Pendugaan Parameter Regresi Logistik Biner Menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) (Studi Kasus Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur)

(Skripsi)

oleh :

INKA KRYSTI MEINA BR PERANGIN ANGIN

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRAK

PENDUGAAN PARAMETER REGRESI LOGISTIK BINER MENGGUNAKAN *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (MLE) (STUDI KASUS KABUPATEN/KOTA PROVINSI JAWA TIMUR)

Oleh

INKA KRYSTI MEINA BR PERANGINANGIN

Analisis Regresi logistik biner adalah suatu teknik analisis statistika yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara satu atau lebih variabel bebas dengan variabel respon yang bersifat biner. Pada penelitian ini, pendugaan parameter regresi logistik biner dilakukan dengan metode *maximum likelihood estimation.* Selanjutnya, model regresi logistik biner diaplikasikan pada data persentase tingkat kemiskinan Kabupaten/Kota di Jawa Timur. Persentase tingkat kemiskinan dikategorikan menjadi dua kategori yaitu persentase tingkat kemiskinan tinggi dan persentase tingkat kemiskinan rendah. Berdasarkan hasil penelitian diperoleh faktor yang memengaruhi persentase tingkat kemiskinan Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur adalah jumlah penduduk miskin (X_1), dan Tingkat Pengangguran Terbuka (X_5).

Kata Kunci : Analisis Regresi Logistik Biner, respon biner, *Maximum likelihood estimation* (MLE), Persentase tingkat kemiskinan.

ABSTRACT

PARAMETER ESTIMATION OF THE BINARY LOGISTIC REGRESSION USING MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION (MLE) (CASE STUDY OF DISTRICT/CITY OF EAST JAVA PROVINCE)

By

INKA KRYSTI MEINA BR PERANGINANGIN

Binary logistic regression analysis is a statistical analysis technique used to analyze the relationship between one or more independent variables and the response variable which is binary. In this study, the estimation of binary logistic regression parameters was carried out using the maximum likelihood estimation method. Furthermore, the binary logistic regression model was applied to the Districts/Town poverty rate percentage data in East Java. The percentage of the poverty rate is categorized into two categories, namely the percentage of the high poverty level and the percentage of the low poverty level. Based on the research results obtained factors that affected the percentage of the poverty rate in districts/town in East Java is the number of poor people (X_1), and the Open Unemployment Rate (X_5).

Keywords : Binary Logistics Regression, Maximum Likelihood Estimation (MLE), Percentage of poverty rate.

Pendugaan Parameter Regresi Logistik Biner Menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)
(Studi Kasus Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur)

Oleh

INKA KRYSTI MEINA BR PERANGINANGIN

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **PENDUGAAN PARAMETER REGRESI LOGISTIK BINER MENGGUNAKAN *MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION* (MLE) (Studi Kasus Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur)**

Nama Mahasiswa : *Inka Krysti Meina Br Peranginangin*

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031029**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Widiarti, S.Si., M.Si.	**Dr. Notiragayu, S.Si.,M. Si.**
NIP. 198005022005012003	NIP.197311092000122001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Widiarti, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si.,M. Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dian Kurniasari, S.Si., M,Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T
NIP: 197407052000031001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 November 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: Inka Krysti Meina Br Peranginangin
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031029
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: Pendugaan Parameter Regresi Logistik Biner Menggunakan Maximum Likelihood Estimation (MLE) (Studi Kasus Data Tingkat Kemiskinan Kabupaten/Kota Jawa Timur)

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila dikemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung
Yang menyatakan,

Inka Krysti Meina Br Peranginangin
NPM. 1817031029

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Inka Krysti Meina Br Peranginangin, dilahirkan pada tanggal 03 Mei 2000 di Kabanjahe. Merupakan anak kedua dari dua bersaudara, dari Bapak Sepakat Peranginangin dan Mamak Penehen Br Berahmana.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar di SDN Limang pada tahun 2006-2012. Kemudian melanjutkan ke sekolah menengah pertama SMP Santa Maria Kabanjahe pada tahun 2012-2015. Melanjutkan ke sekolah menengah atas SMAN 2 Kabanjahe pada tahun 2015-2018.

Penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Lampung jalur SNMPTN pada tahun 2018, diterima sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Pada saat kuliah penulis aktif berpelayanan dalam organisasi berbasis pelayanan yaitu Persekutuan Oikumene Mahasiswa MIPA (POM MIPA) sebagai koordinator sie Kelompok Kecil. Pada tahun-tahun perkuliahan menjalani tanggung jawab sebagai Tim Pendamping Pelayanan Mahasiswa (TPPM) di POM MIPA.

Pada awal tahun 2021 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Kelurahan Rajabasa Jaya RT 04 Kecamatan Rajabasa Bandar Lampung. Pada pertengahan tahun 2021 penulis melaksanakan Kerja Praktek (KP) di Dinas Ketahanan Pangan Provinsi Lampung selama 40 hari.

KATA INSPIRASI

Ora et labora
Bekerja Sambil Berdoa

"*Banyaklah rencanga di hati manusia, tetapi keputusan Tuhanlah yang terlaksana*"

(Amsal 19:21)

"God will make a way, where there seems to be no way"

(Don Meon)

"Janganlah malu dengan kegagalan, belajarlah darinya dan mulai lagi"

(Inka)

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa untuk semua berkat nikmat dan kasih-Nya yang selalu diberikan kepada kita.

