, P \oplus P')$. Karena ψ'_* surjektif, maka terdapat $\tilde{f} \in Hom_R(N, M \oplus P')$ dengan $\psi'_*(\tilde{f}) = f'$. Misal $\pi: M \oplus P' \to M$ dan $\pi': P \oplus P' \to P$ adalah pemetaan proyeksi dengan $\pi\big((m,q)\big) = m$ dan $\pi'(p,q) = p$. Kedua pemetaan tersebut merupakan homomorfisma. Perhatikan bahwa $\pi' \circ \iota = \iota_p$ dan $\psi \circ \pi = \pi' \circ \psi'$ sehingga

$$\psi_*\big(\pi \circ \tilde{f}\big) = \psi \circ \big(\pi \circ \tilde{f}\big)$$

$$= \pi' \circ \psi' \circ \tilde{f}$$

$$= \pi' \circ f'$$

$$= (\pi' \circ \iota) \circ f$$

$$= f$$

Oleh karena itu, ψ_* adalah homomorfisma surjektif.

(3) $\Rightarrow$ (4) Misalkan barisan $0 \to K \to F \xrightarrow{\psi} P \to 0$ merupakan presentasi bebas dari P (*free presentation of P*). Berdasarkan syarat (3), homomorfisma

$$\psi_*: Hom_R(P, F) \to Hom_R(P, P) \tag{9}$$

surjektif. Sehingga terdapat $\beta \in Hom_R(P, F)$ sedemikian sehingga $\psi_*(\beta) = 1_p$, sehingga $\psi \circ \beta = 1_p$. Misalkan $\phi: M \to N$ merupakan R −homomorfisma modul surjektif. Akan dibuktikan bahwa $\phi_*: Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, N)$ merupakan homomorfisma surjektif. Misalkan $f \in Hom_R(P, N)$. Diagram komutatif dari R −homomorfisma modul sebagai berikut.

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\psi} & P & \to & 0 \\ & & \downarrow f & & \\ M & \xrightarrow{\phi} & N & \to & 0 \end{array}$$

dengan baris eksak. Misalkan $S = \{x_j\}_{j \in J}$ adalah basis dari F. ψ merupakan R −homomorfisma modul surjektif, dengan $y_j \in M$ untuk setiap $j \in J$ sedemikian sehingga $\phi(y_j) = f \circ \psi(x_j)$ untuk setiap $j \in J$. Berdasarkan Proposisi 2.4.2, terdapat R −homomorfisma modul $g: F \to M$ sedemikian sehingga $g(x_j) = y_j$ untuk setiap $j \in J$. Diketahui $(\phi \circ g)(x_j) = \phi(y_j) = (f \circ \psi)(x_j)$ untuk setiap $j \in J$, sehingga $\phi \circ g = f \circ \psi$. Didefinisikan $\tilde{f} \in Hom_R(P, M)$ adalah $\tilde{f} = g \circ \beta$ dan

$$\phi_*(\tilde{f}) = \phi \circ (g \circ \beta)$$

$$= f \circ \psi \circ \beta$$

$$= f \circ 1p$$

$$= f.$$

Oleh karena itu, $\phi_*: Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, N)$ adalah homomorfisma surjektif.

(4) $\Rightarrow$ (1) Pada barisan eksak pendek $0 \to M_1 \to M \xrightarrow{\psi} P \to 0$, fungsi $\psi: M \to P$ bersifat surjektif. Misalkan $N = P$, diperoleh

$$\psi_*: Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, P)$$

adalah surjektif. Misalkan $\beta: P \to M$ dengan $\psi_*(\beta) = 1_p$ ekuivalen dengan $\psi \circ \beta = 1_p$. Akibatnya, β adalah barisan eksak terpisah. ■

Untuk lebih memahami tentang modul proyektif, maka diberikan definisi berikut ini.

Definisi 2.4.19

Jika modul P pada modul atas ring R memenuhi salah satu pernyataan pada Teorema 2.4.9, maka P disebut modul proyektif atas ring R (Adkins dan Weintraub, 1992).

Berikut ini adalah beberapa karakterisasi dari modul proyektif.

Proposisi 2.4.5

Setiap modul bebas atas ring R merupakan modul proyektif atas ring R (Adkins dan Weintraub, 1992).

Akibat 2.4.2

Diberikan R suatu daerah integral. Jika P adalah modul proyektif atas ring R, maka P adalah modul bebas torsi atas ring R (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Berdasarkan Teorema 2.4.9, P adalah submodul dari modul bebas F atas ring R. Berdasarkan Proposisi 2.4.1, setiap modul bebas pada daerah integral adalah bebas torsi, dan setiap submodul dari modul bebas torsi adalah bebas torsi. ■

Akibat 2.4.3

Suatu modul P atas ring R merupakan modul proyektif atas ring R yang dibangun secara berhingga jika dan hanya jika P merupakan hasil jumlah langsung dari suatu modul bebas atas ring R yang dibangun secara berhingga (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan modul P adalah modul yang dibangun secara berhingga dan proyektif. Berdasarkan Proposisi 2.4.3, terdapat presentasi bebas

$$0 \to K \to F \to P \to 0$$

Sedemikian sehingga F adalah modul bebas dan $\mu(F) = \mu(P) < \infty$. Berdasarkan Teorema 2.4.5, modul P merupakan hasil jumlah langsung dari F.

