BILANGAN KROMATIK LOKASI SUBDIVISI GRAF BARBEL *SPLIT* SIKLUS

(Tesis)

Oleh

WAHYU HIDAYAT TULLAH

1927031007

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI SUBDIVISI GRAF BARBEL *SPLIT* SIKLUS

Oleh

WAHYU HIDAYAT TULLAH

Graf barbel *split* siklus diperoleh dengan membuat salinan dari graf *split* siklus yang dihubungkan oleh sebuah jembatan, dinotasikan dengan $B_{spl(C_n)}$, $n \geq 3$. Subdivisi graf barbel *split* siklus adalah graf yang diperoleh dengan menyisipkan beberapa titik di jembatan pada graf barbel *split* siklus, dinotasikan dengan $B_{spl(C_n^{*s})}$ dengan $n \geq 3$ dan $s = 1,2, \dots, m$. Bilangan kromatik lokasi dari subdivisi graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n^{*s})}$ dengan $s = 1,2, \dots, m$ adalah 5 untuk $n \geq 3$ ganjil, dan 6 untuk $n \geq 4$ genap.

Kata kunci: Graf barbel *split* siklus, subdivisi graf barbel *split* siklus, bilangan kromatik lokasi.

ABSTRACT

LOCATING CHROMATIC NUMBER FOR SUBDIVISION OF BARBELL SPLIT CYCLE GRAPHS

By

WAHYU HIDAYAT TULLAH

Barbell split cycle graph is obtained by making a copy of a split cycle graph connected by a bridge, denoted by $B_{spl(C_n)}$, $n \geq 3$. Subdivision of barbell split cycle graph is a graph obtained by inserting several vertices on the bridge in a barbell split cycle graph, denoted by $B_{spl(C_n^{*s})}$ with $n \geq 3$ and $s = 1,2,\ldots,m$. The locating chromatic number for the subdivision of barbell split cycle graphs, $B_{spl(C_n^{*s})}$ with $s = 1,2,\ldots,m$ is 5 for odd $n \geq 3$, and 6 for even $n \geq 4$.

Keywords: split cycle graph, barbell split cycle graph, subdivision of barbell split cycle graph, locating chromatic number.

BILANGAN KROMATIK LOKASI SUBDIVISI GRAF BARBEL *SPLIT* SIKLUS

Oleh

WAHYU HIDAYAT TULLAH

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada

Program Pascasarjana Magister Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

PROGRAM PASCASARJANA MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Tesis : **BILANGAN KROMATIK LOKASI SUBDIVISI GRAF BARBEL *SPLIT* SIKLUS**

Nama Mahasiswa : ***Wahyu Hidayat Tullah***

Nomor Pokok Mahasiswa : **1927031007**

Program Studi : **Magister Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.**
NIP 19760411 200012 2 001	NIP 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ____________

   Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ____________

   Penguji
   Bukan Pembimbing a. : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ____________

   b. : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ____________

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

   Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T.
   NIP. 19740705 200003 1 001

3. Direktur Program Pascasarjana

   Prof. Dr. Ahmad Saudi Samosir, S.T., M.T.
   NIP. 19710415 199803 1 005

Tanggal Lulus Ujian Tesis: **10 Januari 2023**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: Wahyu Hidayat Tullah
Nomor Pokok Mahasiswa	: 1927031007
Program Studi	: Magister Matematika
Jurusan	: Matematika

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul "BILANGAN KROMATIK LOKASI SUBDIVISI GRAF BARBEL *SPLIT* SIKLUS " adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua hasil tulisan dalam tesis ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 Januari 2023

Penulis

[redacted] 10000 METERAI TEMPEL E8AKX216126844

Wahyu Hidayat Tullah

NPM. 1927031007

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Wahyu Hidayat Tullah, lahir di Yukum Jaya pada 3 April 1997. Penulis merupakan anak pertama dari 2 bersaudara, pasangan bapak Tomi Setiawan dan ibu Iswahyuni.

Penulis menempuh pendidikan dasar di SD Negeri 4 Yukum Jaya dari tahun 2003-2009. Kemudian melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 1 Terbanggi Besar dan lulus pada tahun 2011. Kemudian menempuh pendidikan di SMA Negeri 1 Terbanggi Besar dan lulus pada tahun 2014. Pada tahun 2014, penulis diterima sebagai mahasiswa di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Penulis lulus dari program studi Sarjana Matematika pada tahun 2018 dengan predikat Pujian. Penulis diterima sebagai mahasiswa program studi Magister Matematika ditahun 2019.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan. Maka apabila kamu telah selesai (dari suatu urusan), kerjakanlah dengan sungguh-sungguh (urusan yang lainnya). Dan hanya kepada Tuhanmu lah hendaknya kamu berharap."

(QS. Al-Insyirah : 6-8)

"*Hai orang-orang yang beriman, jadikanlah sabar dan shalat sebagai penolongmu, sesungguhnya Allah bersama orang-orang yang sabar*".

(QS. Al-Baqarah : 153)

"Dan janganlah kamu berputus asa daripada rahmat Allah, Sesungguhnya tiada berputus asa daripada rahmat Allah kecuali orang - orang yang kufur"

(QS. Yusuf : 87)

"Barang siapa yang menempuh jalan untuk menuntut ilmu, niscaya Allah subhanahu wata'ala akan memudahkan baginya jalan menuju surga."

(H.R. Muslim)

PERSEMBAHAN

Karyaku yang sederhana ini kupersembahkan kepada:

Istriku Siti Ulfa Nabila

Terima kasih kepada Wanita tercantikku yang selalu percaya padaku, berjuang bersamaku, memberikan warna dan semangat dalam hidupku, serta lantunan do'a, semangat, dan kasih sayang yang tiada henti.

Bapak dan Ibu

Terima kasih kepada Bapak dan Ibu yang selalu mendo'akan kesuksesanku, memberi semangat, nasihat, dukungan serta kasih sayang yang tiada henti.

Adikku

Terima kasih kepada adik - adikku yang selalu memberikan semangat dan keceriaan dalam hidupku

Almamater dan Negeriku

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT yang telah memberikan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis dengan judul "Bilangan Kromatik Lokasi Subdivisi Graf Barbel *Split* Siklus" dengan baik.