Kupersembahkan karya sederhana ini kepada:

Keluarga Terkasih

Terimakasih kepada Bapak, Mamak, Abang atas semua dukungan yang diberikan, baik secara materil, moril, maupun doa yang tak hentinya diberikan. Kiranya Tuhan Yesus yang memberkati keluarga ini selalu.

Dosen Pembimbing dan Penguji

Yang telah senantiasa mengarahkan dan memberikan motivasi kepada penulis

Teman-teman Tersayang

Terimakasih buat semua canda, tawa, suka, duka yang pernah kita lewati bersama. Sukses untuk kita semua, Tuhan Yesus memberkati.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan kasih-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Pendugaan Parameter Regresi Logistik Biner Menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) (Studi Kasus Kabupaten/Kota Provinsi Jawa Timur)". Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Universitas Lampung. Dalam menyelesaikan skripsi ini penulis menyadari adanya bimbingan, dukungan serta doa dari berbagai pihak. Maka dari itu, pada kesempatan kali ini penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada :

1. Ibu Widiarti, S. Si., M. Si. selaku pembimbing I yang selalu bersedia memberikan bimbingan, masukan, serta arahan selama penulisan skripsi ini.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si, M.Si. selaku pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, masukan, serta arahan selama penulisan skripsi ini.
3. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembahas yang telah memberi evaluasi, masukan, serta arahan selama penulisan skripsi ini.
4. Ibu Widiarti, S.Si., M.Si. selaku pembimbing akademik yang memberikan bimbingan dan arahan selama perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak, Mamak, Abang yang selalu memberi dukungan semangat, motivasi dan perhatian serta selalu mendoakan yang terbaik bagi penulis.

9. Teman Seperantauan Apri, Mei, Selva, Kesia, Nela, Yuni, Alpi, Nadia yang selalu mendengarkan keluh kesah, memberi semangat, menemani, dan memberi keceriaan di masa perkuliahan.
10. Teman seperjuangan Ni Wayan Mega Pratiwi terimakasih sudah menjadi teman terbaik penulis yang selalu mendukung dan membantu penulis pada masa kuliah.
11. Teman kuliah Wayan, Rika, Lela, Oktin, Rendi, Zainal yang selalu menemani dan membantu dalam masa-masa perkuliahan.
12. Teman seperbimbingan, Anis, Hilda, Yuni, Dora, Ria dan Wayan yang telah membantu dan saling memberi semangat dalam proses penulisan skripsi.
13. Keluarga Besar POM MIPA untuk setiap kebersamaan serta persekutuan yang dibentuk.
14. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2018.
15. Kepada seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Penulis berharap semoga skripsi ini bermanfaat. Penulis juga menyadari dalam penyusunan skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan. Oleh karena itu kritik dan saran yang membangun diharapkan untuk penyempurnaan skripsi ini.

Bandar Lampung, 23 November 2022
Penulis,

Inka Krysti Meina Br Peranginanginn

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

I.1 Latar Belakang

Regresi adalah salah satu metode statistika yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara variabel tak bebas dan variabel bebas (Suyono, 2018). Analisis regresi umumnya digunakan untuk menganalisis data variabel respon yang berupa data kontinu. Berdasarkan bentuk data, model regresi dikelompokkan menjadi dua macam yaitu regresi linear dan regresi non linear. Regresi disebut linear jika suatu persamaan mempunyai hubungan antara variabel bebas dan variabel tak bebas yang linear.

Berdasarkan jumlah dari variabel bebas, regresi linear dibagi menjadi dua yaitu regresi linear sederhana dan regresi linear berganda. Analisis regresi sederhana adalah hubungan dari dua variabel yaitu variabel bebas dan tak bebas. Sedangkan analisis regresi berganda ialah hubungan dari tiga variabel atau lebih diantaranya lebih dari dua variabel bebas dan satu variabel tak bebas. Adakalanya pada regresi variabel tak bebas berupa variabel dikotomus. Variabel dikotomus adalah variabel indikator yang terdiri atas data biner, bernilai 1 atau 0. Data tersebut dibangkitkan dari pemetaan numerik dari satu tindakan atau percobaan yang menghasilkan hanya dua kemungkinan kejadian.

Data yang mengandung respon biner tidak dapat dianalisis dengan regresi linear berganda biasa. Hal ini dikarenakan pendugaan parameter pada model regresi linear menggunakan metode kuadrat terkecil yang mengasumsikan data menyebar normal dengan ragam homogen. Pada data biner, asumsi-asumsi ini tidak dipenuhi. Jika asumsi-asumsi tersebut diabaikan, maka model yang diperoleh tidak sesuai dengan keadaan sebenarnya. Oleh sebab itu model yang tepat pada hubungan respon biner dengan penjelasannya ialah menggunakan analisis regresi logistik.