Kemudian, asumsikan bahwa modul P adalah hasil jumlah langsung dari modul bebas F atas ring R yang dibangun secara berhingga. Jadi P adalah modul proyektif, dan jika $P \oplus P' \cong F$ maka $F/P' \cong P$ sehingga modul P dibangun secara berhingga. ■

Berikut ini akan diberikan suatu sifat yang menjelaskan bahwa modul proyektif atas ring R dapat terbentuk oleh jumlah langsung dari tak hingga banyak modul proyektif atas ring R.

Proposisi 2.4.6

Diberikan $\{P_j\}_{j\in J}$ merupakan keluarga modul proyektif atas ring R dan modul $P = \bigoplus_{j\in J} P_j$ atas ring R. Modul P merupakan modul proyektif jika dan hanya jika P_j merupakan modul proyektif untuk setiap $j \in J$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Diberikan P merupakan modul proyektif. Berdasarkan Teorema 2.4.9, terdapat modul P' atas ring R sedemikian sehingga $P \oplus P' = F$ merupakan modul bebas atas ring R. Sehingga

$$F = P \oplus P' = \left(\bigoplus_{j\in J} P_j\right) \oplus P'.$$

Oleh karena itu, setiap P_j merupakan hasil jumlah langsung dari modul bebas F atas ring R. Dengan demikian, P_j adalah proyektif.

Sebaliknya, diberikan P_j adalah proyektif untuk setiap $j \in J$ dan misalkan $P_{j'}$ merupakan modul atas ring R sedemikian sehingga $P_j \oplus P_{j'} = F_j$ adalah modul bebas. Sehingga

$$P \oplus \left(\bigoplus_{j\in J} P_{j'}\right) \cong \bigoplus_{j\in J} \left(P_j \oplus P_{j'}\right)$$
$$\cong \bigoplus_{j\in J} F_j.$$

Diketahui hasil jumlah langsung dari modul bebas adalah bebas, maka P merupakan hasil jumlah langsung dari modul bebas, sehingga P adalah proyektif. ■

Proposisi 2.4.7

Diberikan ring komutatif R. Jika P dan Q merupakan modul proyektif atas ring R yang dibangun secara berhingga, maka $Hom_R(P, Q)$ merupakan modul proyektif atas ring R yang dibangun secara berhingga (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Diberikan P dan Q merupakan modul proyektif atas ring R yang dibangun secara berhingga, terdapat modul P' dan Q' atas ring R sedemikian sehingga $P \oplus P'$ dan $Q \oplus Q'$ merupakan modul bebas yang dibangun secara berhingga. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.4.8, $Hom_R(P \oplus P', Q \oplus Q')$ merupakan modul bebas yang dibangun secara berhingga.

$Hom_R(P \oplus P', Q \oplus Q')$

$\cong Hom_R(P, Q) \oplus Hom_R(P, Q') \oplus Hom_R(P', Q) \oplus Hom_R(P', Q')$

Sehingga $Hom_R(P, Q)$ merupakan hasil jumlah langsung dari modul bebas atas ring R yang dibangun secara berhingga. Oleh karena itu, $Hom_R(P, Q)$ merupakan proyektif dan dibangun secara berhingga berdasarkan Akibat 2.4.2. ■

Sebelum diberikan suatu sifat agar ideal di dalam suatu daerah integral R membentuk suatu modul proyektif atas ring R, terlebih dahulu akan diberikan definisi mengenai *invertible* ideal.

Definisi 2.4.20

Diberikan R adalah suatu daerah integral dan S adalah lapangan hasil bagi dari R. Ideal I di R dikatakan *invertible* jika terdapat elemen $a_1, \dots, a_n \in I$ dan $b_1, \dots., b_n \in S$ sedemikian sehingga:

i) $b_i I \in R$ untuk setiap $i \in \{1,2, \dots, n\}$,

ii) $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = 1$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh 2.4.10

Diberikan $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ dan ideal $I = \langle 2, 1 + \sqrt{-5} \rangle$. Diketahui I bukan merupakan ideal utama, maka akan ditunjukkan I merupakan *invertible* ideal. Misal $a_1 = 2, a_2 = 1 + \sqrt{-5}, b_1 = -1$, dan $b_2 = (1 - \sqrt{-5})/2$, maka diperoleh $a_1 b_1 + a_2 b_2 = -2 + 3 = 1$. Jelas bahwa $a_1 b_1, a_2 b_2 \in R$ sehingga diperoleh $b_1 I \in R$ dan $b_2 I \in R$. Sehingga terbukti bahwa I merupakan *invertible* ideal.

Setelah diberikan definisi dan contoh dari *invertible* ideal, berikut ini diberikan suatu sifat dari ideal di dalam suatu daerah integral R membentuk suatu modul proyektif atas ring R.