Penulis menyadari bahwa tesis ini dapat terselesaikan dengan baik karena dukungan, bimbingan, saran, serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Asmiati, S.Si. M.Si., selaku dosen pembimbing satu yang telah memberikan bimbingan, pengarahan, dan saran kepada penulis dalam mengerjakan tesis.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D., selaku pembimbing dua dan pembimbing akademik yang telah memberikan saran serta pembelajaran yang sangat bermanfaat dalam menyelesaikan tesis.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., selaku pembahas dan penguji tesis yang telah memberikan evaluasi, arahan, dan saran demi perbaikan tesis.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku pembahas dan penguji tesis yang telah memberikan evaluasi, arahan, dan saran demi perbaikan tesis.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh dosen program studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Bapak dan Ibu tercinta yang selalu mendo’akan kesuksesan dunia dan akhirat.
9. Teman-teman mahasiswa Magister Matematika angkatan 2019.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan tesis ini masih jauh dari sempurna, sehingga informasi tambahan, saran, dan kritik untuk pengembangan lebih lanjut sangat diharapkan. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 10 Januari 2023

Penulis

Wahyu Hidayat Tullah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

BILANGAN KROMATIK LOKASI SUBDIVISI GRAF BARBEL *SPLIT* SIKLUS

(Tesis)

Oleh

WAHYU HIDAYAT TULLAH

1927031007

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Pada abad ke-18 di tahun 1736, Leonard Euler memperkenalkan dasar pengembangan teori graf. Pada saat itu di kota *Konigsberg* (Rusia) terdapat suatu sungai yang membelah kota menjadi empat daratan terpisah dan dihubungkan oleh tujuh jembatan. Warga kota tersebut ingin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Euler membuktikan dengan suatu bentuk representasi graf, bahwa tidak mungkin untuk melewati jembatan tepat satu kali dan kembali lagi ke tempat awal. Bentuk representasi itu kemudian berkembang menjadi teori graf yang saat ini dikenal.

Salah satu konsep teori graf yang umum dikenal adalah konsep pewarnaan graf. Pewarnaan graf bertujuan memberikan warna berbeda untuk setiap dua titik bertetangga pada graf. Pewarnaan graf dapat diterapkan untuk menyelesaikan masalah penjadwalan, pewarnaan peta, penugasan, dan lain sebagainya. Pewarnaan graf memiliki berbagai aplikasi dalam sistem keamanan informasi dan penjadwalan.

Pewarnaan graf akan memiliki kode warna yang berbeda untuk setiap titik yang berbeda pada suatu graf, yang disebut sebagai pewarnaan lokasi graf. Minimum warna yang digunakan dalam pewarnaan lokasi graf disebut bilangan kromatik lokasi graf, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Bilangan kromatik lokasi graf pertama kali dikaji oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi graf merupakan topik baru yang menarik untuk dipelajari karena belum ada teorema umum untuk menentukan bilangan kromatik lokasi sembarang graf secara umum.

Pada tahun 2003, Chartrand dkk. telah berhasil mengkonstruksi graf pohon dengan n titik, $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi bervariasi dari 3 sampai n, kecuali untuk $(n-1)$. Pada tahun 2011, Asmiati dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang dan bilangan kromatik lokasi dari graf kembang api $F_{n,k}$, selanjutnya Asmiati dan Baskoro (2012) telah mengkarakteristik semua graf yang memuat siklus dengan bilangan kromatik lokasi tiga. Pada tahun 2014, Behtoei dan Omoomi berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari gabungan graf lintasan, siklus dan graf lengkap. Behtoei dan Omoomi (2016) mengkaji bilangan kromatik lokasi hasil kali kartesian dari lintasan dan graf lengkap. Pada tahun 2017, Asmiati mengkaji bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Penelitian tentang bilangan kromatik lokasi suatu graf terus berkembang. Putri dkk., (2018) berhasil memperluas mengenai bilangan kromatik lokasi yang diaplikasikan pada graf tak terhubung dengan graf lintasan dan siklus sebagai komponen-komponennya. Muthuramakrishnan dan Jayaraman (2018), berhasil menentukan total pewarnaan graf *split* dari lintasan, siklus dan bintang. Parameswari dan Rajeswari (2018) mendapatkan total pelabelan *magic cordial* graf *split* dari siklus roda dan kipas. Tahun 2018 Ganesan dkk., membahas pelabelan *prime* graf *split* lintasan. Ghanem dkk., (2019) berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi kuasa dari lintasan dan siklus. Prawinasti dkk. (2021), berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi untuk graf *split* siklus. Berdasarkan hasil penelitian tersebut, penelitian akan dilanjutkan dengan melihat pengaruh dari penambahan subdivisi pada salah satu jembatan graf barbel *split* siklus terhadap bilangan kromatik lokasi yang dihasilkan.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n^{*s})}$ untuk titik $n \geq 3$ dan banyak titik subdivisi $s = 1,2,3 \dots, m$.
2. mengetahui dampak menambahkan s titik pada jembatan graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ terhadap banyaknya warna yang digunakan pada bilangan kromatik lokasi.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. memberikan pemahaman dan wawasan mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya subdivisi graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n^{*s})}$.
2. mengetahui dampak penambahan subdivisi pada graf barbel *split* siklus.

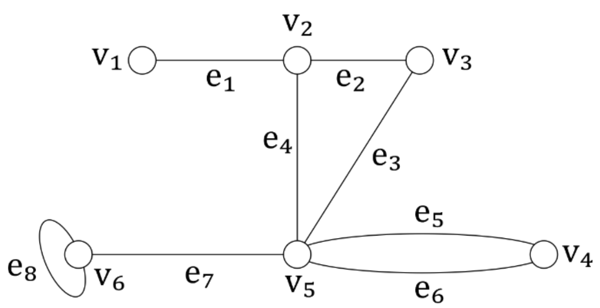
3. memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam bidang teori graf terutama tentang bilangan kromatik lokasi dari subdivisi graf barbel *split* siklus.
4. sebagai bahan kajian untuk referensi penelitian selanjutnya mengenai bilangan kromatik lokasi dari subdivisi graf barbel *split* siklus.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan di berikan penjabaran materi tentang teori dasar, definisi, serta istilah-istilah yang berhubungan dengan penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf dan Kelas-Kelas Graf

Teori graf diperkenalkan pertama kali dalam pembuktian kemungkinan melewati dalam sekali jalan empat daerah yang dihubungkan dengan tujuh jembatan di atas sungai Pregel di Konigsberg, Rusia oleh Leonhard Euler tahun 1736. Konsep dasar graf yang diambil dari Deo N. (1989) menyatakan bahwa graf merupakan kumpulan titik dan sisi, dinotasikan dengan $G = (V, E)$, dengan $V \neq \emptyset$ menyatakan himpunan titik $\{v_1, v_2, v_3, \dots , v_n\}$ dan E menyatakan himpunan sisi $\{e_1, e_2, e_3, \dots , e_n\}$ yang merupakan pasangan tak terurut dari titik-titik di v. Banyaknya titik pada graf G disebut orde dari graf G.



