BILANGAN KROMATIK LOKASI HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF SIKLUS

(Skripsi)

Oleh

NUR HAMZAH
1817031059

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF SIKLUS

Oleh

NUR HAMZAH

Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf terhubung $G = (V, E)$ dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan S_i himpunan titik-titik menggunakan i warna yaitu $1, 2, \ldots, i$, yang kemudian disebut dengan kelas warna, maka $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_i\}$ merupakan himpuan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna dari titik v dinotasikan dengan $c_\Pi(v)$ adalah $k -$ pasangan terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), \ldots, d(v, S_k)$ dengan $d(v, S_i) = min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari graf G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan bulat terkecil k sedemikian sehingga G mempunyai pewarnaan lokasi dengan k warna. Operasi korona dari graf G dan graf H, dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari duplikat graf H sebanyak titik yang ada di graf G (duplikat graf H dinyatakan dengan H_i , $i = 1,2,3, \ldots , |V(G)|$) kemudian setiap titik ke-i di $V(G)$ bertetengga dengan setiap titik di H_i. Bilangan kromatik lokasi dari $P_n \odot C_3$ adalah 5 untuk $3 \leq n < 7$ dan 6 untuk $n \geq 7$. Selanjutnya, $\chi_L(P_n \odot C_4)$ adalah 5 untuk $3 \leq n < 6$ dan 6 untuk $n \geq 6$.

Kata Kunci: *Bilangan Kromatik Lokasi, Operasi Korona Graf, Graf Siklus, Graf Lintasan*

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF THE CORONA OPERATION ON A PATH GRAPH WITH A CYCLE GRAPH

By

NUR HAMZAH

Let c be a vertex coloring in a connected graph $G = (V, E)$ with $c(u) \neq c(v)$ for u and v which are neighbors in G. Let S_i be the set of vertices using i colors $1, 2, .., i$, which is called the color classes, then $\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_i\}$ is a set consisting of color classes of $V(G)$. The color code $c_\Pi(v)$ of v is $k-$ ordered pairs $(d(v, S_1),\ d(v, S_2)$, ..., $d(v, S_k)$ with $d(v, S_i) = min\{d(\ v, x) | x \in\ S_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If all distinct vertices of G has a different color code, then c is called locating coloring of G. The locating chromatic number of G denoted by $\chi_L(G)$, is the smallest integer k such that G has a locating $k-$coloring. For any given graphs G and H, define the corona product $G \odot H$ between G and H as the graph obtained from G and H by taking one copy of G and $|V(G)|$ copies of H and then joining all the vertices of the i^{th} -copy of H with the i^{th}-vertex of G. The locating chromatic number of $P_n \odot\ C_3$ is 5 for $3 \leq n < 7$ and 6 for $n \geq 7$. Next, $\chi_L(P_n \odot\ C_4)$ is 5 for $3 \leq n < 6$ and 6 for $n \geq 6$.

Keywords: *Locating Chromatic Number, Corona Operation, Cycle Graph, Path Graph.*

BILANGAN KROMATIK LOKASI HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF SIKLUS

Oleh

NUR HAMZAH

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF SIKLUS**

Nama Mahasiswa : ***Nur Hamzah***

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031059**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.
NIP 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Notiragayu, S.Si. M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **08 Agustus 2022**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: Nur Hamzah
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1817031059
Jurusan	: Matematika
Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI HASIL OPERASI KORONA GRAF LINTASAN DENGAN GRAF SIKLUS**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 08 Agustus 2022

Penulis,

Nur Hamzah

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Nur Hamzah lahir di Mesuji pada 12 September 2000. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara dari pasangan Ayah Abadi dan Ibu Suharti.