Teorema 2.4.10

Diberikan R adalah suatu daerah integral dan ideal I di R. Ideal I merupakan modul proyektif atas ring R jika dan hanya jika I merupakan suatu *invertible* ideal (Adkins dan Weintraub, 1992).

Bukti:

Misalkan I *invertible*, pilih $a_1, \dots, a_n \in I$ dan $b_1, \dots, b_n$ pada lapangan hasil bagi K atas ring R sehingga syarat pada Definisi 2.4.19 terpenuhi. Misalkan fungsi $\phi: R^n \to I$ didefinisikan oleh

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n,$$

dan didefinisikan $\beta: I \to R^n$, dengan

$$\beta(a) = (ab_1, \dots, ab_n).$$

$ab_i \in R$, untuk setiap i berdasarkan syarat (i) pada Definisi 2.4.20. Syarat (ii) pada Definisi 2.4.19 menunjukkan bahwa

$$\phi \circ \beta(a) = \sum_{i=1}^{n} a_i(ab_i) = a\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) = a$$

untuk setiap $a \in I$. Oleh karena itu $\phi \circ \beta = 1_p$ dan Teorema 2.4.5 mengimplikasikan bahwa I adalah hasil jumlah langsung dari modul bebas R^n atas ring R, jadi I merupakan modul proyektif atas ring R.

Sebaliknya, asumsikan bahwa ideal $I \subseteq R$ merupakan modul proyektif atas ring R. Sehingga I merupakan hasil jumlah langsung dari modul bebas F atas ring R, jadi terdapat homomorfisma modul atas ring R dengan pemetaan $\phi: F \to I$ dan $\beta: I \to F$ sedemikian sehingga $\phi \circ \beta = 1_f$. Diberikan $S = \{x_j\}_{j \in J}$ merupakan basis dari modul F. Untuk $x \in I, \beta(x) \in F$ unik sehingga

$$\beta(x) = \textstyle\sum_{j \in J} c_j x_j \tag{10}$$

untuk setiap $j \in J$, misalkan $\psi_j(x) = c_j$. Diberikan $\psi_j: I \to R$ merupakan homomorfisma modul atas ring R. Jika $a_j = \phi(x_j) \in I$, maka

i) untuk setiap $x \in I, \psi_j(x) = 0$ kecuali untuk sebanyak berhingga $j \in J$;

ii) untuk setiap $x \in I$, Persamaan (10) menunjukkan bahwa

$$x = \phi(\beta(x)) = \sum_{j \in J} \psi_j(x) a_j.$$

Diberikan $x \neq 0$ dan $j \in J$, didefinisikan $b_j \in K$ (K merupakan lapangan hasil bagi dari ring R) sehingga

$$b_j = \frac{\psi_j(x)}{x}.$$

Elemen $b_j \in K$ bergantung pada $j \in J$ tetapi tidak pada elemen $x \neq 0 \in I$. Misalkan $x' \neq 0 \in I$ merupakan elemen lain dari I. Sehingga

$$x'^{\psi_j}(x) = \psi_j(x'x) = \psi_j(xx') = x\psi_j(x')$$

jadi $\psi_j(x)/x = \frac{\psi_j(x')}{x'}$. Oleh karena itu, untuk setiap $j \in J$ dikatakan unik yang didefinisikan oleh $b_j \in K$ terhingga banyaknya b_j tidak nol. Jika $x \neq 0 \in I$ maka

$$x = \sum_{j=1}^{n} \psi_j(x) a_j = \sum_{j=1}^{n} (b_j x) a_j = x\left(\sum_{j=1}^{n} b_j a_j\right).$$

Untuk $x \neq 0$ dari persamaan tersebut menghasilkan

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = 1$$

dengan $a_1, \dots, a_n \in I$ dan $b_1, \dots, b_n \in K$. $b_j I \subseteq R$ untuk $1 \leq j \leq n$. Namun, jika $x \neq 0 \in I$ maka $b_j x = \psi_j(x)/x$ sehingga $b_j x = \psi_j(x) \in R$. Oleh karena itu, I merupakan *invertible* ideal dan terbukti bahwa I merupakan modul proyektif atas ring R ■

2.5 Modul Proyektif *Rough*

Relasi adalah suatu aturan yang memasangkan anggota suatu himpunan ke anggota himpunan yang lain. Selain itu, relasi juga dapat didefinisikan seperti berikut ini.

Definisi 2.5.1

Suatu relasi R atas himpunan P adalah suatu himpunan bagian dari $P \times P = \{(a, b); a, b \in P\}$. Dapat juga diartikan bahwa suatu relasi R atas himpunan P adalah suatu aturan yang menghubungkan anggota dari himpunan P dengan anggota himpunan P sendiri (Suwilo dkk, 1987).

Berikut ini diberikan contoh relasi.

Contoh 2.5.1

Diberikan himpunan $P = \{2,3,4,5,6,7\}$. Relasi R pada himpunan P didefinisikan sebagai berikut:

$R = \{(a, b) \in P \times P | a$ membagi habis $b\}$. Olhe karena itu, diperoleh

$R = \{(2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6)\}$.