Gambar 1 Graf G dengan 6 titik dan 8 sisi.

Graf $G = (V, E)$ pada Gambar 1 dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$. Dua titik pada graf G dikatakan bertetangga bila keduanya terhubung dengan suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel dengan suatu titik v, jika titik v merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Misalkan, jika titik v_1 dan titik v_2 dihubungkan dengan suatu sisi e_1, maka titik v_1 dan titik v_2 menempel pada sisi e_1 begitu juga dengan sisi e_1 menempel pada titik v_1 dan titik v_2 sehingga titik v_1 bertetangga dengan titik v_2. Pada Gambar 1 dapat diambil contoh, titik v_1 bertetangga dengan titik v_2, sisi e_1 menempel dengan titik v_1 dan titik v_2.

Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v, dinotasikan dengan $d(v)$. Jika setiap titik mempunyai derajat yang sama disebut graf regular. Daun adalah titik yang berderajat satu. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak memiliki sisi paralel dan *loop* disebut graf sederhana. Graf G pada Gambar 1, bukan termasuk graf sederhana karena terdapat *loop* pada titik v_6 yaitu pada sisi e_8 dan terdapat sisi paralel pada titik v_4 dan v_5. Derajat masing-masing titik pada graf G adalah $d(v_1) = 1, d(v_2) = 3, d(v_3) = 2, d(v_4) = 2, d(v_5) = 5, d(v_6) = 3$ dan titik v_1 memiliki derajat 1 sehingga dikatakan sebagai daun. Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi, dimulai dan diakhiri dengan titik, sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada suatu graf. Lintasan (*path*) adalah jalan yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda dimana titik-titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf.

Dua buah titik dalam graf, titik u dan titik v dikatakan terhubung jika terdapat lintasan dari u ke v. Jika setiap titik di dalam graf terhubung, maka graf tersebut disebut sebagai graf terhubung (Siang, 2002).

Lemma 2.1 (Deo, 1989)

Misalkan $G(V, E)$ adalah graf terhubung. Jumlah derajat semua titik pada graf G adalah genap, yaitu dua kali banyak sisi pada graf tersebut, dapat dinyatakan dengan

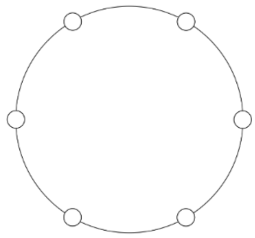
$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2|E(G)|$$

Sebagai contoh pada Gambar 1 yaitu jumlah derajat seluruh titik pada graf tersebut adalah $d(v_1) + d(v_2) + d(v_3) + d(v_4) + d(v_5) + d(v_6) = 1 + 3 + 2 + 2 + 5 + 3 = 16$ sama dengan dua kali banyaknya sisi.

Selanjutnya akan diberikan definisi graf siklus, graf *split* siklus, graf barbel *split* siklus dan subdivisi graf barbel *split* siklus.

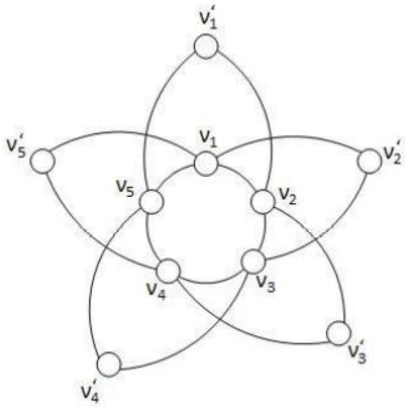
Siklus adalah lintasan tertutup, yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Siklus dibedakan menjadi dua macam, yaitu siklus ganjil dan siklus genap. Siklus ganjil adalah siklus yang memuat banyaknya titik ganjil, sedangkan siklus genap adalah siklus yang memuat banyaknya titik genap. Pada Gambar 1, contoh lintasan adalah $v_1 - e_1 - v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_5 - e_7 - v_6$ dan contoh siklus ganjil adalah $v_2 - e_2 - v_3 - e_3 - v_5 - e_4 - v_2$.

Menurut Deo (1989) graf siklus merupakan graf regular yang masing-masing titiknya berderajat dua, yang dinotasikan dengan C_n dengan n menyatakan orde dari graf.



Gambar 2 Graf siklus dengan orde 6 (C_6)

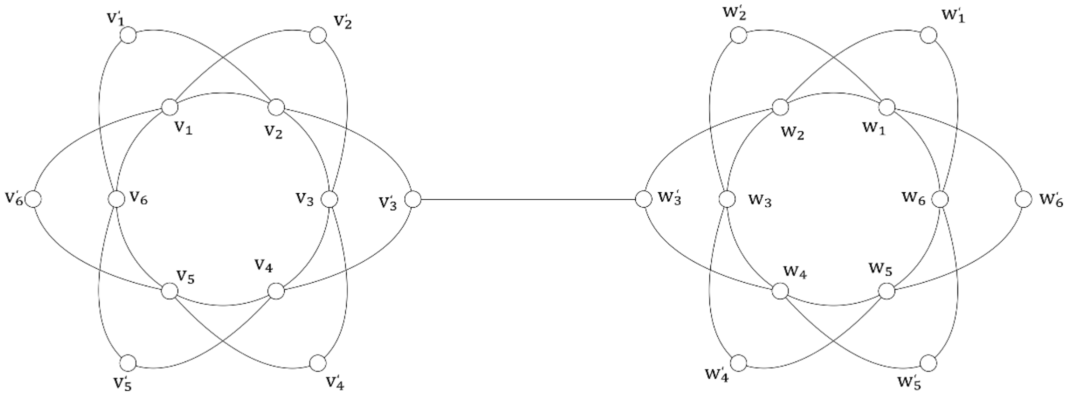
Graf split siklus adalah graf yang diperoleh dengan menambahkan pada setiap titik v pada graf siklus C_n satu titik baru v', sedemikian sehingga v' bertetangga dengan setiap titik yang bertetangga dengan v di C_n, dinotasikan dengan $spl(C_n)$ (Sugeng, dkk., 2014).