Penulis memulai pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SDN 1 Way Huwi, Lampung Selatan pada tahun 2006-2012. Kemudian ke Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Azzainiyyah, Jawa Barat pada tahun 2012-2015. Selanjutnya ke Sekolah Menengah Atas di SMA Azzainiyyah, Jawa Barat pada tahun 2015-2018. Tahun 2018 penulis melanjutkan pendidikan di Universitas Lampung sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Pada Tahun 2020 penulis aktif di Unit Kegiatan Mahasiswa Tingkat Jurusan yaitu HIMATIKA UNILA (Himpunan Mahasiswa Matematika Universitas Lampung) 2020 penulis diamanahkan menjadi Ketua Bidang Eksternal. Ditahun 2021 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sukadanaham, Kecamatan Tanjung Karang Barat, Kota Bandar Lampung, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat. Pada tahun yang sama penulis melaksanakan magang di Kementerian Sosial Republik Indonesia dan ditempatkan di Kabupaten Pesisir Barat, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu matematika di dunia kerja.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan."

(Q.S Al-Insyirah: 6)

"Sesungguhnya Allah tidak mengubah keadaan suatu kaum sampai mereka mengubah keadaan diri mereka sendiri"

(Q.S Ar-Ra'd : 11)

"Sesungguhnya Amal itu tergantung niatnya."

(Hadits)

"Pemuda dipandang (punya derajat) tinggi tergantung seberapa tinggi tekad keyakinannya, dan orang yang tidak punya tekad dan keyakinan maka tidak punya manfaat".

(Imrithy bait ke-16)

"Fokus proses, tawakal pada hasil akhir."

(Nur Hamzah)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulilah sebagai rasa syukur atas nikmat serta hidayah yang diberikan oleh Allah SWT sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik dan tepat pada waktunya. dengan rasa syukur dan bahagia saya persembahkan rasa terima kasih saya kepada:

Ayah Abadi dan Ibu Suharti

Terima kasih kepada kedua orang tuaku atas doa, pengorbanan, dan dukungan yang telah diberikan kepada anakmu ini sehingga dapat menyelesaikan studi dengan baik. Terima kasih atas saran dan pembelajaran yang telah diberikan semoga anakmu ini kelak dapat bermanfaat bagi agama, bangsa, dan negara.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sabar membimbing, mengarahkan, serta memberikan ilmu yang sangat berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua yang telah berkontribusi dalam proses pembelajaran di kampus maupun diluar kampus, Terima kasih atas keritik, saran, doa, dan dukungannya selama ini.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas nikmat dan karunia yang diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“Bilangan Kromatik Lokasi Hasil Operasi Korona Graf Lintasan dengan Graf Siklus”**. Penulisan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya doa, bimbingan, bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I yang senantiasa membimbing, memberi masukan, saran serta mendukung penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A.,Ph.D. selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, arahan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Dr. Notiragayu S.Si., M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Bapak Drs. Eri Setiawan M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah memberikan bimbingan dan arahan selama masa perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen, staff, karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Kedua Orang tuaku, Ayah Abadi dan Ibu Suharti yang selalu memberikan motivasi serta dukunganya.

9. Seluruh keluarga terutama kakakku Amelya Herda Losari dan adikku tercinta yang selalu memberikan semangat kepada penulis serta doa-doanya.
10. Semua teman sejurusan matematika 2018 dan teman kelas B yang telah membantu serta memberikan semangat kepada penulis yang mana tidak bisa disebutkan satu persatu.
11. Orang-orang baik yang namanya tidak bisa saya sebutkan satu persatu yang telah menjadi teman bercerita yang selalu memberikan doa dan semangat kepada penulis dalam menjalani perkuliahan.
12. Teman-teman satu bimbingan yang selalu memberikan dukungan dan motivasi serta doa-doanya.
13. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan serta saran untuk dijadikan pelajaran kedepannya.