Contoh 2.5.2

Diberikan himpunan $P = \{1,2,3, \dots.,15\}$. Relasi R pada himpunan P didefinisikan sebagai berikut:

$R = \{(a, b) \in P \times P | b = 2a\}$. Diperoleh $R =$

$\{(1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12), (7,14)\}$.

Setelah diberikan definisi dan contoh mengenai relasi. Selanjutnya akan diberikan definisi dan contoh mengenai relasi ekuivalensi.

Definisi 2.5.2

Suatu relasi R pada suatu himpunan P disebut relasi ekuivalensi jika R memiliki sifat refleksif, simetris, dan transitif.

i) Relasi R bersifat refleksif jika dan hanya jika xRx untuk setiap $x \in P$.

ii) Relasi R bersifat simetris jika dan hanya jika xRy berakibat yRx untuk setiap $x, y \in P$.

iii) Relasi R bersifat transitif jika dan hanya jika xRy dan yRz berakibat xRz untuk setiap $x, y, z \in P$ (Marsudi, 2010).

Contoh 2.5.3

Diberikan himpunan $P = \{1,3,6,7,8\}$. Relasi R pada himpunan P didefinisikan yaitu xRy, dengan $x, y \in P$ jika dan hanya jika $x - y = 3m$, dengan $m \in \mathbb{Z}$. Dapat juga diartikan, $x - y$ habis dibagi oleh 3. Berikut ini akan dibuktikan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi pada P.

i) untuk $x \in P$, berlaku xRx karena $x - x = 0 = 3.0$ dan $0 \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, relasi R bersifat refleksif.

ii) untuk setiap $x, y \in P$, jika xRy maka $x - y = 3m$ untuk $m \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $y - x = -3m = 3(-m)$, dengan $-m \in \mathbb{Z}$. Sehingga, yRx. Oleh karena itu, R bersifat simetris.

iii) untuk $x, y, z \in P$, jika xRy dan yRz maka $x - y = 3m$ dan $y - z = 3n$ untuk suatu $m, n \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 3m + 3n = 3(m + n),$$

dengan $m + n \in \mathbb{Z}$, maka dapat dikatakan xRz. Oleh karena itu, relasi R bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi R adalah relasi yang bersifat refleksif, simetris dan transitif. Sehingga, R merupakan relasi ekuivalensi.

Setelah membahas definisi dan contoh dari relasi ekuivalensi. Selanjutnya akan dibahas mengenai kelas ekuivalensi.

Definisi 2.5.3

Diberikan relasi R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan P dan $a \in P$. Kelas ekuivalensi dari a pada R adalah $[a]_R = \{x: x \in P$ dan $aRx\}$. Dapat juga diartikan, kelas ekuivalensi a pada R memuat semua anggota pada himpunan P yang mempunyai relasi dengan a (Barnier dan Feldman, 1990).

Berikut ini merupakan contoh dari kelas ekuivalensi.

Contoh 2.5.4

Berdasarkan Contoh 2.5.3, relasi R adalah relasi ekuivalensi pada P. Kelas ekuivalensi dalam Contoh 2.5.3 adalah $[1] = \{1,3,7\}$ atau himpunan bilangan bulat ganjil dari himpunan P dan $[2] = \{6,8\}$ atau himpunan bilangan bulat genap dari himpunan P.

Pada awal tahun 1980-an, Pawlak memperkenalkan tentang himpunan *rough*. Metode himpunan *rough* adalah suatu pendekatan matematis untuk menganalisis pola data yang bersifat tak pasti. Himpunan *rough* berkaitan dengan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas. Oleh karena itu, sebelum diberikan definisi himpunan *rough* terlebih dahulu akan diberikan definisi aproksimasi bawah dan aproksimasi atas.

Definisi 2.5.4

Misalkan $S = (U, R)$ adalah ruang aproksimasi dan X adalah himpunan bagian dari U. Aproksimasi bawah dan aproksimasi atas didefinisikan sebagai berikut:

$$\underline{Apr}(X) = \{x | [x]_R \subseteq X\}$$

$$\overline{Apr}(X) = \{x | [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$$

$\underline{X}$ disebut aproksimasi bawah dari X dan $\overline{X}$ disebut aproksimasi atas dari X pada ruang aproksimasi S (Miao dkk., 2005).

Berikut ini diberikan contoh aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari suatu himpunan.

Contoh 2.5.5

Diberikan ruang aproksimasi (U, R), dengan himpunan $U = \{x_1, x_2, \dots., x_{10}\}$ dan R adalah relasi ekuivalensi pada U dengan kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{x_1, x_3\}$;

$E_2 = \{x_2, x_4\}$;

$E_3 = \{x_5, x_6, x_8\}$;

$E_4 = \{x_7, x_9\}$;

$E_5 = \{x_{10}\}$.

Jika dipilih $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, maka aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari X adalah sebagai berikut:

$\underline{Apr}(X) = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_4\}$;

$\overline{Apr}(X) = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_5, x_6, x_8\}$.

Setelah diberikan definisi mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas beserta contoh. Selanjutnya akan diberikan definisi mengenai himpunan *rough*.