Gambar 3 Graf $spl\ (C_5)$.

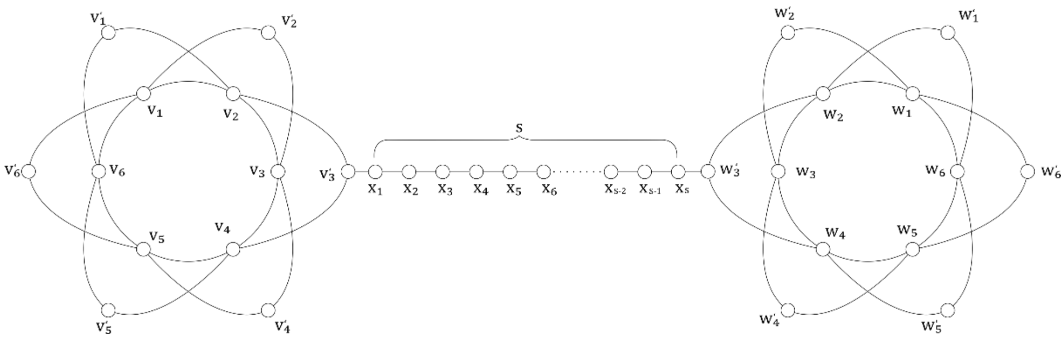
Graf barbel adalah graf sederhana yang dibentuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan dari graf lengkap yang dihubungkan dengan sebuah sisi (Ihwan dkk., 2014). Graf barbel *split* siklus adalah barbel yang diperoleh dengan membuat salinan dari graf *split* siklus dan dihubungkan oleh sebuah jembatan pada titik

$\left(v'_{\frac{n+1}{2}}, w'_{\frac{n+1}{2}}\right)$ untuk n ganjil dan pada titik $\left(v'_{\frac{n}{2}}, w'_{\frac{n}{2}}\right)$ untuk n genap, yang dinotasikan dengan $B_{spl(Cn)}$.



Gambar 4 Graf $B_{spl(C_6)}$.

Graf subdivisi adalah graf yang diperoleh dari graf *G* dengan memasukkan titik tambahan ke beberapa sisi di graf *G*. Subdivisi graf barbell *split* siklus adalah penambahan subdivisi sebanyak $s = 1,2,3, \ldots, m$ titik pada jembatan dari graf barbel *split* siklus, dinotasikan dengan $B_{spl(C_n^{*s})}$.



Gambar 5 Graf $B_{spl(C_n^{*s})}$

Pada Gambar 5, graf tersebut telah disubdivisi sebanyak s titik dimana $s = 1,2,3, \ldots, m$ pada jembatan/sisi yang menghubungkan dua graf lengkap $spl(C_n)$, yang dinotasikan dengan $B_{spl(C_n^{*s})}$ (Mirajkar, Doddamani, dan Priyanka, 2016).

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

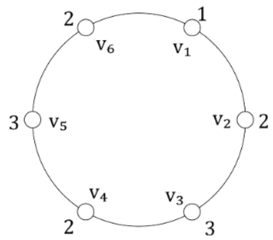
Definisi dari bilangan kromatik lokasi graf menurut Chartrand dkk., pada tahun 2002 yaitu misalkan c suatu pewarnaan di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan titik v yang bertetangga di graf G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, C_3 \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna dinotasikan $c_\Pi(v_i)$ yaitu k-pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_1) = min\{d(v, x)|x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$, jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G, banyak warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi graf, yang dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Berikut ini adalah beberapa teorema yang digunakan dalam bilangan kromatik lokasi graf.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misal y adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan $N(v)$ merupakan himpunan dari tetangga pada titik v. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda pada graf G. Sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika u dan v adalah titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:

Misalkan y adalah suatu pewarnaan lokasi graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, C_3 \ldots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i . Untuk suatu u, $v \in$ V(G), andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan titik v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $d(u, C_j) \neq d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga y bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c_\Pi(u) \neq c_\Pi(v)$.



Gambar 6 Minimum pewarnaan lokasi dari graf C_6.

Proposisi 2.1

Untuk setiap graf terhubung G dengan orde $n \geq 3$.

$$3 \leq \chi_L(G) \leq n$$

Teorema 2.2 (Chartrand, dkk., 2002)

Pada graf siklus C_n, misalkan $n \geq 3$, maka

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3, & \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 4, & \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti : Pembuktian dibagi menjadi 2 kasus

Kasus 1

Jika $n \geq 3$ adalah ganjil. Misal himpunan titik graf siklus $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ ditetapkan warna 1 untuk v_1, warna 2 untuk v_i jika i adalah genap, dan warna 3 untuk v_i, jika $i \geq 3$ dan i ganjil. Berdasarkan proposisi 2.1

yaitu hanya perlu ditunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk memastikan $\chi_L(C_n) = 3$. Pertimbangkan dua subkasus berikut:

Subkasus 1.1

Jika $n \geq 4k + 1$, dimana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k, c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1,0,1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k, c_\Pi(v_{2i}) = (2k + 2 - 2i, 0,1)$. Juga, untuk $1 \leq i \leq k, c_\Pi(v_{2i+1}) = (2i, 1,0)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k, c_\Pi(v_{2i+1}) = (2k - 2i + 1,1,0)$. Karena vektor-vektor, $c_\Pi(v_i)$ berbeda. Sehingga pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi, sehingga $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Subkasus 1.2

Jika $n = 4k + 3$, dimana $k \geq 0$. Membuktikan bahwa $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$ langkah pembuktian sama seperti pada Subkasus 1.1.

Kasus 2

Jika $n \geq 4$ adalah genap. Misalkan himpunan titik graf siklus $V(C_n) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$. Diberi warna 1 untuk v_1, warna 2 untuk v_i, warna 3 untuk v_i, jika $i \geq 3, i$ ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $i \geq 4$ genap. Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n dengan demikian memverifikasi bahwa $\chi_L(C_n) \leq 4$.