Bandar Lampung, 08 Agustus 2022

Penulis,

Nur Hamzah

DAFTAR ISI

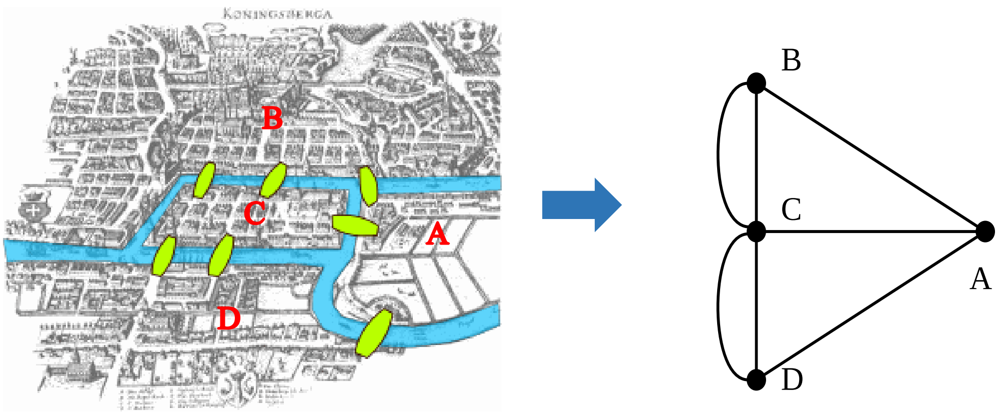
Halaman

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang mempelajari tentang himpunan titik yang dihubungkan oleh himpunan sisi. Teori graf lahir dari upaya penyelesaian permasalahan tujuh Jembatan *Königsberg (Seven Königsberg Bridges)* pada tahun 1736 oleh Leonardo Euler seorang matematikawan Swiss. Cara yang digunakan oleh Euler dalam menyelesaikan masalah tersebut adalah dengan merepresentasikannya menjadi himpunan titik dan garis, daratan yang dihubungkan oleh jembatan sebagai titik dan jembatan sebagai sisi, sehingga memudahkan dalam menyelesaikan masalah tersebut.



Gambar 1. Jembatan *Königsberg* dan representasinya pada graf.

Dalam tiga dasawarsa terakhir teori graf mengalami perkembangan yang signifikan dalam teori maupun pengaplikasiannya. Berawal dari dimensi matrik yang dikaji oleh Harary F dan Melter RA pada tahun 1976 dan dimensi partisi yang dikaji oleh Chartrand, dkk. pada tahun 1998, selanjutnya perpaduan serta pengembangan dari dimensi matrik dan dimensi partisi menghasilkan bilangan kromatik lokasi pada graf yang dikaji dan diperkenalkan pertama kali oleh Chartrand, dkk.,(2002).

Chartrand, dkk., (2002) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf, diantaranya pada graf lengkap diperoleh $\chi_L\ (K_n) = n$, pada graf terhubung (G) diperoleh $3 \leq \chi_L(G) \leq n$ untuk orde $n \geq 3$, serta pada graf siklus diperoleh $\chi_L\ (C_n) = 3$ untuk n ganjil dan $\chi_L\ (C_n) = 4$ untuk n genap. Setahun kemudian Chartrand dkk. membuktikan bahwa bilangan kromatik lokasi graf G dengan orde n yang memuat graf multipartit lengkap berorde $(n - 1)$ sebagai subgraf induksinya, berada pada selang $\left[\frac{n+1}{2}, n\right]$ dan juga graf-graf yang mempunyai bilangan kromatik lokasi dengan batas atasnya $(n - 2)$. Selanjutnya Chartrand, dkk., (2003) juga menunjukkan bahwa terdapat pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi $k \in \{3,4, \dots, n - 2, \}$.