Regresi logistik merupakan suatu metode yang menjelaskan hubungan antara beberapa variabel prediktor dengan variabel respon yang bersifat dikotomi atau polikotomis (Agresti, 2007). Analisis regresi logistik membagi respon menjadi beberapa jenis data yaitu respon biner, multinomial, atau ordinal. Regresi logistik biner adalah suatu teknik analisis statistika yang digunakan untuk menganalisis hubungan antara satu atau lebih variabel bebas dengan variabel respon yang bersifat biner. Variabel bebas pada regresi logistik dapat berupa variabel berskala kategorik maupun variabel yang berskala kontinu sedangkan variabel respon berupa variabel berskala kategorik. Regresi logistik biner merupakan pendekatan model matematis yang digunakan untuk menganalisis hubungan beberapa faktor dengan sebuah variabel yang bersifat dikotomi (biner). Artinya, dalam regresi logistik biner data pada variabel respon bersifat biner yang bernilai 0 dan 1. Bilangan biner tersebut menggambarkan dua kategori data yang saling bertolak belakang, seperti ‘ya atau tidak’, ‘sukses atau gagal’, dan lain sebagainya.

Model regresi logistik biner dengan satu variabel dapat dikembangkan menjadi model regresi logistik biner dengan menggunakan dua variabel respon. Model ini disebut model regresi biner *bivariate* dan berkembang menjadi *multivariate*. Terdapat dua jenis variabel respon pada model regresi logistik biner, yaitu berjenis diskrit dan kategorik biner.

Regresi logistik dan regresi linear mempunyai tujuan yang sama yaitu melihat hubungan variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas. Kedua model tersebut mengestimasi parameter yang diharapkan. Analisis regresi menggunakan variabel tak bebas kontinu, sedangkan pada analisis regresi logistik menggunakan variabel tak bebas kategorik.

Metode yang yang telah dikembangkan untuk mengestimasi parameter pada regresi logistik diantaranya metode *moment* dan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Metode *moment* merupakan metode tertua yang sudah lama digunakan. Metode tersebut memiliki prosedur yang paling mudah dalam memperoleh dugaan atau penduga dan dasar metode momen yaitu mendapatkan penduga parameter populasi dengan menyamakan momen-momen populasi dengan momen-momen sampel. *Maximum Likelihood* merupakan dasar pendekatan dalam pendugaan parameter pada model logistik. Metode *Maximum Likelihood* memberikan nilai dugaan parameter dengan memaksimumkan fungsi *likelihood.* Dalam metode *Maximum likelihood* tidak memiliki batasan dalam pengumpulan data. Sehingga metode pendugaan yang tepat digunakan pada penelitian ini adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).

Berdasarkan penelitian sebelumnya yang dilakukan oleh Islamiyati pada tahun 2015, variabel respon yang digunakan mengandung dua kategorik, dan pendekatan statistik yang digunakan adalah analisis komponen utama non linear. Estimasi parameter dilakukan melalui metode *Maximum Likelihood* dengan menduga nilai α. Nilai turunan pertama pada penelitian ini memberikan penyelesaian yang implisit, sehingga digunakan iterasi Newton Raphson dalam menduga parameternya. Selain itu analisis regresi logistik dengan data biner juga pernah dilakukan oleh Ramandhani, dkk pada tahun 2017. Pada penelitian ini dilakukan pemodelan regresi logistik dan pendugaan parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* serta penerapanya pada pada tingkat pengangguran terbuka Provinsi Sulawesi Barat.

Berdasarkan latar belakang tersebut maka peneliti menggunakan analisis Regresi Logistik Biner dan penduga parameter menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Data yang digunakan pada penelitian ini yaitu data persentase tingkat kemiskinan Kabupaten/kota di Jawa Timur dengan menggunakan beberapa variabel diantaranya jumlah penduduk miskin, IPM, rata-rata lama sekolah, angka harapan hidup, tingkat pengangguran terbuka dan PDRB di Provinsi Jawa Timur.

I.2 Tujuan

1. Menentukan penduga parameter regresi logistik biner menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE).
2. Mengetahui faktor-faktor yang memengaruhi persentase kemiskinan Kabupaten/Kota di Jawa Timur.

I.3 Manfaat

1. Memperoleh dugaan parameter analisis regresi logistik biner.
2. Memberikan informasi tentang faktor-faktor yang memengaruhi persentase kemiskinan Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Timur .

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Analisis Regresi

Analisis Regresi adalah teknik analisis yang menjelaskan bentuk hubungan antara dua atau lebih khususnya hubungan antara variabel-variabel yang mengandung sebab akibat (Sembiring, 1995). Analisis regresi merupakan suatu metode yang digunakan untuk menganalisis hubungan bermodal antar variabel. Hubungan bermodel tersebut dapat diekspresikan dalam bentuk persamaan yang menghubungkan antara variabel tak bebas (Y) dengan variabel bebas (X).

Analisis regresi linear digunakan untuk menaksir atau meramalkan nilai variabel tak bebas bila nilai variabel bebas dinaikan atau diturunkan. Analisis ini didasarkan pada hubungan satu variabel tak bebas dengan satu atau lebih variabel bebas. Jika hanya menggunakan satu variabel bebas maka disebut analisis regresi linear sederhana dan jika menggunakan lebih dari satu variabel bebas maka disebut regresi linear berganda (*multiple regression*). Regresi mempunyai banyak kegunaan, yang pertama kita dapat menentukan ada atau tidaknya hubungan Y dan X, selanjutnya dapat mempelajari bentuk hubungan tersebut. Kedua dapat memperkirakan nilai Y berdasarkan nilai X itulah tujuan digunakan analisis regresi (Suyono, 2018).