Definisi 2.5.5

Diberikan R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan semesta U, maka pasangan (U, R) adalah ruang aproksimasi. Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$ merupakan himpunan *rough* jika $\overline{Apr}(X) - \underline{Apr}(X) \neq \emptyset$ (Pawlak, 1982).

Berikut ini contoh dari himpunan *rough*.

Contoh 2.5.6

Berdasarkan Contoh 2.5.5, pasangan berurutan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari X yaitu

$(\{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_4\}, \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_4\} \cup \{x_5, x_6, x_8\})$

$= (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_8\})$

merupakan himpunan *rough* di dalam ruang aproksimasi (U, R).

Sebelum membahas mengenai modul proyektif *rough*, terlebih dahulu akan diberikan definisi yang berkaitan dengan modul proyektif *rough*.

Definisi 2.5.6

Misalkan $S = (U, R)$ adalah ruang aproksimasi dan $*$ merupakan operasi biner pada U. Himpunan bagian $P \subseteq U$ dikatakan grup *rough* jika $Apr(P) = \left(\underline{Apr}(P),\ \overline{Apr}(P)\right)$ memenuhi:

i) $x * y \in \overline{Apr}(P)$, untuk setiap $x, y \in P$.

ii) $(x * y) * z = x * (y * z)$ di $\overline{Apr}(P)$ untuk setiap $x, y, z \in \overline{Apr}(P)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(P)$.

iii) Terdapat $e \in \overline{Apr}(P)$ sedemikian sehingga $x * e = e * x = x$, untuk setiap $x \in P$. Elemen e disebut elemen identitas *rough* (*rough identity* element) di P.

iv) Untuk setiap $x \in P$, terdapat $y \in P$ sedemikian sehingga $x * y = y * x = e$. Elemen y disebut elemen invers dari x di P (Miao dkk, 2005).

Teorema 2.5.1

Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan operasi biner $*$ pada U sedemikian sehingga U merupakan suatu grup terhadap operasi biner $*$. Diberikan himpunan $X \subseteq U$. Jika $\overline{Apr}(X)$ merupakan subgrup U, maka X merupakan subgrup *rough* (*upper rough subgroup*) dari U (Jesmalar, 2017).

Bukti:

Diketahui $\overline{Apr}(X)$ merupakan subgrup dari U dan $X \subseteq \overline{Apr}(X)$, untuk setiap $x, y \in X$ berlaku $x * y \in \overline{Apr}(X)$. Sifat asosiatif berlaku di $\overline{Apr}(X)$ dan terdapat elemen identitas $e \in \overline{Apr}(X)$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $x * e = e * x = x$, dengan e merupakan elemen identitas *rough* di X. Untuk setiap $x \in X$, terdapat $y \in \overline{Apr}(X)$ sedemikian sehingga berlaku $x * y = y * x = e$, dengan y merupakan elemen invers *rough* dari x di X. Oleh karena itu, X merupakan subgrup *rough* dari U. ■

Definisi 2.5.7

Misalkan (U_1, R) dan (U_2, R) adalah dua ruang aproksimasi, dan $*$ dan $\overline{*}$ merupakan dua operasi biner atas U_1 dan U_2. Misalkan $P_1 \subseteq U_1$ dan $P_2 \subseteq U_2$. $\overline{Apr}(P_1)$ dan $\overline{Apr}(P_2)$ disebut homomorfisma grup *rough* jika terdapat pemetaan θ di P_1 dan P_2 sedemikian sehingga $\theta(x * y) = \theta(x) \overline{*} \theta(y)$ untuk setiap $x, y \in \overline{Apr}(P_1), \overline{Apr}(P_2)$ (Miao dkk., 2005).

Setelah memahami definisi himpunan *rough*, grup, dan ring. Selanjutnya akan diberikan definisi dari ring *rough*. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.5.8

Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan dua operasi biner $(+,*)$ pada U. Himpunan bagian tak kosong $P \subseteq U$ disebut ring *rough* jika memenuhi:

i) untuk setiap $a, b \in P$, berlaku $a + b \in \overline{Apr}(P)$;

ii) untuk setiap $a, b \in P$ berlaku $a + b = b + a$, ($+$ bersifat komutatif di P);

iii) untuk setiap $a, b, c \in \overline{Apr}(P)$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$, (operasi $+$ bersifat asosiatif di $\overline{Apr}(P)$);

iv) terdapat elemen identitas *rough (rough identity element)* yaitu $e \in \overline{Apr}(P)$, sehingga $a + e = a$ untuk setiap $a \in P$;

v) terdapat elemen invers *rough (rough invers element)* yaitu $-a \in P$ sedemikian sehingga $a + (-a) = 0$ untuk setiap $a \in P$;

vi) untuk setiap $a, b \in P$, berlaku $a * b \in \overline{Apr}(P)$ (berlaku sifat tertutup di R);

vii) untuk setiap $a, b, c \in \overline{P}$ maka $(a * b) * c = a * (b * c)$ (berlaku sifat asosiatif di $\overline{Apr}(P)$);

viii) untuk setiap $a, b, c \in P$ berlaku:

a) $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ (hukum distributif kiri),

b) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$ (hukum distributif kanan) (Isaac dan Neelima, 2013).