Subkasus 2.1

Jika $n = 4k$, dimana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (2i, 2i - 1,0,1)$ dimana untuk $k + 1 \leq i \leq 2k - 1$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (4k - 2i, 4k - 2i + 1,0,1)$.

Untuk $2 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i-1, 2i-2, 1, 0)$ dimana untuk $k+1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (4k+1-2i, 4k+2-2i, 1, 0)$, karena $c_\Pi(v_i)$ berbeda, maka pewarnaan ini adalah pewarnaan lokasi.

Subkasus 2.2

Jika $n = 4k+2$, dimana $k \geq 1$. Pembuktian pewarnaan tersebut adalah suatu pewarnaan lokasi sama seperti pembuktian Subkasus 2.1. Selanjutnya hanya perlu membuktikan bahwa $\chi_L(C_n) \geq 4$, jika n adalah genap. Asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n memerlukan 3 warna, misalkan 1,2,3 untuk beberapa $n \geq 4$. Setidaknya terdapat paling sedikit satu warna, misalkan 2 digunakan untuk mewarnai sejumlah bilangan genap t titik dari graf C_n, dimana $2 \leq t \leq \frac{n}{2}$. Seperti proses siklus pada C_n. Dimulai dengan v_1, misalkan $v_{i_1}, v_{i_2}, v_{i_3}, \dots, v_{i_t}$ adalah titik-titik dari graf C_n yang terwarnai dengan 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga. Hal ini sejalan dengan untuk setiap bilangan bulat j dengan $1 \leq j \leq t$, dengan selang $I_j = v_{i_j+1}, v_{i_j+2}, v_{i_j+3}, \dots, v_{i_j+1-1}$ (subskrip dihitung modulo n) tidak kosong.

Pertama, klaim bahwa tidak ada selang yang memiliki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih, asumsikan secara kontradiksi, bahwa beberapa selang I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih. Tanpa menghilangkan keumumannya, asumsikan bahwa v_{i_j+1} dan v_{i_j+1-1} diberi warna 1. Meskipun demikian, $c_\Pi\left(v_{i_j+1}\right) = c_\Pi(v_{i_{j+1}-1} = (0,1,1)$ yang mana itu tidak mungkin.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Sebaliknya, terdapat selang-selang yang memuat bilangan genap di titik-titiknya. Karena C_{2k} memiliki susunan genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 selang berbeda memuat bilangan genap di titik-titiknya. Asumsikan, tanpa kehilangan keumumannya, bahwa v_{i_j+1} diberi pewarnaan 1. Tepat hanya 1 dari v_{i_k+1} dan $v_{i_{k+1}-1}$ diberi warna 1, maka $c_\pi\left(v_{i_j+1}\right) = c_\pi\left(v_{i_k+1}\right) = (0,1,1)$, kontradiksi.

Akibatnya, semua selang $t = \frac{n}{2}$ memuat tepat 1 titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat $i_j \left(1 \leq j \leq \frac{n}{2}\right)$, sedemikian sehingga v_{i_j-1} dan v_{i_j+1} diberi warna secara berbeda, misalkan 1 dan 3 secara berturut-turut. Terdapat bilangan bulat $i_k > i_j$ sedemikian sehingga v_{i_j-1} diberi warna 3 dan v_{i_k-1} diberi warna 1. Meskipun demikian maka $c_\Pi\left(v_{i_j}\right) = c_\Pi\left(v_{i_k}\right) = (1,0,1)$, menghasilkan hasil akhir yang kontradiksi. Oleh karena itu, $\chi_L(C_n) = 4$ jika n adalah genap.

Teorema 2.3 (Kasandra, 2021)

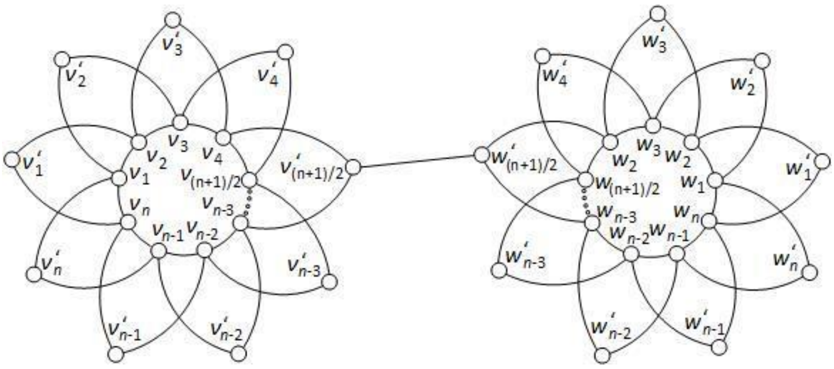
Misal $B_{spl(C_n)}$ adalah graf barbel *split* siklus, dengan $n \geq 3$. Maka bilangan kromatik lokasi graf barbel *split* siklus $\left(B_{spl(C_n)}\right)$

$$\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) = \begin{cases} 5, \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 6, \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti

Misalkan $B_{spl(C_n)}$, dengan $n \geq 3$ adalah graf barbel *split* siklus dengan himpunan titik $V(B_{spl(C_n)}) = \{v_i, w_i, v_i', w_i'; [1, n]\}$ dan himpunan sisi $E(B_{spl(C_n)}) = \{v_i v_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_i v_{i+1}'; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_i' v_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{v_n v_1\} \cup \{v_n v_1'\} \cup \{v_n' v_1\} \cup \{w_i w_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{w_i w_{i+1}'; i \in [1, n-1]\} \cup \{w_i' w_{i+1}; i \in [1, n-1]\} \cup \{w_n w_1\} \cup \{w_n w_1'\} \cup \{w_n' w_1\} \cup \left\{v_{\frac{n+1}{2}}' w_{\frac{n+1}{2}}'\right\}$ untuk n ganjil $\cup \left\{v_{\frac{n}{2}}' w_{\frac{n}{2}}'\right\}$ untuk n genap. Terbagi menjadi dua kasus.