Menurut Supangat (2007), observasi dari variabel-variabel yang pengamatanya ke-i, ialah nilai observasi bebas untuk pengamatan ke-i dan merupakan *error* pengamatan ke-i. Dimisalkan n variabel bebas dapat ditulis sebagai berikut.

$$\boldsymbol{Y}_0 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \cdots + \beta_n X_{1n} + \varepsilon_0$$
$$\boldsymbol{Y}_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \cdots + \beta_n X_{2n} + \varepsilon_1$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ldots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$\boldsymbol{Y}_n = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \cdots + \beta_n X_{in} + \varepsilon_n \tag{2.1}$$

Atau dapat ditampilkan dalam bentuk matriks sebagai berikut,

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.2}$$

dimana ,

$\boldsymbol{Y} =$ variabel tak bebas berukuran $(n+1) \times 1$

$\boldsymbol{X} =$ variabel bebas berukuran $n \times (n+1)$

$\boldsymbol{\beta} =$ parameter regresi berukuran $(n+1) \times 1$

$\boldsymbol{\varepsilon} =$ galat pengamatan berukuran $(n+1) \times 1$

Atau dapat ditulis dengan cara lain sebagai berikut,

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{2.3}$$

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ 1 & x_{21} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

2.2 Analisis Regresi Logistik

Regresi logistik merupakan metode yang menghubungkan antara variabel tak bebas (respon) yang bersifat kategorik dengan variabel bebas (prediktor). Dari banyaknya kategori pada variabel respon, regresi logistik dibagi menjadi regresi logistik biner jika terdiri dari dua kategori, regresi logistik multinomial jika terdiri lebih dari dua kategori.

Regresi logistik tidak mengasumsikan hubungan antara variabel bebas dan variabel tak bebas bersifat linear. Model logistik bisa dinyatakan dalam bentuk model probabilitas di mana model ini variabel responnya ialah logit dari probabilitas suatu situasi atau atribut akan berlaku dengan syarat atau kondisi adanya variabel-variabel bebas tertentu (Hosmer *et.al.*, 2013). Variabel respon pada regresi logistik bersifat biner dengan probabilitas $\pi(x)$ jika bernilai 1 sedangkan probabilitas $1 - \pi(x)$ jika bernilai 0.

Menurut Johnson dan Wichern (2007) dan Agresti (2007), apabila diambil n buah variabel acak $Y_1, \dots, Y_n$ yang saling bebas, maka $Y_i \sim$ Binomial (n, p). Dinotasikan dengan 0 dan 1 merupakan variabel acak Bernoulli dengan rata-rata sebagai berikut.

$$E(Y) = 1.P(Y = 1) + 0.P(Y = 0) = P(Y = 1) \qquad (2.5)$$

Apabila dikaitkan dengan k buah variabel bebas $X_1, X_2, \dots, X_n$ maka apabila persamaan (2.5) dinotasikan dengan $\pi(x)$. Nilai $\pi(x)$ mencerminkan keterkaitan pada nilai variabel bebas $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Untuk model biner, model regresinya adalah sebagai berikut.

$$E(Y) = \pi(x) = \beta_0 + \beta_1 \qquad (2.6)$$

Persamaan (2.6) ialah model probabilitas linear. Model yang menyatakan hubungan antara x dan $\pi(x)$ disebut fungsi regresi logistik dengan persamaan.

$$\pi(x) = \frac{\exp\,(\beta_0 + \beta_1 x)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x)} \qquad (2.7)$$

2.3 Regresi Logistik Biner

Regresi logistik biner adalah suatu metode analisis data yang digunakan untuk mencari hubungan antara variabel respon (Y) yang bersifat biner atau dikotomus (Hosmer *et.al.*, 2013). Hasil dari variabel respon y terdiri dari 2 kategori yaitu sukses dan gagal yang dinotasikan dengan Y =1 (sukses) dan Y=0 (gagal). Distribusi yang digunakan regresi logistik biner ialah distribusi Bernoulli, yaitu,

$$f(y) = \pi^y(1-\pi)^{1-y}, y = 0,1 \tag{2.8}$$

Dengan y merupakan probabilitas kejadian. Jika diketahui respon biner bernilai 0 dan 1 maka,

$p = (Y = 1)|X = x) = \pi(x).$

$$p = (X = x) = 1 - \pi(x)$$

Model regresi logistik diasumsikan bahwa variabel biner harus saling bebas. Model regresi logistik dari persamaan 2.7 dapat ditulis.

$$\pi(x) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n)}$$

Keterangan,

$\pi(x)$ = probabilitas sukses dengan nilai probabilitas $0 \leq \pi(x) \leq 1$.

Digunakan transformasi logit dari $\pi(x)$ untuk mempermudah pendugaan parameter regresi logistik biner yang dirumuskan sebagai berikut :

$$\pi(x)(1 + exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n\right) \\ = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n)$$

$$\pi(x) + (\pi(x)\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n) \\ = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n)$$

$$\pi(x) = \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n) - \pi(x)\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots \\ + \beta_n x_n)$$

$$\pi(x) = (1 - \pi(x))\exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n)$$

$$\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} = \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n\right)$$

$$\ln \frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} = \ln \exp\left(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n\right)$$

$$\ln \frac{\pi(x)}{1-\pi(x)} = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

Oleh karena itu, diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$g\big(\pi(x)\big) = \ln \left(\frac{\pi(x)}{1-\pi(x)}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n$$

Fungsi $g\big(\pi(x)\big)$disebut dengan fungsi logit model regresi logistik biner dengan n variabel bebas.

