JUMLAH DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUADRAT DENGAN AKAR BILANGAN BULAT POSITIF GANDA

(SKRIPSI)

Oleh

PRISTI AYU UTAMI

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

ABSTRACT

THE SUM OF THE SERIES OF RECIPRICALS OF THE QUADRATIC POLYNOMIALS WITH DOUBLE POSITIVE INTEGER ROOT

By

Pristi Ayu Utami

A harmonic series is a series whose terms are the reciprocal of the natural numbers. This research examines how to calculate the number of series whose terms are the reciprocal of a square polynomial with double positive integer roots. Determination of the formula for the number of series, considering the generalized harmonic series. The results obtained indicate that there is a relationship between the number of these series and the Riemann zeta function.

Keywords : *Inverse Series, Quadratic Polynomials, Harmonic Numbers, Roots of Double Positive Integers*

ABSTRAK

JUMLAH DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUADRAT DENGAN AKAR BILANGAN BULAT POSITIF GANDA

Oleh

Pristi Ayu Utami

Deret harmonik merupakan deret yang suku-sukunya berupa kebalikan bilangan asli. Pada penelitian ini dikaji bagaimana menghitung jumlah deret yang suku-sukunya merupakan kebalikan dari polinomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda. Penentuan formula jumlah deret tersebut, mempertimbangkan deret harmonik yang diperumum. Hasil yang diperoleh menunjukkan adanya keterkaitan antara jumlah deret tersebut dengan fungsi zeta riemann.

Kata kunci : Deret Kebalikan, Polinomial Kuadrat, Bilangan Harmonik, Akar Bilangan Bulat Positif Ganda

JUMLAH DERET KEBALIKAN DARI POLINOMIAL KUADRAT DENGAN AKAR BILANGAN BULAT POSITIF GANDA

PRISTI AYU UTAMI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengtahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2022

Judul Skripsi : Jumlah Deret Kebalikan Dari Polinomial Kuadrat Dengan Akar Bilangan Bulat Positif Ganda

Nama Mahasiswa : Pristi Ayu Utami

Nomor Pokok Mahasiswa : 1657031002

Program Studi : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.	**Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**
NIP 19740316 200501 1 001	NIP 19700831199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**

Sekretaris : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**

Penguji Utama : **Amanto, S.Si., M.Si**

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T.
NIP 19740705 200003 1 001

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 22 Desember 2022

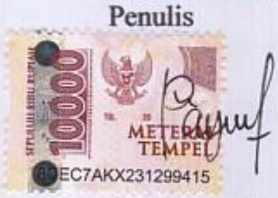
PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama	: **Pristi Ayu Utami**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1657031002**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi yang berjudul **"Jumlah Deret Kebalikan Dari Polinomil Kuadrat Dengan Akar Bilangan Bulat Positif Ganda"** merupakan hasil saya sendiri dan sepanjang pengetahuan saya bukan merupakan hasil yang telah dipublikasikan atau ditulis orang lain atau telah dipergunakan dan diterima sebagai persyaratan penyelesaian studi pada universitas atau institute lain.

Bandar Lampung, 22 Desember 2022
Penulis



Pristi Ayu Utami
NPM. 1657031002

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Pristi Ayu Utami lahir di Natar 12 Juli 1998. Penulis merupakan anak pertama dari 2 bersaudara pasangan Bapak Suyitno dan Ibu Asih Wahyu Utami.

Penulis menempuh pendidikan TK di TK Al-azhar 8 Merak Batin Natar Lampung Selatan pada tahun 2003 sampai dengan 2004. Kemudian melanjutkan sekolah dasar di SD Negeri 2 Merak Batin pada tahun 2004 sampai dengan 2010. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Yadika Natar pada tahun 2010 sampai dengan 2013. Kemudian menempuh pendidikan SMA di SMA Yadika Natar pada tahun 2013 sampai dengan 2016.

Pada tahun 2016, melalui jalur Mandiri penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA). Sejak awal perkuliahan tahun 2016-2017, penulis bergabung di Generasi Muda Himatika (GEMATIKA) di Universitas Lampung.