Proposisi 2.5.1

Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan himpunan bagian $S \subseteq U$ sedemikian sehingga S merupakan ring *rough* terhadap operasi biner $(+,\cdot)$. Diberikan himpunan $T \subseteq S$, T merupakan subring *rough* dari S jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in T$, berlaku:

i) $T \neq \emptyset$,

ii) $x - y \in \overline{Apr}(T)$,

iii) $x \cdot y \in \overline{Apr}(T)$ (Garnis, 2022).

Definisi 2.5.9

Diberikan $(\overline{Apr}(R), +,\cdot)$ merupakan ring *rough* dengan *unity*, $\left(\overline{Apr}(M), +\right)$ merupakan grup komutatif *rough*. $\overline{Apr}(M)$ dikatakan modul kiri *rough* atas ring $\overline{Apr}(R)$ jika terdapat pemetaan $\overline{Apr}(R) \times \overline{Apr}(M) \to \overline{Apr}(M), (a, x) \to ax$ sedemikian sehingga:

i) $a(x + y) = ax + ay, a \in \overline{Apr}(R); x, y \in \overline{Apr}(M)$;

ii) $(a + b)x = ax + bx; a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M)$;

iii) $(ab)x = a(bx); a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M)$;

iv) $1x = x, 1$ merupakan elemen unit dari $\overline{Apr}(R)$ dan $x \in \overline{Apr}(M)$ (Qun-Feng dkk., 2006).

Definisi 2.5.10

Diberikan $\left(\overline{Apr}(R), +,\cdot\right)$ merupakan ring *rough* dengan *unity*, $\left(\overline{Apr}(M), +\right)$ merupakan grup komutatif *rough*. $\overline{Apr}(M)$ dikatakan modul kanan *rough* atas ring $\overline{Apr}(R)$ jika terdapat pemetaan $\overline{Apr}(R) \times \overline{Apr}(M) \to \overline{Apr}(M), (a, x) \to ax$ sedemikian sehingga:

i) $a(x + y) = ax + ay, a \in \overline{Apr}(R); x, y \in \overline{Apr}(M)$;

ii) $(a + b)x = ax + bx; a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M)$;

iii) $(ab)x = b(ax); a, b \in \overline{Apr}(R); x \in \overline{Apr}(M)$;

iv) $1x = x, 1$ merupakan elemen unit dari $\overline{Apr}(R)$ dan $x \in \overline{Apr}(M)$ (Qun-Feng dkk., 2006).

Definisi 2.5.11

Suatu himpunan bagian *rough* $\overline{Apr}(N) \neq \emptyset$ dari suatu modul *rough* $\overline{Apr}(M)$ dikatakan submodul *rough* dari $\overline{Apr}(M)$, jika $\overline{Apr}(N)$ memenuhi:

i) $\overline{Apr}(N)$ merupakan subgrup *rough* dari $\overline{Apr}(M)$;

ii) $ay \in \overline{Apr}(N)$, untuk setiap $a \in \overline{Apr}(R)$ dan $y \in \overline{Apr}(N)$ (Jacobson, 1951).

Definisi 2.5.12

Diberikan $\overline{Apr}(M)$ dan $\overline{Apr}(M')$ merupakan dua modul *rough* atas ring *rough* R. Jika terdapat pemetaan η dari M ke M' sedemikian sehingga:

i) η merupakan homomorfisma dari grup *rough* $\overline{Apr}(M)$ ke $\overline{Apr}(M')$;

ii) $\eta(ax) = a\eta(x), a \in \overline{Apr}(R), x \in \overline{Apr}(M)$,

maka η dikatakan homorfisma dari modul *rough* $\overline{Apr}(M)$ ke $\overline{Apr}(M')$. Jika η merupakan pemetaan 1-1, η dikatakan isomorfisma dari modul *rough* $\overline{Apr}(M)$ ke $\overline{Apr}(M')$ (Qun-Feng dkk., 2006).

Definisi 2.5.13

Barisan homomorfisma modul *rough* atas ring *rough* $\overline{Apr}(R)$,

$$\overline{Apr}(M') \xrightarrow{\alpha} \overline{Apr}(M) \xrightarrow{\beta} \overline{Apr}(M'')$$

dikatakan barisan eksak jika $\mathrm{Im}(\alpha) = \ker(\beta)$ jika dan hanya jika memenuhi aksioma:

i) $\beta \circ \alpha = 0$,

ii) Relasi $\beta(x) = 0$,dengan $x \in \overline{Apr}(M)$ dan $x \in \underline{Apr}(M)$. Berakibat $x = \alpha(x')$ untuk beberapa $x' \in \overline{Apr}(M')$ (Sinha dan Prakash, 2014).