2.4 *Maximum Likelihood Estimation* (MLE)

Estimasi parameter dalam regresi logistik dilakukan dengan metode *Maximum Likelihood Estimation*. Metode tersebut mengestimasi parameter β dengan memaksimumkan fungsi *likelihood* dan mempunyai syarat bahwa data harus mengikuti distribusi tertentu.

Setiap pengamatan pada regresi logistik mengikuti fungsi Bernoulli sehingga dapat ditentukan fungsi *likelihood*-nya. Fungsi densitas dari variabel random $X_1, X_2, \dots, X_n$ yang bernilai $x_1, x_2, \dots, x_n$ ialah $L(\beta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n : \beta)$ yang merupakan fungsi *likelihood*. Untuk $x_1, x_2, \dots, x_n$, fungsi *likelihood* merupakan fungsi dari β dan dilambangkan dengan $L(\beta)$. Jika $X_1, X_2, \dots, X_n$ mewakili jumlah sampel random dari $f(x;\beta)$, maka $\mathrm{L}(\beta) = f(x_1;\beta).f(x_2;\beta) \dots f(x_n\,;\beta)$ dapat ditulis sebagai berikut (Hogg & Craigh, 1995).

$$\begin{aligned} L(\beta) &= f(\tilde{x};\beta) \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_n : \beta) \\ &= f(x_1;\beta).f(x_2;\beta) \dots f(x_n\,;\beta) \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i;\beta) \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\mathrm{L}(\beta) = f(x_1;\beta).f(x_2;\beta)\dots f(x_n\,;\beta)$ ialah fungsi densitas probabilitas dari $x_1, x_2, \dots, x_n$. Untuk hasil dari pengamatan $x_1, x_2, \dots, x_n$, nilai $\hat{\beta}$ berada dalam $\Omega(\hat{\beta}\epsilon\Omega)$, dimana $L(\beta)$ maksimum disebut sebagai *Maximum Likelihood Estimation* (MLE) dari β. Jadi $\hat{\beta}$ merupakan dugaan dari β.

Nilai $\hat{\beta}$ selain diperoleh dengan memaksimumkan *likelihood* juga dapat dengan memaksimumkan fungsi *ln likelihood*, karena memaksimumkan fungsi *ln likelihood*, juga memaksimumkan fungsi *likelihood.* Maka untuk memperoleh $\hat{\beta}$ dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Nilai $\hat{\beta}$ diperoleh dari turunan pertama jika,

$$\frac{\partial}{\partial\beta}L(\beta)|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \tag{2.10}$$

2. Nilai $\hat{\beta}$ dikatakan memaksimumkan (β) jika,

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\beta}L(\beta)|_{\beta=\hat{\beta}} < 0 \tag{2.11}$$

2.5 Deret Taylor

Deret Taylor dapat memberikan nilai harapan bagi suatu fungsi pada suatu titik, berdasarkan nilai fungsi dan turunanya pada titik yang lain. Misal suatu fungsi $f(x)$ dan turunannya ialah $f(x), f''(x), \dots, f^n(x)$ kontinu dalam selang $[a, b]$, dan $x_0 \in [a, b]$, maka untuk nilai x disekitar $x_0, f(x)$ dapat diperluas ke dalam deret Taylor sebagai berikut :

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \cdots$$

Aproksimasi orde nol pada deret Taylor merupakan suku pertama dari deret Taylor tersebut. Jika dalam deret Taylor terdapat penambahan suku, maka akan menjadi aproksimasi orde ke 2 dan seterusnya. Misalkan $r_n(x)$ merupakan suku tambahan dalam deret Taylor setelah suku ke n dalam deret dan $x_0 = a$, maka diperoleh deret Taylor.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + r_n(x)$$

dengan $r_n(x) = \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$

2.6 Pendeteksian Multikolinearitas

Multikolinearitas adalah terdapat suatu hubungan yang linear atau korelasi antara variabel bebas yang signifikan terhadap model regresi yang terbentuk (Gujarati. 2003). Cara untuk mendeteksi multikolinearitas yaitu dengan melihat nilai *Variance Inflation Factor* (VIF). Asumsi pada multikolinearitas tidak terpenuhi apabila nilai VIF lebih dari 10. Untuk mencari nilai VIF dapat digunakan rumus sebagai berikut :

$$VIF = \frac{1}{1 - R_j^2} \tag{2.12}$$

dengan,

R_j^2 merupakan nilai dari koefisien determinasi antara variabel bebas X_j.

2.7 Pengujian Parameter Model

Pengujian signifikan parameter model dilakukan untuk mengetahui variabel-variabel bebas berpengaruh apa tidak terhadap variabel tak bebas. Pengujian signifikan parameter terdiri dari uji simultan dan uji parsial.