Pada awal tahun 2019, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di PT. Lambang Jaya. Kemudian penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Liman Benawi, Trimurjo, Kabupaten Lampung Tengah.

KATA INSIPIRASI

"Allah tidak <u>membebani seseorang</u> melainkan sesuai <u>dengan kesanggupannya</u>"
(Q.S Al-Baqarah : 286)

"Kemudian apabila kamu telah <u>membulatkan tekad</u>, maka bertawakal lah kepada Allah. Sesungguhnya Allah <u>menyukai orang-orang</u> yang bertawakal kepada-Nya."
(Q.S Ali Imran : 159)

" Karena sesungguhnya <u>sesudah kesulitan</u> itu <u>ada kemudahan</u>, sesungguhnya <u>sesudah kesulitan</u> itu <u>ada kemudahan</u>."
(Q.S Al-Insyirah : 5-6)

"Dan barang -siapa yang <u>bertakwa kepada Allah</u>, niscaya Allah menjadikan baginya <u>kemudahan dalam urusannya</u>."
(Q.S At-Talaq : 4)

"Selesaikanlah sesuatu yang telah kau mulai sesulit apa pun itu. Istirahat jika merasa lelah, terus berusaha dan tetap berserah diri kepada Sang Pencipta. Karena hanya dengan menyelesaikannya kamu akan mengetahui hasil dari usaha mu."
(Pristi Ayu Utami)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin. Segala puji bagi allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Shalawat serta salam kepada junjungan Nabi besar, Nabi Muhammad SAW.

Skripsi ini saya dedikasikan untuk kedua orangtua saya tercinta

Suyitno dan Asih Wahyu Utami

Terimakasih sangat banyak untuk segala cinta, kasih sayang, kesabaran, dukungan moril maupun materil yang tidak pernah ada ujungnya.

Tegar Adi Pratama

Terimakasih sudah menjadi adik yang memberi bantuan maupun dukungan.

Untuk siapapun yang selalu bertanya "kapan skripsimu selesai?"

Terlambat lulus atau lulus tidak tepat waktu bukan sebuah kejahatan, bukan sebuah aib. Alangkah kerdilnya jika mengukur kepintaran seseorang hanya dari siapa yang paling cepat lulus. ***Bukankah sebaik-baiknya skrpsi adalah yang selesai?*** *Baik itu selesai tepat waktu maupun tidak tepat waktu.*

SANWACANA

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan berkat dan rahmat-nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini yang berjudul "Jumlah Deret Kebalikan Dari Polinomial Kuadrat Dengan Akar Bilangan Bulat Positif Ganda". Selama proses penyusunan skripsi ini, banyak pihak yang telah membantu dan memberikan bimbingan, dukungan, motivasi, serta saran sehingga skripsi ini dapat terealisasikan. Dimana tanpa bantuan mereka belumlah tentu penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Untuk itu penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan selaku Pembimbing I yang selalu bersedia menyempatkan waktu untuk memberikan arahan, bimbingan, saran, serta dukungan dalam berbagai hal kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing II yang telah menyempatkan waktu untuk membimbing dan memberikan arahan serta dukungan kepada penulis.
3. Amanto, S.Si., M.Si.,selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.

4. Ir. Warsono, M.S., Ph.D., selaku Pembimbing Akademik yang selalu bersedia memberikan bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis terhadap hal yang berkaitan dengan Akademik.
5. Bapak Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Sekretaris Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang sudah membantu penulis sampai penulis dapat menyelesaikan studinya.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Orang tuaku Bapak Suyitno dan Ibu Asih Wahyu Utami yang menemani dan mendukung setengah perjalanan penulis dalam dalammenempuh pendidikan sarjananya, yang selalu mendoakan dan berjuang bagi penulis.
8. Kepada adikku Tegar Adi Pratama yang sangat aku sayangi, serta semua saudaraku yang senantiasa mendukungku.
9. Semua teman terbaikku yang sudah memberi semangat.
10. Deni Andrianto yang selalu memberi dukungan.
11. PT. Lambang Jaya yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kerja kepada penulis.
12. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2016.
13. Teman-teman dan pihak yang membantu dalam pengerjaan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu dan juga kepada pihak-pihak yang mendoakan penulis.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Semoga skripsi ini dapat memberikan banyak manfaat bagi kita semua. Penulis juga menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan sripsi ini lebih baik lagi.