Pada tahun 2011 Asmiati, dkk., telah menemukan bilangan kromatik lokasi graf amalgamasi bintang. Selanjutnya, Asmiati, dkk., (2012) memperoleh bilangan kromatik lokasi pada graf kembang api. Pada tahun yang sama juga, Asmiati dan Baskoro (2012) berhasil menemukan karakteristik semua graf yang memuat siklus berbilangan kromatik lokasi tiga. Kemudian, Baskoro dan Asmiati (2013) telah mendapatkan karakterisasi semua pohon berbilangan kromatik lokasi tiga. Pada tahun 2014 Asmiati menemukan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bintang tak homogen. Selanjutnya Asmiati (2016) meneliti bilangan kromatik lokasi pada graf ulat tak homogen. Salah satu operasi pada graf adalah operasi korona yang diperkenalkan oleh Fucht dan Harary pada tahun 1970.

Karena belum adanya teorema untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sembarang graf sehingga untuk mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada kelas-kelas graf yang berbeda diperlukan penelitian lebih lanjut. Pada penelitian ini akan dikaji bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus. Penelitian ini dibatasi untuk graf siklus dengan 3 titik dan 4 titik.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

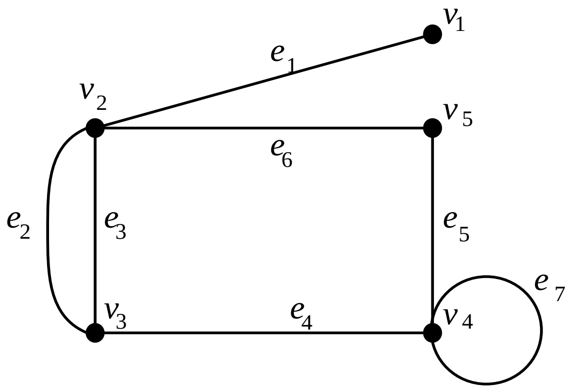
1. Menambah wawasan ilmu tentang teori graf khususnya bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan dengan graf siklus.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut tentang bilangan kromatik lokasi pada graf hasil operasi korona.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Graf

Menurut Deo (1989) suatu graf G adalah himpunan yang terdiri dari V dan E, dimana $V(G)$ adalah himpunan tak kosong dari elemen yang disebut titik(*vertex*) dan $E(G)$ adalah himpunan dari pasangan tak terurut (u, v) dimana $u, v \in V(G)$, yang disebut sisi (*edge*). Untuk penyederhanaan penulisan sisi $e = (u, v) \in E(G)$ dapat ditulis $e = uv \in E(G)$ dan Graf $G = (V, E)$ dapat ditulis graf G. Jika terdapat sisi antara u dan v, yaitu $e = uv \in E$ maka titik u dikatakan bertetangga (*adjacent*) dengan titik v dan himpunan semua titik yang beretangga dengan v dinotasikan dengan $N(v)$, selanjutnya sisi e dikatakan menempel (*incident*) dengan titik u dan v.

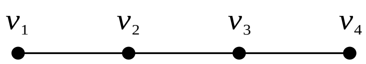
Derajat (*degree)* titik v, dinotasikan $deg(v)$ adalah banyak sisi yang menempel pada titik v. Titik dengan derajat nol disebut titik terisolasi *(isolated vertex*) sedangkan titik dengan derajat satu disebut daun (*pendant*). Sisi yang titik ujungnya pada titik yang sama disebut *loop* sedangkan beberapa sisi berbeda yang menghubungkan dua titik yang sama disebut sisi ganda (*multiple edge*). Graf yang tidak mempunyai *loop* dan sisi ganda disebut graf sederhana (*simple graph*). Graf G disebut terhubung (*connected*) jika setiap dua titik sebarang berbeda terhubung.



Gambar 2. Graf G dengan 5 titik dan 7 sisi

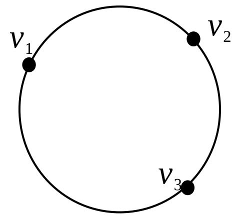
Gambar 2 merupakan graf G dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Titik v_1 dan v_2 dikatakan bertetangga sedangkan sisi e_1 menempel pada titik v_1 dan v_2. Titik v_1 disebut *pendant*, dan sisi e_7 disebut *loop* karena memiliki ujung yang sama yaitu dititik v_4. Adapun derajat tiap titik adalah $deg(v_1) = 1$, $deg(v_2) = 4$, $deg(v_3) = 3$, $deg(v_4) = 4$, $deg(v_5) = 2$.