2.7.1 Uji Simultan

Pengujian parameter signifikan atau secara serentak membandingkan model yang lebih baik. Tujuan dari uji simultan adalah memeriksa pengaruh koefisien β

terhadap variabel tak bebas secara bersamaan. Berikut ialah hipotesis perbandingan dari pengamatan dengan hasil yang diperoleh menggunakan uji rasio *likelihood* sebagai berikut (Jones & Steenbergen, 2002)

- Hipotesis

$$H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_p = 0$$

  H_1: minimal terdapat satu $\beta_j \neq 0, j = 1,2, \dots, p$

- Statistik uji

$$G = -2\ln \left(\frac{likelihood\ tanpa\ variabel\ prediktor}{likelihood\ dengan\ variabel\ \ prediktor} \right)$$

$$G = -2\ln \left(\frac{\left(\frac{n_1}{n}\right)^{n_1} \left(\frac{n_0}{n}\right)^{n_0}}{\prod_{i=1}^{n} \hat{\pi}^{y_i} (1-\widehat{\pi_1})^{(1-y_i)}} \right) \qquad (2.13)$$

  dimana,

  n_0 = banyaknya observasi yang bernilai $y = 0$

  n_1 = banyaknya observasi yang bernilai $y = 1$

  n = total observasi

- Daerah keputusan

  Tolak H_0 jika nilai $G > \chi^2_{(\alpha,p)}$

  Terima H_0 jika nilai $G < \chi^2_{(\alpha,p)}$

  Statistik uji G mengikuti *distribusi Chi-square* dengan taraf signifikan sebesar α dan p ialah derajat bebas yang merupakan banyaknya prediktor pada model

- Kesimpulan

  Tolak H_0, berarti model yang mengandung variabel prediktor signifikan secara serentak terhadap model.

2.7.2 Uji Parsial

Setelah dilakukan uji serentak atau uji simultan selanjutnya dilakukan uji signifikan variabel bebas secara parsial terhadap variabel tak bebas. Pengujian ini bertujuan untuk melihat apakah ada pengaruh dari masing-masing β terhadap variabel tak bebas dengan menggunakan uji *Wald* (Jones & Steenbergen, 2002).

- Hipotesis

$$H_0: \beta_0 = 0, dengan\ j = 1,2, \dots, k$$

$H_1: \beta_j = 0,\ dengan\ j = 1,2, \dots, k$

- Statistik uji

$$W_j = \left(\frac{\hat{\beta}_j}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_j)}\right)^2 \text{ atau } W_j = \frac{\hat{\beta}_j^2}{\widehat{SE}(\hat{\beta}_j)^2} \quad (2.14)$$

- Daerah keputusan

Tolak H_0 jika nilai $W > \chi^2_{(\alpha,p)}$

Terima H_0 jika nilai $W < \chi^2_{(\alpha,p)}$

Aturan uji *Wald* mengikuti distribusi *Chi-square* dengan derajat bebas p.

- Kesimpulan

Tolak H_0, berarti variabel bebas berpengaruh signifikan terhadap variabel terikat.

2.8 Uji Kesesuaian Model

Uji kesesuaian model bertujuan untuk menilai seberapa baik model regresi terhadap data yang diamati. Dalam menilai kesesuaian model dengan membandingkan frekuensi yang diamati. Statistik uji yang digunakan adalah uji Hosmer-Lemeshow, dengan hipotesis sebagai berikut (Hosmer *et.al.*, 2013).

- Hipotesis

H_0: Model yang digunakan sesuai dengan data

H_1: Model yang digunakan tidak sesuai dengan data

- Statistik uji

$$\hat{C} = \sum_{j=1}^{g} \frac{(o_j - n_j^{'}\bar{\pi}_j)^2}{n_j^{'}\bar{\pi}_j(1-\bar{\pi}_j)} \tag{2.15}$$

Dimana $\bar{\pi}_j$ dan o_j dengan rumus sebagai berikut,

$$\bar{\pi}_j = \sum_{k=1}^{C_j} \frac{m_k \hat{\pi}(x_k)}{n_k^{'}}$$

dimana $m_k$ialah banyaknya subjek pada C_j kombinasi variabel prediktor.

$$o_j = \sum_{j=1}^{g} y_j$$

Keterangan,

g = jumlah grup

$n_j^{'}$ = Jumlah subjek pada grup ke-j

o_j = Jumlah nilai variabel respon pada grup ke-j

$\bar{\pi}_j$ = Rata-rata estimasi probabilitas

- Daerah keputusan

  Tolak H_0 jika nilai $\hat{C} > \chi^2(p-2)$

  Terima H_0 jika nilai $\hat{C} < \chi^2(p-2)$
- Kesimpulan

  Tolak H_0, berarti model yang sudah dibentuk sudah sesuai dengan data yang digunakan.

2.9 Interpretasi Koefisien Parameter

Interpretasi koefisien parameter bertujuan untuk menentukan apakah variabel bebas dan variabel terikat memiliki hubungan serta mendefinisikan setiap perubahan variabel terikat yang disebabkan oleh variabel bebas. Terdapat dua nilai dari model regresi logistik yaitu dua nilai $\pi(x)$ dan dua nilai $1-\pi(x)$. Interpretasi koefisien parameter sebagai berikut.

Tabel 1. Nilai Dari Model Regresi Logistik.