Definisi 2.5.14

Diberikan $\overline{Apr}(R)$ merupakan ring *rough* dan diberikan $\overline{Apr}(M)$ merupakan modul *rough* atas ring *rough* $\overline{Apr}(R)$. Himpunan bagian $S \subseteq \overline{Apr}(M)$ dikatakan bebas linear terhadap $\overline{Apr}(R)$ jika terdapat $x_1, x_2, \dots, x_n$ di S dan elemen $a_1, \dots, a_n$ dari $\overline{Apr}(R)$ tidak bernilai 0, sedemikian sehingga

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

merupakan himpunan tidak bebas linear terhadap ring *rough* $\overline{Apr}(R)$ (Sinha dan Prakash, 2014).

Definisi 2.5.15

Diberikan $\overline{Apr}(M)$ merupakan modul *rough* atas ring *rough* $\overline{Apr}(R)$. Himpunan bagian S dari $\overline{Apr}(M)$ merupakan basis dari $\overline{Apr}(M) \neq \{0\}$ jika dan hanya jika setiap $x \in \overline{Apr}(M)$ sehingga

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

untuk $a_1, a_2, \dots, a_n \in \overline{Apr}(R)$ dan $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ (Sinha dan Prakash, 2014).

Definisi 2.5.16

Modul *rough* $\overline{Apr}(M)$ atas ring *rough* $\overline{Apr}(R)$ merupakan modul bebas *rough* jika memiliki basis (Sinha dan Prakash, 2014).

Definisi 2.5.17

Modul $\overline{Apr}(P)$ terhadap ring *rough* $\overline{Apr}(R)$ dikatakan proyektif jika dan hanya jika terdapat homomorfisma surjektif

$$u'': \overline{Apr}(P) \to \overline{Apr}(M'') \text{ dan } \beta: \overline{Apr}(M) \to \overline{Apr}(M'')$$

sehingga terdapat homomorfisma surjektif $u: \overline{Apr}(P) \to \overline{Apr}(M)$. Oleh karena itu $\overline{Apr}(P)$ dikatakan proyektif jika dan hanya jika diberikan homomorfisma u" dari $\overline{Apr}(P)$ yang dipetakan ke lapangan hasil bagi $\overline{Apr}(M$") dari sebarang modul $\overline{Apr}(M)$ terhadap ring *rough* $\overline{Apr}(R)$ dapat menghasilkan homomorfisma u dari $\overline{Apr}(P)$ ke $\overline{Apr}(M)$ (Sinha dan Prakash, 2014).

Proposisi 2.5.2

Diberikan dua homomorfisma atas modul proyektif *rough*

$\alpha: \overline{Apr}(M) \to \overline{Apr}(N)$, $\alpha': \overline{Apr}(M') \to \overline{Apr}(N)$ dengan bentuk diagram

$$\begin{array}{ccc} & & \overline{Apr}(M') \\ & & \downarrow \alpha' \\ \overline{Apr}(M) & \xrightarrow{\alpha} & \overline{Apr}(N) \end{array}$$

dan pemetaan $\beta: \overline{Apr}(L) \to \overline{Apr}(M), \beta': \overline{Apr}(L) \to \overline{Apr}(M')$ sedemikian sehingga diagram berikut

$$\begin{array}{ccc} \overline{Apr}(L) & \overset{\beta'}{\to} & \overline{Apr}(M') \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha' \\ \overline{Apr}(M) & \overset{\alpha}{\to} & \overline{Apr}(N) \end{array}$$

komutatif (Sinha dan Prakash, 2014).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2022/2023 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof.Dr.Ir.Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini digunakan studi literatur yaitu sebagai berikut:

1. studi literatur yang diperoleh dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berkaitan dengan penelitian ini.
2. mengkaji definisi dan teorema yang berhubungan dengan permasalahan pada penelitian.

Langkah-langkah dalam mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

Mempelajari aljabar abstrak yaitu: himpunan, modul, homomorfisma modul, jumlahan langsung, barisan eksak, modul proyektif, relasi ekuivalensi, aproksimasi atas dan bawah, dan modul proyektif *rough*

↓

Tahap 1

Menyelidiki sifat-sifat modul proyektif *rough*

↓

Tahap 2

Mengkonstruksi modul proyektif *rough* pada suatu himpunan berhingga

↓

Tahap 3

Menyelidiki sifat-sifat modul proyektif *rough*, diantaranya submodul pada modul proyektif *rough* dan jumlah langsung dari modul proyektif *rough*

↓

Tahap 4

Membuat program untuk menunjukkan bahwa suatu himpunan berhingga pada ruang aproksimasi merupakan modul *rough*

Gambar 3.2.1. Gambar langkah-langkah penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan sifat-sifat modul proyektif *rough* pada bab IV diperoleh bahwa modul *rough* $\overline{Apr}(P)$ atas ring *rough* dikatakan modul proyektif *rough* jika dan hanya jika barisan eksak *rough*

$$0 \to \overline{Apr}(M') \to \overline{Apr}(M) \xrightarrow{p} \overline{Apr}(P) \to 0$$

merupakan barisan eksak terpisah. Sedangkan ring *rough* $\overline{Apr}(R)$ merupakan modul proyektif *rough* atas ring rough $\overline{Apr}(R)$. Berdasarkan pembahasan modul proyektif *rough* yang telah dikonstruksi sebelumnya, diperoleh kesimpulan bahwa setiap modul proyektif *rough* belum tentu merupakan modul proyektif, tetapi setiap modul proyektif sudah pasti merupakan modul proyektif *rough*.

Berdasarkan pembahasan jumlahan langsung eksternal diperoleh bahwa, jika $M_1, M_2, \dots, M_n$ merupakan modul proyektif *rough* pada ruang aproksimasi (U, θ). maka $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ merupakan modul proyektif *rough* di ruang aproksimasi (U^n, θ^n) dengan $(a_1, a_2, \dots, a_n)\theta^n(b_1, b_2, \dots, b_n)$ jika dan hanya jika $(a_1\theta b_1, a_2\theta b_2, \dots, a_n\theta b_n)$ untuk setiap $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$.

5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan penelitian, dalam mengkonstruksi modul proyektif *rough* masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya, tidak menutup kemungkinan masih terdapat sifat-sifat lain dari modul proyektif *rough*. Selain itu, dalam

mengkonstruksi modul proyektif *rough* ke dalam contoh-contoh dapat menggunakan himpunan yang bersifat non-komutatif, himpunan universal lain, dan relasi selain yang ada pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Abdurahim, A., Romdhini, M.U., dan Wardhana, I.G.A.W. 2011. Analisis Penyelesaian Rubik 2×2 Menggunakan Grup Permutasi. *Beta: Jurnal Tadris Matematika* 4.2. 151-161.

Adkinds, W.A dan Weintraub, S.H. 1992. *Algebra: An Approach via Module Theory*. New York: Springer-Verlag.

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Ayres, F dan Jaisingh, L.R. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra* 2nd *edition*. New York: McGraw-Hill Publishing Company.

Barnier, W. Feldman, N. 1990. Introduction to advanced mathematics, *Prenticehall International*. New Jersey: 116-153.

Biswas, R dan Nanda, S. 1994. Rough groups and rough subring. *Bull. Polish Acad. Sci. Math*., 42, 251-254.

De-song, W. 2004. Application of the theory of rough set on the groups and rings. *Master's thesis.*

Davvaz, B dan Mahdavipour L. 2006. Roughness in Modules. *Information Sciences*., 176 (24), 3658-3674.

Dummit, D.S., dan Foote, R.M. 1999. *Abstract Algebra* 3rd *edition*. New York: John Wiley and Sons, Inc.

Garnis, A.T. 2022. Penerapan Konsep Himpunan Rough pada Struktur Ideal Suatu Ring. *Skripsi*. Bandar Lampung: Universitas Lampung.

Hartley, B dan Hawkes, T.O. 1970. *Rings, Modules, and Linear Algebra*. Inggris: Cambridge University.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra*. New York: John Wiley & Sons.

Herstein, I. N. 1986. *Abstract Algebra*. New York: Macmillan.

Issac, P dan Neelima, C.A. 2013. Rough ideals and their properties. *Journal of Global Research in Mathematical Archives*. 1 (6), 90-97.

Jacobson, N. 1951. *Lecture in abstract algebra I: Basic Concepts*. New York: Springer-Verag.

Jesmalar, L. 2017. Homomorphism and Isomorphism of Rough Group. *Int. J. Adv. Res. Ideas Innov. Technol., vol. 3, no. 3, pp*. 1382-1387.

Malik, D.S., Mordeson, J.M., dan Sen, M.K. 1998. *Fundamental of Abstract* 4th *edition*. Addison-Wesey Publishing Company.

Marsudi. 2010. *Logika & Teori Himpunan*. Malang: UB Press.

Mas'oed, F. 2013. *Struktur Aljabar*. Jakarta: Akademia.

Miao, D. Han, S. Li, D dan Sun, L. 2005. Rough group, rough subgroup and their properties. *Lecture Notes in Artificial Intelligence*. 105-113.

Munir, Rinaldi. 2005. *Matematika Diskrit*. Bandung: Penerbit Informatika.

Pawlak, Z. 1982. Rough Set. *International Journal of Computing and Information Sciences*. 11(5), 341-356.

Roman, S. 2005. *Advanced Linear Algebra* 2nd *edition*. New York: Springer.

Qun-Feng, Z., Al-Min, F., Shi-xin, Z. 2006. Rough modules and their some properties. *Proceeding of the Fifth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. 2290-2293.

Setiawan. 2008. *Pembelajaran Fungsi, Persamaan, dan Pertidaksamaan Aljabar*. Yogyakarta: Pusat Pengembangan dan Pemberdayaan Pendidik dan Tenaga Kependidikan Matematika.

Sinha, A.K., Prakash, A. 2014. Rough Projective Module. *Proc. Of the Second Intl. Conf. on Advances in Applied Science and Enviromental Engineering (ASEE). Institute of Research Engineers and Doctors*, 35-38.

Suwilo, S., Tulus, dan Lubis, S.R. 1987. *Aljabar Abstrak Suatu Pengantar*. Medan: USU Press.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit (Edisi Kedua).* Yogyakarta: Graha Ilmu.

Varberg, D., Purcell, E., dan Rigdon, S. 2016. *Calculus* 9th *edition.* New York: Pearson.