Graf lintasan P adalah urutan tak nol dari titik dan sisi $P = v_1\ e_1\ v_2\ e_2 \ldots v_i\ e_i \ldots e_{n-1}\ v_n$ dimana $1 \leq i \leq n$. Lintasan dengan n titik disebut P_n. Titik v_0 adalah titik awal lintasan dan v_n adalah titik akhir lintasan. Di bawah ini merupakan graf lintasan dengan 4 titik (P_4).



Gambar 3. Graf lintasan P_4.

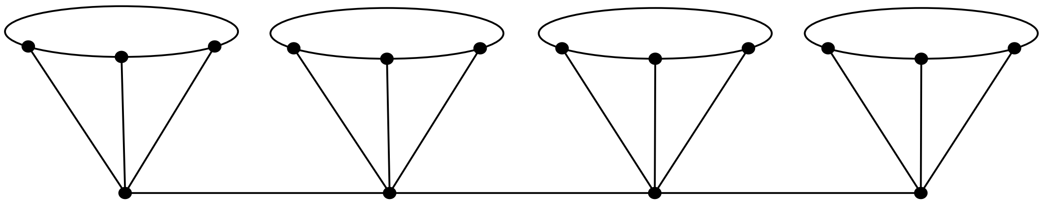
Graf siklus adalah graf graf lintasan dengan titik awal dan titik akhir sama. Dengan kata lain graf siklus adalah graf yang memiliki n titik yang setiap titik nya berderajat 2 dengan $n \geq 3$. Graf siklus dengan n titik disebut juga C_n. Berikut ini contoh graf siklus dengan 3 titik (C_3).



Gambar 4. Graf siklus C_3.

2.2 Operasi Korona Graf

Operasi korona dari graf G dan graf H, dinotasikan dengan $G \odot H$ adalah graf yang diperoleh dari duplikat graf H sebanyak titik yang ada di graf G (duplikat graf H dinyatakan dengan H_i , $i = 1, 2, 3, \dots , |V(G)|$, dimana $|V(G)|$ merupakan banyaknya titik di G) kemudian setiap titik ke-i di $V(G)$ bertetengga dengan setiap titik di H_i. Di bawah ini diberikan contoh hasil operasi korona $P_4 \odot C_3$.



Gambar 5. Graf hasil operasi korona $P_4 \odot C_3$

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Diberikan graf G, dan c adalah suatu pewarnaan titik di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v bertetangga di G. Minimum pewarnaan titik pada graf G disebut bilangan kromatik dari graf G , dinotasikan dengan $\chi(G)$. Selanjutnya diberikan definisi bilangan kromatik lokasi yang diambil dari Chartand, dkk.(2002). Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang di beri warna i, selanjutnya disebut kelas warna, maka $\prod = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ adalah himpunan kelas warna dari $V(G)$. kode warna $c_\Pi(v)$ dari v adalah k −pasang terurut $(d(v, S_1), d(v, S_2), d(v, S_3), \dots, d(v, S_k))$ dengan $d(v, S_i) = \min\{d(v, x) | x \in S_i\}$ untuk $1 \le i \le k$ dimana $d(v, x)$ merupakan jarak minimum dari titik v ke titik x. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Sedangkan banyakanya warna miminum yang digunakan dalam pewarnaan di G disebut bilangan kromatik lokasi dari G, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena pewarnaan lokasi merupakan pewarnaan juga, maka $\chi(G) \le \chi_L(G)$.