B.Lampung, 22 Desember 2022
Penulis,

Pristi Ayu Utami

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika merupakan salah satu ilmu yang banyak dimanfaatkan dalam kehidupan sehari-hari. Secara umum matematika digunakan dalam transaksi perdagangan, pertukangan, dan lain-lain. Hampir di setiap aspek kehidupan, ilmu matematika banyak diterapkan. Karena itu matematika mendapat julukan sebagai ibu segala ilmu. Matematika juga mempunyai banyak kelebihan dibanding ilmu pengetahuan lain. Selain sifatnya yang fleksibel dan dinamis, matematika juga selalu dapat mengimbangi perkembangan zaman, terutama di masa sekarang ketika segala sesuatu dapat dilakukan dengan komputer.

Salah satu cabang ilmu matematika yang banyak dikaji adalah matematika analisis dan aljabar. Materi yang dikaji diantaranya berupa konsep suku banyak, barisan serta deret. Suku banyak atau polinomial dapat diartikan sebagai persamaan yang memiliki variabel dengan pangkat bertingkat. Suku banyak atau polinom dalam variabel x yang berderajat n secara umum dapat ditulis sebagai berikut:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_{1-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_n \, , a_0 \neq 0$$

Contoh persamaan yang termasuk dalam suku banyak adalah $x^4 + 1{,}2x^3 + x^2 - 5$, dan lain sebagainya.

Adapun deret dari suatu barisan bilangan $\{a_n\}$ didefinisikan sebagai :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ yang dikaitkan dengan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ didefinisikan untuk masing-masing *n* adalah sebagai berikut :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Salah satu deret yang terkenal adalah deret harmonik. Bilangan harmonik ke-*n* meupakan jumlah kebalikan dari *n* bilangan asli yang pertama yaitu

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Kemudian bilangan harmonik ini diperumum untuk orde *n* dengan pangkat *r* sebagai berikut

$$H_{n,r} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^r}$$

Dalam penelitian ini akan dikaji bagaimana menentukan jumlah deret berbentuk

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq a}}^{\infty} \frac{1}{(k-a)^2}$$

dengan mempertimbangkan bentuk bilangan harmonik yang diperumum. Deret di atas dapat dinyatakan sebagai deret yang suku-sukunya merupakan kebalikan dari polinomial orde 2 (kuadrat) dengan akar bilangan bulat positif ganda.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah menentukan formula jumlah dari deret yang suku-sukunya kebalikan dari polinomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda. Serta menetukan bentuk bilangan harmonik yang di perumum.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian tentang jumlah dari deret timbal balik dari poliomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda ini, diantaranya adalah sebagai berikut.

1. Mengetahui masalah pada jumlah dari deret kebalikan dari poliomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda,
2. Memahami bilangan harmonik,
3. Dapat memberi ide bagi penulis lain yang akan meneliti lebih lanjut tentang polinomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda.

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Polinomial

Persamaan bilangan bulat rasional atau yang sering disebut sebagai persamaan polinomial memiliki bentuk standar seperti berikut:

$$a_0x^n + \ a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x \ + + a_n = 0 \tag{2.1}$$

Dengan a disebut sebagai koefisien polinomial yang merupakan bilangan riil dan n merupakan derajat polinomial yang berupa bilangan bulat positif. Suku-suku pangkat dari x disusun dalam derajat menurun. Bila tidak terdapat sebuah suku, maka nilai koefisien dari suku tersebut adalah nol. Suku a_nx^n disebut sebagai suku terdepan, a_0 disebut sebagai suku konstanta, dan a_n disebut sebagai koefisien terdepan, (Ayres & Schmidt, 2004).

Polinomial disebut sebagai polinomial monoid yaitu polonomial yang koefisein variabel x berderajat tertinggi sama dengan 1. Bentuk polinomial adalah sebagai berikut:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0 \tag{2.2}$$

Contoh-contoh polinomial berdasarkan derajat polinomial adalah sebagai berikut:

a. Polinomial kuadrat (*quadratic polinomial*) yaitu polinomial dengan nilai pangkat tertinggi dari suku x adalah 2, (Harris & Stocker, 1998).

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

b. Polinomial kubik (*cubic polynomial*) merupakan polinomial yang nilai pangkat tertinggi dari suku x adalah tiga (n=3)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Dengan a,b,c merupakan bilangan real dan $a \neq 0$

c. Polinomial kuartik (*quartic polynomial*) adalah polinomial berderajat empat dimana nilai pangkat tertinggi x adalah empat (n=4)

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

d. Polinomial berderajat n merupakan polinomial dengan nilai pangkat tertinggi dari variabel x adalah n.

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

Dimana $a_1, a_2, \ldots, a_n$ merupakan bilangan real.

Persamaan polinomial $f(x) = 0$ memiliki akar polinomial r jika dan hanya jika$f(r) = 0$. Akar-akar sebuah persamaan polinomial dapat berupa akar-akar kompleks. Akar-akar irasional dan rasional apabila persamaan polinomial $f(x) = 0$ memiliki koefisien real dan jika bilangan kompleks $a + bi$ juga merupakan akar persamaan polinomial tersebut.

2.1.1 Fungsi Polinomial

Sebarang fungsi yang diperoleh dari fungsi konstan dan fungsi identitas dengan melakukan operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian disebut fungsi polinomial (Purcell, 1999).

2.1.2 Bentuk Fungsi Polinomial

Fungsi *f* dikatakan fungsi polinom jika berbentuk, $f(x) = a_n x^n + \ a_{n-1}x^{n-1} + \cdots$

$+ a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \forall x \in \mathbb{R}$;

n= bilangan bulat tak negatif $a_1, a_2, \dots, a_n$= bilangan rill, $a_n \neq 0$.

2.2 Definisi Fungsi

Sebuah fungsi f adalah suatu aturan padanan yang menghubungkan tiap obyek x dalam suatu himpunan, yang disebut daerah asal, dengan sebuah nilai unik f(x) dari himpunan kedua. Himpunan nilai yang diperoleh secara demikian disebut daerah hasil (jelajah) fungsi tersebut, (Varberg et al., 2006).

2.3 Barisan dan Deret

Barisan merupakan suatu runtutan angka atau bilangan dari kiri ke kanan dengan pola serta aturan tertentu. Barisan berkaitan erat dengan deret. Jika barisan adalah kelompok angka atau bilangan yang berurutan, maka deret merupakan jumlah dari suku-suku barisan, (Anwar, 2017).

2.3.1 Barisan Tak Terhingga

Barisan tak terhingga adalah sebuah fungsi yang daerah asalnya adalah himpunan bilangan asli. Suatu barisan $a_1, a_2, a_3, \cdots$, dapat disajikan sebagai $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, atau lebih singkat $\{a_n\}$. Pada dasarnya barisan yang terdiri dari semua bilangan asli yang lebih besar atau sama dengan bilangan asli yang disebutkan, misalnya $b_0, b_1, b_2, \cdots$, dan $c_8, c_9, c_{10}, \cdots$, yang rumus umumnya dapat dituliskan sebagai bentuk suatu pola, seperti pada barisan 1,4,7,10,13, ...

2.3.2 Barisan Sebagai Fungsi

Suatu fungsi yang domainnya berupa bilangan bulat positif disebut barisan. Barisan dikatakan barisan tak hingga apabila domainnya berupa himpunan bilangan bulat positif {1,2,3, ..., n,...}. Dan barisan dikatakan barisan hingga bila domainnya merupakan himpunan bagian hingga dari bilangan bulat positif, (Afidah & Khairunnisa, 2014).

2.3.3 Barisan Jumlah Parsial

Didefinisikan sebuah deret sebagai penjumlahan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

Barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ yang terkait dengan deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ didefinisikan untuk masing-masing n penjumlahan dari barisan $\{a_k\}$ dari a_1 ke a_n , yaitu

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen ke batas jika dan hanya jika barisan jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen ke S, yaitu $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Dikatakan bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ memiliki jumlah dan tulis $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, (Potucek, 2016).