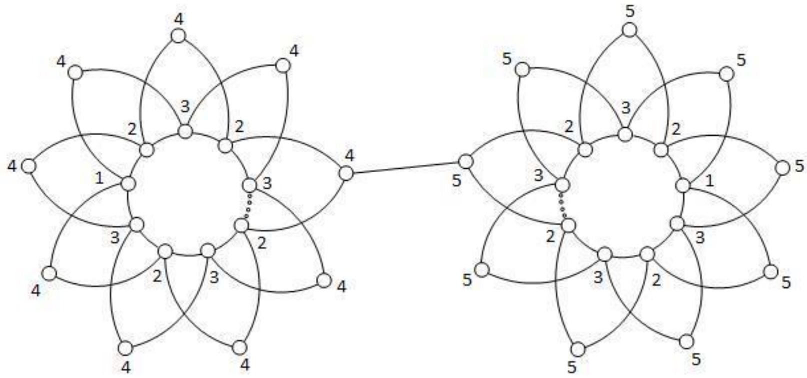
Kasus 1 (n ganjil)



Gambar 7 Graf $B_{spl(C_n)}$ n ganjil

Pertama menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ n ganjil. Karena graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ memuat graf split siklus $spl(C_n)$ n ganjil, sehingga berdasarkan Teorema 2.3 akan memiliki $\chi_L(B_{spl(C_n)}) \geq 4$. Misalkan y pewarnaan titik dengan menggunakan 5 warna, maka pada graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ akan ada kode warna yang sama. Akibatnya, kontradiksi untuk $\chi_L(B_{spl(C_n)}) = 4$, jadi dibutuhkan sekurang-kurangnya 4+1 warna untuk mewarnai graf barbel *split* siklus tersebut. Sehingga $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) \geq 5$ untuk n ganjil.

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel split siklus $B_{spl(C_n)}$ n ganjil. Misalkan y pewarnaan titik dengan menggunakan 5 warna sebagai berikut:



Gambar 8 Minimum pewarnaan lokasi pada graf $B_{spl(C_n)}$ n ganjil

$$\mathrm{c(v_i)} = \mathrm{c(w_i)} = \begin{cases} 1, & \text{untuk } \mathrm{i} = 1 \\ 2, & \text{untuk } \mathrm{i} \geq 2 \text{ genap} \\ 3, & \text{untuk } \mathrm{i} \geq 3 \text{ ganjil} \end{cases}$$

$$c(v_i') = 4, \text{untuk } i = 1,2, \dots, n$$

$$c(w_i') = 5, \text{untuk } i = 1,2, \dots, n$$

Kode warna dari $V\left(B_{spl(C_n)}\right)$ untuk n ganjil seperti berikut:

$$c_\pi(v_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i \leq \dfrac{n+1}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \dfrac{n+1}{2} \\ \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i < \dfrac{n+1}{2} \\ i + 1 - \left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i > \dfrac{n+1}{2} \\ 0, & \begin{array}{l}\text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk i genap} \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk i ganjil}, i \geq 3\end{array} \\ 3, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i = \dfrac{n+1}{2} \\ 1, & \text{ordinat lainnya} \end{cases}$$

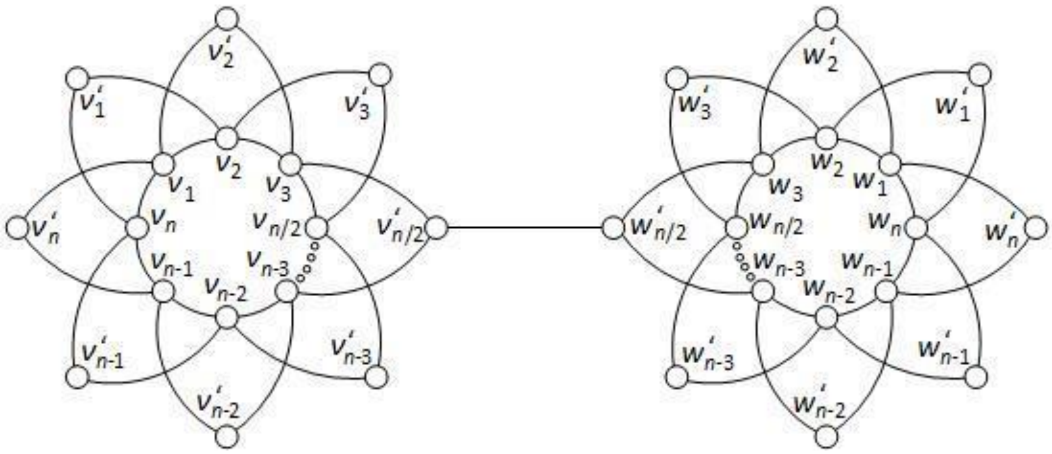
$$c_\pi(v_i') = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } 2 \leq i \leq \dfrac{n+1}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \dfrac{n+1}{2} \\ \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i < \left(\dfrac{n+1}{2}\right) - 1, n \geq 5 \\ i + 1 - \left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i > \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1, n \geq 5 \\ 0, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n \\ 4, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i = \left(\dfrac{n+1}{2}\right) - 1\ dan\ \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1, n \geq 5 \\ 3, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } 3, n = 3 \\ 2, & \begin{array}{l}\text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i = 1 \\ \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \geq 3\end{array} \\ 1, & \text{ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_\pi(w_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i \leq \dfrac{n+1}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \dfrac{n+1}{2} \\ \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i < \dfrac{n+1}{2} \\ i + 1 - \left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \dfrac{n+1}{2} \\ 0, & \begin{array}{l}\text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \geq 3\end{array} \\ 3, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = \dfrac{n+1}{2} \\ 1, & \text{ordinat lainnya} \end{cases}$$

$$c_\pi(w_i') = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } 2 \le i \le \dfrac{n+1}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \dfrac{n+1}{2} \\ \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i < \left(\dfrac{n+1}{2}\right) - 1, n \ge 5 \\ i + 1 - \left(\dfrac{n+1}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1, n \ge 5 \\ 0, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n \\ 4, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = \left(\dfrac{n+1}{2}\right) - 1 \text{ dan } \left(\dfrac{n+1}{2}\right) + 1, n \ge 5 \\ 3, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } 3, n = 3 \\ & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i = 1 \\ 2, & \text{ordinat } ke - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ & \text{ordinat } ke - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3 \\ 1, & \text{ordinat lainnya.} \end{cases}$$

Kode warna dari setiap titik graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ n ganjil tidak memiliki kode warna yang sama, maka y adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) \le 5$. Sehingga, $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) = 5$ untuk n ganjil.