Variabel Respon (Y)	Variabel Prediktor	
	$Y=1$	$Y=0$
$Y=1$	$\pi(1)=\dfrac{\exp(\beta_0+\beta_1)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}$	$\pi(0)=\dfrac{\exp(\beta_0+\beta_1)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}$
$Y=0$	$1-\pi(1)=\dfrac{1}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}$	$1-\pi(0)=\dfrac{1}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}$

Rasio kecenderungan atau *odds ratio* adalah angka kecenderungan dapat diartikan sebagai rasio antara jumlah individu yang mengalami peristiwa tertentu dengan jumlah individu yang tidak mengalami peristiwa tertentu, baik dari sampel maupun dari populasi. Persamaan *odds ratio* didefinisikan sebagai berikut.

$$\widehat{OR}=\left(\frac{\frac{\pi(1)}{(1-\pi(1))}}{\frac{\pi(0)}{(1-\pi(0))}}\right)$$

$$=\left(\frac{\frac{\exp(\beta_0+\beta_1)}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}}{\frac{1}{1+\exp(\beta_0+\beta_1)}}\right)\left(\frac{\frac{1}{1+\exp(\beta_0)}}{\frac{\exp(\beta_0)}{1+\exp(\beta_0)}}\right)$$

$$=\left(\frac{\exp(\beta_0+\beta_1)}{\exp(\beta_0)}\right)$$

$$=\exp(\beta_1) \tag{2.16}$$

Interpretasi dari $\widehat{OR}$ ialah resiko sering terjadinya peristiwa $Y=1$ adalah sebesar $\exp(\beta_1)$ kali resiko atau kecenderungan sering terjadinya peristiwa $Y=1$ pada kategorik $X=0$ (Hosmer *et.al.*, 2013).

2.10 Ketepatan Klasifikasi

Ketepatan klasifikasi model bertujuan untuk mengetahui apakah data yang diklasifikasi sudah benar atau tidak. Perhitungan yang digunakan dalam prosedur klasifikasi adalah *Apparent error rate* (APER), nilai APER menjelaskan nilai yang salah diklasifikasi dari fungsi klasifikasi (Johnson & Wichern, 2007). Perhitungan nilai APER dapat dilakukan dengan Tabel 2.

Tabel 2. Perhitungan Ketepatan Klasifikasi

Hasil Observasi	Prediksi	
	y_1	y_2
y_1	n_{11}	n_{12}
y_2	n_{21}	n_{22}

keterangan,

n_{11}= jumlah dari y_1 tepat diklasifikasi sebagai y_1

n_{12}= jumlah dari y_1 salah diklasifikasi sebagai y_2

n_{21}= jumlah dari y_2 salah diklasifikasi sebagai y_1

n_{22}= jumlah dari y_2 tepat diklasifikasi sebagai y_2.

Nilai APER dari hasil perhitungan merupakan proporsi observasi yang diprediksi tidak benar oleh klasifikasi dengan rumus sebagai berikut:

$$APER = \frac{n_{12}+n_{21}}{n_{11}+n_{12}+n_{21}+n_{22}} \times 100\% \qquad (2.17)$$

Ketepatan Klasifikasi $= 100\% - APER\ (\%)$

III. Metodologi Penelitian

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester genap ajaran 2021/2022 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder. Data Sekunder adalah data yang diperoleh secara tidak langsung dari peneliti atau sumber yang sudah ada. Data tersebut diambil dari publikasi resmi Badan Pusat Statistik (BPS) https://jatim.bps.go.id/publication.html mengenai Data Persentase Tingkat Kemiskinan Kota/Kabupaten di Jawa Timur beserta faktor-faktor yang memengaruhi pada setiap kabupaten di provinsi Jawa Timur pada tahun 2021. Menurut BPS Jawa Timur (2021) rata-rata persentase tingkat kemiskinan di Jawa Timur sebesar 7,99 %. Persentase tingkat kemiskinan berperan sebagai variabel tak bebas dan dikategorikan menjadi dua yaitu kategori di bawah rata-rata persentase tingkat kemiskinan dikatakan rendah dan diatas rata-rata persentase tingkat kemiskinan dikatakan tinggi, dimana angka kemiskinan rendah dilambangkan 0, sedangkan angka kemiskinan tinggi dilambangkan 1. Sementara untuk variabel-variabel bebas yang diduga memiliki pengaruh terhadap persentase tingkat kemiskinan diantaranya.

X_1 = Jumlah penduduk (ribuan jiwa)

X_2 = IPM

X_3 = Rata-rata lama sekolah (tahun)

X_4 = Angka harapan hidup (tahun)

X_5 = Tingkat pengangguran terbuka (persen)

X_6 =PDRB (miliar rupiah).

3.3 Metode Penelitian

Metode pendugaan parameter yang digunakan pada penelitian ini adalah *Maximum likelihood Estimation* (MLE) dan parameter yang akan diduga pada pendugaan Regresi Logistik Biner adalah β. Selanjutnya Analisis regresi logistik biner akan diaplikasikan pada data persentase tingkat kemiskinan Kabupaten/Kota di Provinsi Jawa Timur. Dengan tahapan penelitian yang dilakukan sebagai berikut:

1. Menduga parameter regresi logistik biner. Parameter yang akan diduga pada pendugaan Regresi Logistik Biner adalah β dengan menggunakan metode MLE

   Langkah-langkah estimasi parameter model regresi logistik biner menggunakan MLE sebagai berikut:

   a. Menentukan fungsi kepekatan peluang bersama dari model regresi logistik biner

   $$\pi(x) = \frac{\exp\,(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n)} \qquad (3.1)$$

   dan fungsi kepekatan peluang dapat didefinisikan dengan menggunakan distribusi Bernoulli sebagai berikut ;

   $$f(y_i)) = \left(\pi(x_i)\right)^{y_i \cdot}\left(1 - \pi(x_i)\right)^{1-y_i} \qquad (3.2)$$

   dimana, $i = 1,2,3, \dots, n \; dengan \; y_i = 0,1$

   b. Membentuk fungsi *likelihood* pada persamaan 3.2

   $$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n}\left(\pi(x_i)\right)^{y_i}.\,[1 - \pi(x_i)]^{1-y_i} \qquad (3.3)$$

ke dalam fungsi $\ln L(\beta)$ atau dapat disebut dengan fungsi maksimum *likelihood*

c. Menentukan peluang dari β dengan cara menurunkan $ln\, ln\, L(\beta)$ terhadap β.

$$\frac{\partial}{\partial\beta} L(\beta)|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \qquad (3.4)$$

d. Mencari turunan kedua dari $L(\beta)$,

$$\frac{\partial^2}{\partial^2\beta} L(\beta)|_{\beta=\hat{\beta}} = 0 \qquad (3.5)$$

untuk membuktikan bahwa fungsi tersebut telah maksimum.

2. Penerapan Regresi Logistik Biner pada data persentase tingkat kemiskinan Kabupaten/Kota di Jawa Timur.

   Dalam penelitian ini, proses perhitungan dilakukan dengan menggunakan bantuan *software R 4.1.3.* Adapun langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut.

   a. Melakukan pengumpulan data yang digunakan dalam penelitian.
   b. Melakukan analisis deskriptif untuk variabel jumlah penduduk (X_1), IPM (X_2), rata-rata lama sekolah (X_3), angka harapan hidup (X_4), tingkat pengangguran terbuka (X_5) dan PDRB (X_6).
   c. Melakukan uji *Multikolinearitas* dengan melihat nilai VIF (*Variance inflation Factor*).
   d. Melakukan uji serentak menggunakan uji G atau *likelihood ratio Test* untuk melihat apakah variabel bebas secara signifikan memengaruhi variabel tak bebas.
   e. Melakukan uji parsial menggunakan uji *wald* untuk melihat variabel bebas mana saja yang saja yang memengaruhi secara signifikan terhadap variabel tak bebas.
   f. Melakukan pemilihan model terbaik dengan menggunakan uji *Hosmer-Lemeshow Goodness of Fit*, untuk memastikan model tersebut sudah sesuai apa belum
   g. Menginterpretasi model dengan menggunakan *odds ratio*.
   h. Menghitung ketepatan klasifikasi model.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Penduga bagi parameter regresi logistik biner menggunakan *maximum likelihood estimation* (MLE) adalah sebagai berikut :

$$\hat{\beta} = \left(\boldsymbol{X^T V X}\right)^{-1} \boldsymbol{X^T V} z$$

2. Faktor-faktor yang berpengaruh terhadap persentase tingkat kemiskinan Kabupaten Kota Jawa Timur ialah jumlah penduduk miskin (X_1), dan Tingkat Pengangguran Terbuka (X_5).

   Berdasarkan hasil analisis regresi logistik biner diperoleh model regresi yaitu :
   persentase tingkat kemiskinan = $0.226 + 0.169x_1 + 0.207x_5$

DAFTAR PUSTAKA

Agresti, A. 2007. *Categorical Data Analysis*. 2^{nd} Edition. John Willey & Sons, New York.

Gujarati, D. N. 2003. Basic Econometric. 4^{th} Edition. The McGrow-Hill Companies, New York.

Hogg, R., dan Craigh, A. 1995. *Introduction to mathematical (5th ed).* Prentice-Hall International, New Jersey.

Hosmer, D. W., Lemeshow, S., & Sturdivant, X. R. 2013. Applied Logistic Regression. 3^{rd}Edition. John Wiley & Sons, New York.

Islamiyati, A. 2015. Estimasi Parameter Model Regresi Logistik Biner Komponen Utama Non Linear Dengan Maksimum Likelihood. *Jurnal Matematika*, **11(**2): 122-128.

Johnson, R. A., dan Wichern, D. W. 2007. *Applied Multivariate Statistical Analysis*. Prentice Hall, New Jersey.

Jones, B. S., & Steenbergen, M. R. 2002. Modelling Multilevel Data Structures. *Americal Journal of Political Science*, **46**(1): 218-237

Ramandhani, R., Sudarno, dan Safitri, D. 2017. Metode Bootstrap Aggregating Regresi Logistik Biner Untuk Ketepatan Klasifikasi Kesejahteraan Rumah Tangga di Kota Pati. *Jurnal Gaussing*. **6(**1): 121-124.

Sembiring, R. K. 1995. Analisis Regresi. ITB. Bandung.

Supangat, A. 2007. Statistika Dalam Kajian Deskriptif, Inferensi, dan Nonparametrik. Kencana. Jakarta.

Suyono. 2018. *Analisis Regresi Untuk Penelitian*. Deepublish, Yogyakarta.