2.3.4 Deret Bilangan

Deret bilangan merupakan jumlah dari suku-suku pada barisan bilangan. Jika $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1} a_n$ adalah barisan bilangan $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ adalah sebuah deret bilangan. Deret bilangan yang dinotasikan dengan S_n yaitu jumlah n suku barisan bilangan. Maka dapat ditulis $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, (Afidah & Khairunnisa, 2014).

2.3.5 Deret Harmonik

Deret harmonik adalah barisan bilangan-bilangan yang kebalikannya membentuk sebuah deret hitung. Jadi $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \cdots$ adalah sebuah deret harmonis sebab 2, 4, 6, 8, 10,... adalah sebuah deret hitung, (Spiegel, 1999).

Suku-suku antara dua suku yang diberikan disebut rata-rata antara dua suku tersebut. Jadi dalam deret hitung 3,5,7,9,11, ... rata-rata suku antara 3 dan 7 adalah 5, dan empat rata-rata suku antara 3 dan 13 adalah 5,7,9,11. Dalam deret geometri 2, -4, 8, -16,... dua rata-rata geometri antara 2 dan -16 adalah -4 dan 8. Dalam deret harmonis $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$ rata-rata antara $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{4}$ adalah $\frac{1}{3}$ dan tiga rata-rata harmonis antara $\frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{6}$ adalah $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$, (Spiegel, 1999).

2.3.6 Deret Kebalikan

Deret kebalikan atau *reciprocals series* adalah sebuah deret yang setiap sukunya terdiri dari kebalikan hasil kali *r* faktor dalam deret aritmatika. Faktor pertama dari penyebut berada dalam deret aritmatika yang sama. Sebanyak *r* faktor berbentuk $a(a + b)(a + 2b) \dots (a + (r - 1)b)$, dengan a sebagai suku kata pertamanya dan b sebagai beda. Kebalikannya menjadi $\frac{1}{a(a+b)(a+2b)\dots(a+(r-1)b)}$.

Jika suku ke-k adalah $\frac{1}{a_k(a_k+b)(a_k+2b)\ldots(a_k+(r-1)b}$, maka faktor pertama dari penyebutnya adalah a_k, dan faktor dikatakan berada dalam barisan aritmatika yang sama, jadi a_k = $a_0 + k$. Kemudian suku ke-k ini menjadi $\frac{1}{(a_0+kb)(a_0+(k+1)b)(a_0+(k+2)b)\ldots(a_0+(k+r-1)b)}$, dan deretnya menjadi

$$\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(a_0+kb)(a_0+(k+1)b)(a_0+(k+2)b)\ldots(a_0+(k+r-1)b)}$$

$$= \sum_{k\geq 0} \prod_{j=0}^{r-1} \frac{1}{a_0+(k+j)b}$$

2.4 Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah suatu konsep dalam ilmu matematika yang digunakan untuk pencacahan dan pengukuran. Salah satu contohnya adalah bilangan bulat. Bilangan bulat sendiri ialah himpunan bilangan yang mencakup bilangan cacah, bilangan asli, bilangan nol, bilangan satu, bilangan prima, bilangan komposit dan bilangan negatif atau himpunan bilangan yang mencakup seluruh bilangan, kecuali bilangan imajiner, irasional dan pecahan. Bilangan bulat juga adalah himpunan bilangan yang terdiri dari bilangan bulat negatif, nol, dan bilangan bulat positif, (Drajat & Ismandi, 2008).

Salah satu bentuk bilangan bulat adalah bilangan bulat positif. Bilangan bulat positif adalah bilangan yang dimulai dari bilangan satu ke atas dan seterusnya. Contoh bilangan bulat positif: {1,2,3,4,5,...}.

2.5 Fungsi Zeta Riemman

Menurut Berndhard Riemman (1859) bahwa Fungsi zeta Riemann ζ(S) hanya memiliki akar bilangan genap negatif dan bilangan kompleks dengan bagian real ½. Fungsi Zeta Riemann adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\zeta(S) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^S}$$

Yang pada awalnya terdefinisi untuk $S \in \mathbb{C}$ dengan Re(S) > 1, diperluas ke seluruh bidang kompleks melalui kontinuasi analitik.

2.6 Deret Telescoping

Deret *telescoping* adalah deret dimana setiap suku dihilangkan dengan suku sebelum atau sesudahnya. Jadi jumlah parsialnya hanya memiliki bilangan tetap dari suku-suku yang telah dihilangkan. Metode mengubah deret yang memiliki suku-suku berbentuk fungsi rasional menjadi deret *telescoping* yaitu di transformasi ke bentuk fungsi rasional dengan metode pecahan parsial. Misalnya, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$ memiliki suku deret ke-n seperti: $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1}$ lalu didapatkan persamaan 1 = A (n + 1) + Bn. Dipecahkan untuk A dan B diperoleh: $a_n = 1/\mathrm{n} - 1/(\mathrm{n}+1)$. Setelah itu atur ketentuan n jumlah parsial dalam bentuk $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Kemudian ditemukan batas barisan jumlah parsial S_n untuk menemukan penjumlahan dari deret *telescoping* tak terhingga sebagai S = $\lim_{n\to\infty} S_n$. Dalam kasus contoh ini diperoleh, (Potucek, 2016):

$$S_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Jadi diperoleh $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$

BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2022/2023 di jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini antara lain:

1. Menghitung jumlah dari deret kebalikan dari polinomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda.
2. Menentukan jumlah *s*(a,a) dari deret

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq a}}^{\infty} \frac{1}{(k-a)^2}$$

3. Memeriksa bahwa jumlah $s(a,a)$ apabila menggunakan rumus yang diperoleh mendapatkan hasil yang sama.

4. Menentukan jumlah $s(a, a)$ menggunakan bentuk umum bilangan harmonik $H_{a-1,2}$ dari orde $a - 1$ dengan rumus singkat dengan nilai bilangan harmonik diperumum $H_{a-1,2}$

$$s(a, a) = \frac{\pi}{2} + H_{a-1,2}$$

BAB V
KESIMPULAN

Pada penelitian ini telah dikaji formula jumlah deret kebalikan dari polinomial kuadrat dengan akar bilangan bulat positif ganda bentuk $\sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{\infty}\frac{1}{(k-a)^2}$ dengan mengaitkannya pada deret harmonik yang diperumum. Hasil diperoleh menunjukkan bahwa jumlah deret tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$S(a,a)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq a}}^{\infty}\frac{1}{(k-a)^2}=\zeta(2)+H_{a-1,2}$$

Dalam hal ini, $\zeta(2)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ yang konvergen ke $\frac{\pi^2}{6}$ dari $H_{a-1,2}$ diperoleh dengan menggunakan deret harmonik yang diperumum.

DAFTAR PUSTAKA

Afidah, & Khairunnisa. (2014). *Matematika Dasar*. Rajawali Pers.

Alabdulmohsin, I. M. (2017). Fractional parts and their relations to the values of the Riemann Zeta Function. *Arabian Journal Of Mathematics, Vol. 7*(No. 1), Hal 1-8.

Anwar, H. (2017). Hasil Belajar Barisan dan Deret Aritmatika Melalui Pembelajaran Skrip Kooperati. *Jurnal Penelitian Tindakan Dan Pendidikan, Vol. 3*(No. 2), Hal 113-122.

Ayres, F., & Schmidt, P. A. (2004). *Matematika Universitas* (Edisi Keti). Erlangga.

Drajat, & Ismandi, J. (2008). *Kumpulan Rumus dan Cerita Matematika*. PT Mizan Bunaya Kreativa.

Harris, J. W., & Stocker, H. (1998). Handbook of Mathematics and Computational Science. *Springer Science & Business Media*.

Potucek, R. (2016). The sum of the series of reciprocals of the quadratic polynomials with double positive integer root. *Mathematic in Education, Research and Application, Vol. 2*.

Purcell, E. J. (1999). *Kalkulus dan Geometri Analitik* (Jilid 1). Erlangga.

Spiegel, M. (1999). *Matematika Dasar*. Erlangga.

Varberg, D., Purcell, E. J., & Ridgon, S. E. (2006). *Calculus* (9th Editio). Pearson.

Weisstein, E. W. (2016). *Harmonic Number*. From MathWorld – A Wolfram Web Resource.