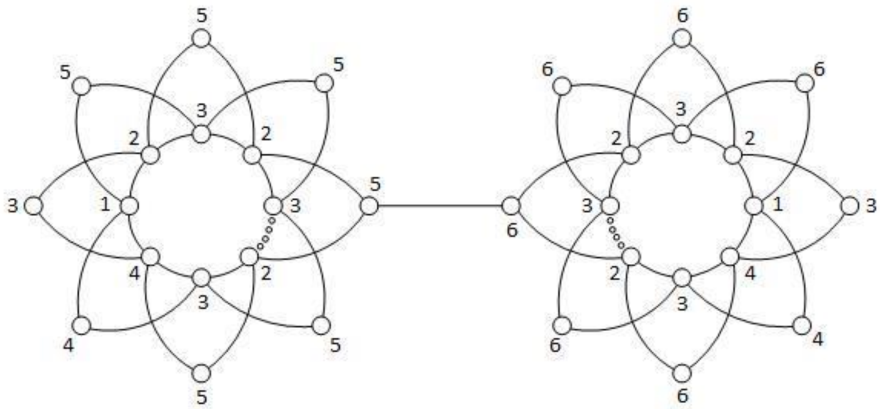
Kasus 2 (n genap)



Gambar 9 Graf $B_{spl(C_n)}$ n genap

Pertama menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ n genap. Karena graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ memuat graf split siklus $spl(C_n)$ n genap, sehingga berdasarkan Teorema 2.3 akan memiliki $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) \geq 5.$ Misalkan y pewarnaan titik dengan menggunakan 5 warna, maka pada graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ akan ada kode warna yang sama. Akibatnya, kontradiksi untuk $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) = 5,$ jadi dibutuhkan sekurang-kurangnya 5+1 warna untuk mewarnai graf barbel *split* siklus tersebut. Sehingga $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) \geq$ 6 untuk n genap. n

Selanjutnya, akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel split siklus $B_{spl(C_n)}$ n genap. Misalkan y pewarnaan titik dengan menggunakan 6 warna sebagai berikut:



Gambar 10 Minimum pewarnaan lokasi pada graf $B_{spl(C_n)}$ n genap

$$c(v_i) = c(w_i) = \begin{cases} 1, & \text{untuk } i = 1 \\ 2, & \text{untuk } i \geq 2 \text{ genap}, 2 \leq i \leq n-2 \\ 3, & \text{untuk } i \geq 3 \text{ ganjil} \\ 4, & \text{untuk } i = n \end{cases}$$

$$c(v_i') = \begin{cases} 3, & \text{untuk } i = 1 \\ 4, & \text{untuk } i = n \\ 5, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

$$c(w_i') = \begin{cases} 3, & \text{untuk } i = 1 \\ 4, & \text{untuk } i = n \\ 6, & \text{untuk } 2 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

Kode warna dari $V\left(B_{spl(C_n)}\right)$ untuk n genap seperti berikut:

$$c_\pi(v_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i \le \dfrac{n}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \dfrac{n}{2} \\ i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i \le \dfrac{n}{2} \\ n-i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \dfrac{n}{2} \\ \left(\dfrac{n}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } i < \dfrac{n}{2} \\ i + 1 - \left(\dfrac{n}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } i > \dfrac{n}{2} \\ 0, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap}, 2 \le i \le n-2 \\ \text{ordinat } ke - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3 \end{array} \\ 3, & \text{ordinat } ke - 6 \text{ untuk } i = \dfrac{n}{2} \\ 2, & \begin{array}{l} \text{ordinat } ke - 2 \text{ untuk } i = n \\ \text{ordinat } ke - 3 \text{ untuk } i = 1 \end{array} \\ 1, & \text{ordinat lainnya} \end{cases}$$

$$c_\pi(v_i') = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } 2 \le i \le \dfrac{n}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \dfrac{n}{2} \\ i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i \le \dfrac{n}{2} \\ n-i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \dfrac{n}{2} \\ \left(\dfrac{n}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } i < \left(\dfrac{n}{2}\right) - 1, n \ge 6 \\ i + 1 - \left(\dfrac{n}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } i > \left(\dfrac{n}{2}\right) + 1 \\ 0, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i = 1 \\ \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } 2 \le i \le n-1 \end{array} \\ 4, & \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } i = \left(\dfrac{n}{2}\right) - 1 \; dan \; \left(\dfrac{n}{2}\right) + 1 \\ 2, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i = 1 \\ \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \text{ordinat } ke - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3 \\ \text{ordinat } ke - 5 \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i = n \end{array} \\ 1, & \text{ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_{\pi}(w_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i \le \frac{n}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i \le \frac{n}{2} \\ n-i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ \left(\frac{n}{2}\right)+1-i, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i < \frac{n}{2} \\ i+1-\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ 0, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap}, 2 \le i \le n-2 \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3 \end{array} \\ 3, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i = \frac{n}{2} \\ 2, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i = n \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i = 1 \end{array} \\ 1, & \text{ordinat lainnya} \end{cases}$$

$$c_{\pi}(w_i') = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } 2 \le i \le \frac{n}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i \le \frac{n}{2} \\ n-i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \frac{n}{2} \\ \left(\frac{n}{2}\right)+1-i, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i < \left(\frac{n}{2}\right)-1, n \ge 6 \\ i+1-\left(\frac{n}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i > \left(\frac{n}{2}\right)+1 \\ 0, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i = 1 \\ \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } 2 \le i \le n-1 \end{array} \\ 4, & \text{ordinat ke} - 6 \text{ untuk } i = \left(\frac{n}{2}\right)-1 \text{ dan } i = \left(\frac{n}{2}\right)+1 \\ 2, & \begin{array}{l} \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i = 1 \\ \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3 \\ \text{ordinat } ke - 6 \text{ untuk } i = 1 \text{ dan } i = n \end{array} \\ 1, & \text{ordinat lainnya.} \end{cases}$$

$$c_\pi(w_i) = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i \le \frac{n+1}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ \left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i < \frac{n+1}{2} \\ i+1-\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ 0, & \begin{array}{l}\text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3\end{array} \\ 3, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = \frac{n+1}{2} \\ 1, & \text{ordinat lainnya} \end{cases}$$