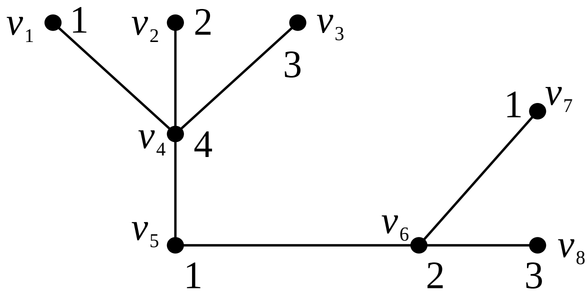
Teorema 2.1(Chatrand, dkk., 2002)
Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v adalah titik – titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:
Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\prod = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ adalah partisi dari titik – titik G ke dalam kelas warna S_i. Untuk semua titik $u, v \epsilon V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal S_i dari Π. Akibatnya, $d(u, S_i) = d(v, S_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \epsilon V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, S_j) = d(v, S_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \le j \le k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Sehingga, $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 (Chartrand , dkk., 2002)
Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \ge k + 1$.

Bukti:
Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna

yang berbeda untuk setiap x_i dimana $i = 1,2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■



Gambar 6. Graf G dengan bilangan kromatik lokasi 4.

Diberikan suatu graf G pada Gambar 6 yang akan dicari bilangan kromatik lokasi pada graf tersebut. Terlebih dahulu ditentukan batas bawah dari graf G. Karena titik v_4 pada graf G memiliki jumlah daun terbanyak, yaitu 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1 $\chi_L(G) \geq 4$. Misalkan c adalah pewarnaan titik empat warna pada graf G sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna yaitu: $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ dimana $S_1 = \{v_1, v_5, v_7\}$, $S_2 = \{v_2, v_6\}$, $S_3 = \{v_3, v_8\}$, dan $S_4 = \{v_4\}$. Setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = \{0, 2, 2, 1\}$; $c_\Pi(v_4) = \{1, 1, 1, 0\}$; $c_\Pi(v_7) = \{0, 1, 2, 3\}$;
$c_\Pi(v_2) = \{2, 0, 2, 1\}$; $c_\Pi(v_5) = \{0, 1, 2, 1\}$; $c_\Pi(v_8) = \{2, 1, 0, 3\}$;
$c_\Pi(v_3) = \{2, 2, 0,1\}$; $c_\Pi(v_6) = \{1, 0, 1, 2\}$.

Karena kode warna pada setiap titik di graf G tersebut berbeda dan merupakan pewarnaan minimun, maka graf tersebut memiliki bilangan kromatik lokasi $\chi_L(G) = 4$

Teorema 2.2 (Chartrand, dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lintasan $P_n (n \geq 3)$ adalah 3.

Bukti: Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelas bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Akibat 2.1 diperoleh $\chi(G) \geq k + 1$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$ maka $\chi_L(G) \geq (2 + 1)$. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq 3$, untuk $n \geq 3$. ■

Teorema 2.3 (Chartrand dkk., 2002)
Graf Siklus C_n misalkan $n \geq 3$, maka

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3\,, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ 4\,, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti : Dengan mempertimbangkan dua kasus

Kasus 1.
$n \geq 3$ adalah ganjil. Misal himpunan titik graf siklus $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ditetapkan warna 1 untuk v_1 diberi warna 1, warna 2 untuk v_i jika i adalah genap dan warna 3 untuk v_i jika $i \geq 3$ dan ganjil. Berdasarkan Akibat 2.1 perlu ditunjukan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk membuktikan bahwa $\chi_L(C_n) = 3$. Pertimbangkan dua sub kasus berikut :

Subkasus 1.1
Jika $n \geq 4k + 1$, dimana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k, (v_{2i}) = (2i - 1{,}0{,}1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c(v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0{,}1)$. Juga, untuk $1 \leq i \leq k$, $(v_{2i}) = (2i - 1{,}1{,}0)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k, c(v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0{,}1)$. Karena vektor-vektor, $c(v_i)$ berbeda. Sehingga pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi, jadi $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Subkasus 1.2
$n = 4k + 3$, dimana $k \geq 0$. Membuktikan bahwa $\chi_L(C_{4k+3}) = 3$ dengan cara yang sama pada subkasus 1.1 .

Kasus 2
Jika $n \geq 4$ adalah genap. Misalkan kembali himpunan titik graf siklus $(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Diberi warna 1 untuk v_i ,warna 2 untuk v_i, warna 3 untuk v_i , jika $i \geq 3$, i ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $i \geq 4$ genap. Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n adalah $\chi_L\,(C_{4k}) = 4$.

Subkasus 2.1

Jika $n = 4k$, dimana $k \geq 1$ untuk $1 \leq i \leq k, c_{\Pi}(v_{2i} + 1) = (2i, 2i - 1,0,1)$, dimana $k + 1 \leq i \leq 2k - 1, c_{\Pi}(v_{2i} + 1) = (4k - 2i, 4k - 2i + 1,0,1)$. Untuk $2 \leq i \leq k, c_{\Pi}(v_{2i}) = (2i - 1,2i - 1,1,0)$, dimana $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_{\Pi}(v_{2i}) = (2k + 1\ 2i, 4k + 2 - 2i, 1,0)$. Karena ordinat- ordinat dari $c_{\Pi}(v_i)$ berbeda pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi .

Subkasus 2.2

Jika $n = 4k + 2$, dimana $k \geq 1$. Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti sub kasus 2.1. Selanjutanya ini hanya perlu membuktikan bahwa $\chi_L(G) = 4$, jika n adalah genap. Asumsikan sebaliknya bahwa terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n memerlukan 3 warna, misalkan 1, 2, 3, untuk $n \geq 4$. Setidaknya terdapat satu warna, misalkan 2 adalah warna bilangan genap t dari titik C_n, dimana $2 \leq t \leq n/2$. Seperti proses siklus pada C_n. Dimulai dengan 1 misalkan, $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$, titik-titik dari C_n bahwa berwarna 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga , termasuk untuk setiap bilangan bulat dengan $1 \leq j \leq$ t , himpunan $I_j = \{v_{ij+1}, v_{ij+2}, \dots, v_{ij+1} - 1\}$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang memiliki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih, untuk asumsi sebaliknya beberapa selang I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih . Asumsikan bahwa v_{ij+1} dan $v_{ij+1} - 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian, $c_{\Pi}(v_{ij} + 1) = c_{\Pi}(v_{ij+1} - 1) = (0,1,1)$ tetapi tidak mungkin.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya, untuk asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat selang-selang yang memuat bilangan genap di titik –titiknya. Karena c_{2k} memiliki susunan genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 selang berbeda memuat bilangan genap dititiktitiknya. Asumsikan, tanpa menghilangkan keumuman, bahwa $v_{ij} + 1$ diberi warna 1. Tepat hanya 1 dari $v_{ik} + 1$ dan $v_{ik} - 1$ diberi warna 1, maka $c_{\Pi}(v_{ij} + 1) = c_{\Pi}(v_{ij+1} - 1) = (0,1,1)$ kontradiksi. Akibatnya, semua selang $t = n/2$

memuat tepat satu titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat terkecil I_j $(1 \leq j \leq n/2)$, maka $v_{ik} + 1$ dan $v_{ik} - 1$ diberi warna yang berbeda, misalkan 1 dan 3, secara berturut-turut. Pentingnya, terdapat bilangan bulat $I_k > I_j$ bahwa $v_{ik} - 1$ diberi warna 3 dan $v_{ik} + 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian $c_\Pi(v_{ij} + 1) = c_\Pi(v_{ij+1} - 1) = (0,1,1)$. Hasil akhir kontradiksi oleh karena itu $\chi_L(C_n) = 4$ jika n adalah genap. ■

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun ajaran 2021/2022.

3.2 Metode Penelitian

Pada penelitian ini dibagi menjadi dua kasus dan dilakukan melalui tahapan-tahapan sebagai berikut :

1. Mencari bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan n titik korona graf siklus 3 titik $(P_n \odot C_3)$.
    a. Menentukan batas bawah dari graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$. Batas bawah dimulai dari bilangan kromatik lokasi C_n, $\chi_L(P_n \odot C_3) \geq 3$ untuk n ganjil. Kemudian dilakukan penambahan warna sehingga memenuhi syarat bilangan kromatik lokasi.
    b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf hasil operasi korona $P_n \odot C_3$. Pewarnaan dikonstruksi sedemikian sehingga diperoleh pewarnaan minimum yang memenuhi syarat bilangan kromatik lokasi.
    c. Memformulasikan hasil yang diperoleh dalam pernyataan matematika.

d. Membuktikan hasil yang sudah diperoleh.

2. Mencari bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan n titik korona graf siklus 4 titik $(P_n \odot C_4)$.
   a. Menentukan batas bawah dari graf hasil operasi korona $P_n \odot C_4$. Batas bawah dimulai dari bilangan kromatik lokasi C_n, $\chi_L(P_n \odot C_4) \geq 4$ untuk n genap. Kemudian dilakukan penambahan warna sehingga memenuhi syarat bilangan kromatik lokasi.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf hasil operasi korona $P_n \odot C_4$. Pewarnaan dikonstruksi sedemikian sehingga diperoleh pewarnaan minimum yang memenuhi syarat bilangan kromatik lokasi.
   c. Memformulasikan hasil yang diperoleh dalam pernyataan matematika.
   d. Membuktikan hasil yang sudah diperoleh.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan untuk bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf lintasan n titik korona graf siklus 3 titik $(P_n \odot C_3)$ dan graf lintasan n titik korona graf siklus 4 titik $(P_n \odot C_4)$, diperoleh :

$$\chi_L(P_n \odot C_3) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 3 \leq n < 7 \\ 6, & \text{untuk } n \geq 7 \end{cases}$$

dan

$$\chi_L(P_n \odot C_4) = \begin{cases} 5, & \text{untuk } 3 \leq n < 6 \\ 6, & \text{untuk } n \geq 6 \end{cases}$$

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan untuk mencari bilangan kromatik lokasi hasil operasi korona graf $P_n \odot C_m$ dengan $m \geq 5$, serta untuk operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun H, Baskoro E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.Sci*. **43A**: 1-8.

Asmiati & Baskoro, E.T. 2012. Characterizing All Graphs Containing Cycles with Locating-Chromatic Number 3. *AIP Conf. Proc.*. **1450**: 351-357.

Asmiati, Assiyatun H, Baskoro E.T., Suprijanto D., Simanjuntak R,Uttunggadewa S.. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **3(1):**11-23.

Asmiati. 2014. The Locating-Chromatic Number of Non-Homogeneous Amalgamation of Stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **93(1)**: 89-96.

Asmiati. 2016. On The Locating-Chromatic Numbers of Non Homogeneous Caterpillars and Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **100(8)**:1305- 1316.

Baskoro, E.T. & Asmiati. 2013. Characterizing All Trees with Locating-chromatic Number 3. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. **1(2)**:109-117.

Chartrand G, Salehi E, Zhang P. 1998. On the Partition Dimension of Graph. *Congr. Numer*. **130**:157-168.

Chartrand G, Erwin D, Henning MA, Slater PJ, Zhang P. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.*, **36**:89-101.

Chartrand G, Erwin, Henning MA, Slater J, Zhang P. 2003. Graph of Order n with Locating-chromatic Number n-1. *Discrete Math*. **269**:65-79.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science.* Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Frucht, R & Harary, F. 1970. On the Corona of Two Graphs. *Aequationes mathematicae*. **4(3)**:322-325.

Harary F & Melter RA. 1976. On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combinatori*. **2**:191-195.