$$c_\pi(w_i') = \begin{cases} i-1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } 2 \le i \le \frac{n+1}{2} \\ n-i+1, & \text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i > \frac{n+1}{2} \\ \left(\frac{n+1}{2}\right) + 1 - i, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i < \left(\frac{n+1}{2}\right) - 1, n \ge 5 \\ i+1-\left(\frac{n+1}{2}\right), & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i > \left(\frac{n+1}{2}\right) + 1, n \ge 5 \\ 0, & \text{ordinat ke} - 5 \text{ untuk } i = 1,2,\dots,n \\ 4, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = \left(\frac{n+1}{2}\right) - 1 \text{ dan } \left(\frac{n+1}{2}\right) + 1, n \ge 5 \\ 3, & \text{ordinat ke} - 4 \text{ untuk } i = 1 \; dan \; 3, n = 3 \\ 2, & \begin{array}{l}\text{ordinat ke} - 1 \text{ untuk } i = 1 \\ \text{ordinat ke} - 2 \text{ untuk } i \text{ genap} \\ \text{ordinat ke} - 3 \text{ untuk } i \text{ ganjil}, i \ge 3\end{array} \\ 1, & \text{ordinat lainnya.} \end{cases}$$

Kode warna dari setiap titik graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ n genap tidak memiliki kode warna yang sama, maka y adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) \le 6$. Sehingga, $\chi_L\left(B_{spl(C_n)}\right) = 6$ untuk n genap.

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini telah dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2022/2023 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Tahap-Tahap Penelitian

Tahap-tahap yang dilakukan pada penelitian ini untuk menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel *split* siklus adalah sebagai berikut:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel *split* siklus, untuk $n \geq 3$:
   a. menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n^{*s})}$ dengan $n \geq 3$ dan banyak titik subdivisi $s \geq 1$. Karena memuat graf barbel *split* siklus maka batas bawah bilangan kromatik lokasinya sekurang-kurangnya menggunakan batas bawah graf barbel *split* siklus. Jika batas atas trivial ini belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaanya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b. menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n^{*s})}$ dengan $n \geq 3$ dan banyak titik subdivisi $s = 1,2,3, \dots .\,, m$. Mengkonstruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur dari grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi;
c. jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi $B_{spl(C_n^{*s})}$ sama, misal y maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L\left(B_{spl\left(C_n^{*s}\right)}\right) = y$;
d. memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika;
e. mengetahui pengaruh dari penambahan subdivisi sebanyak s titik pada graf barbel *split* siklus.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut :

1. Bilangan kromatik lokasi yang dihasilkan dari subdivisi graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n^{*s})}$ sebagai berikut

$$\chi_L\left(B_{spl(C_n^{*s})}\right) = \begin{cases} 5, \text{untuk } s = 1,2,3, \dots, m \text{ dan } n \geq 3 \text{ ganjil} \\ 6, \text{untuk } s = 1,2,3, \dots, m \text{ dan } n \geq 4 \text{ genap} \end{cases}$$

2. Penambahan sebanyak s titik subdivisi dengan $s = 1,2,3, \dots, m$ pada graf barbel *split* siklus $B_{spl(C_n)}$ untuk $n \geq 3$ tetap mempertahankan bilangan kromatik lokasinya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci*. **43(1):**1-8.

Asmiati dan Baskoro, E. T. 2012. Characterizing all Graph Containing Cycle with Locating-Chromatic Number 3. *AIP. Conf. Proc*. **1450**:351.

Asmiati, Yulianti, L., Aldino, Aristoteles dan Junaidi, A. 2019. The locating chromatic number of a disjoint union of some double stars. *Journal of Physics.* **1338**: 1-5.

Asmiati. 2017. Bilangan Kromatik Lokasi n Amalgamasi Bintang yang Dihubungkan oleh Suatu Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **13**(2):115-121.

Behtoei, A., dan Omoomi, B. 2014. The Locating Chromatic Number of The Join of Graphs. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*. **40**(6):1491-1504.

Behtoei, A., dan Omoomi, B. 2016. On The Locating Chromaring Number of Catesian Product of Graphs. *Ars Combinatoria.* **126**:221-235.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2002. The Locating-Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl*. **36**:89-101.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M.A., Slater, P.J., dan Zhang, P. 2003. Graphs of order n with locating-chromatic number $n-1$. *Discrete Mathematics,*. **269(1-3)**:65-79.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Enggineering and Computer Science.* Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Ganesan, Dr. V., Vijayaraj, S., dan Velmurugan, M. 2018. Prime Labeling of Split Graph of Path Graph PN. *International Journal of Applied and Advanced Scientific Research*. **3(2):28-30.**

Ghanem, M., Al-Ezeh, H., dan Dabbour, A. 2019. Locating Chromatic Number of Power of Path and Cycle. *Symmetry*. **11**:389.

Ihwan, M. D., Rahmawati, A., dan Sumargono. 2014. Kajian Bilangan Clique Graf Gear G_n dan Graf Barbel B_n. *Jurnal Gagasan Matematika dan Informatika*. **5(1)**:39-50.

Kasandra, P., 2021. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Barbel dan Graf Disjoint Union dari Graf Split Siklus. Tesis. Universitas Lampung.

Mirajkar, K.G., Doddamani, B.R., dan Priyanka, Y.B. 2016. The Reformulated First Zagreb Index of the Line Graphs of the Subdivision Graph for Class of Graphs. *International Journal of Engineering Sciences and Research Technology*. **5**(10):144-149.

Muthuramakrishnan, D., dan Jayaraman, G. 2018. Total Coloring of Spliting Graph of Path, Cycle and Star Graphs. *Int. J. Math. And Appl.* **6**:659-664.

Parameswari, R., dan Rajeswari, R., 2018. Total Magic Cordial Labeling of Split Graph of Cycle, Wheel and Fan Graph. *International Journal of Mathematics Trans and Technology*. **59**(2):97-100.

Prawinasti, K., *et al*, 2021. The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle. *Journal of Physics.* **1751**

Putri, S. R., Welyyanti, D., dan Narwen. 2018. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Tak Terhubung dengan Graf Lintasan dan Graf Lingkaran sebagai Komponen-komponenya. *Jurnal Matematika UNAND.* **7**(3):159-165.

Siang, J. 2002. Matematika Diskrit dan Aplikasinya dalam Ilmu Komputer. Yogyakarta: Andi Penerbit.

Sugeng, K. A., Slamet, S., dan Silaban, D. R. 2014. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Department Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok.