II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi Turunan

Turunan sebuah fungsi *f* adalah fungsi lain f' (dibaca " *f* aksen ") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$. Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa *f* terdiferensiasikan (terturunkan) di c.

Contoh :

Andaikan $f(x) = 13x - 6$, carilah $f'(4)$

Penyelesaian:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 13$$

$$= 13$$

(Purcell,1987).

2.2 Definisi Integral

Integral adalah sebuah konsep penjumlahan. Kata integral juga dapat digunakan untuk merujuk pada antiturunan. F suatu antiturunan *f* pada selang *I* jika $D_x\ F(x) = f(x)$ pada $I -$ yakni, jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua *x* dalam *I*. (Jika *x* suatu titik ujung *I*, $F'(x)$ hanya perlu turunan sepihak).

Contoh:

Carilah antiturunan umum dari $f(x) = x^2$ pada $(\infty, -\infty)$.

Penyelesaian :

Fungsi $F(x) = x^3$ tidak akan berhasil karena turunannya adalah $3x^2$. Tetapi itu menyarankan $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ yang memenuhi $F'^{(x)} = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$.

Akan tetapi, antiturunan umumnya adalah $\frac{1}{3}x^3 + C$.

(Purcell,1987)

2.3 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat turunan satu (atau beberapa) fungsi yang tak diketahui (Finizio dan Ladas, 1988).

Suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari turunannya. Jika fungsi yang tidak diketahui hanya terdiri dari satu peubah independen disebut persamaan diferensial biasa. Jika fungsi yang dicari dari dua atau lebih peubah independen disebut persamaan diferensial parsial (Bronson dan Costa, 2007).

2.4 Orde dan Derajat Pada Persamaan Diferensial

Suatu persamaan diferensial orde n adalah persamaan bentuk

$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ yang menyatakan hubungan antara perubah bebas *x*, perubah tak bebas *y(x)* dan turunannya yaitu $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Jadi, suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) *n* jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke *n*. Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai degree (derajad) k jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajad k.

Contoh:

1. $x\frac{dy}{dx} + 5y = 6$; orde satu, derajat satu.
2. $\frac{d^3y}{dx^3} + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$; orde tiga, derajat satu.
3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2xy = 6$; orde tiga, derajat dua

Karena turunan tertingginya berderajat dua (Kartono, 1994).

2.5 Persamaan Diferensial Orde Pertama

Bentuk standar dari persamaan diferensial orde pertama dalam fungsi $y(x)$ yang dicari adalah

$$y' = f(x, y) \tag{2.1}$$

Dimana turunan y' muncul hanya di sisi kiri dari (2.1). Walaupun tidak semua persamaan diferensial orde pertama dapat dituliskan dalam bentuk standar melalui penyelesaian y' secara aljabar dan menetapkan $f(x, y)$ sama dengan sisi kanan dari persamaan yang dihasilkan.

Sisi kanan dari (2.1) dapat selalu dituliskan sebagai pembagian dua fungsi lainnya $M(x,y)$ dan $-N(x,y)$. Dengan demikian (2.1) menjadi $dy/dx = M(x,y)/{-N(x,y)}$ yang ekuivalen dengan bentuk diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ (Bronson dan Costa, 2007).

2.6 Persamaan Diferensial Eksak Orde Satu dengan Dua Peubah

Suatu persamaan diferensial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.2}$$

Adalah eksak jika ada suatu fungsi $g(x,y)$ sehingga

$$dg(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Jika $M(x,y)$ dan $N(x,y)$ merupakan fungsi kontinu dan memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada sebuah segiempat bidang x, y maka (2.2) adalah eksak hanya jika $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ (Bronson dan Costa, 2007).

2.7 Faktor Integrasi PD Tidak Eksak Dua Peubah

Jika persamaan diferensial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ bukan eksak pada domain D, tetapi persamaan diferensial

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0 \tag{2.3}$$

Adalah eksak domain D, maka $\mu(x,y)$ merupakan faktor integrasi dari persamaan diferensial (2.2) (Ross, 1984).

2.8 Persamaan Diferensial Eksak Orde Satu dengan Tiga Peubah

Persamaan diferensial orde satu dengan tiga peubah yang berbentuk :

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (2.4)$$

Disebut eksak apabila terdapat fungsi $f(x,y,z)$, sehingga

$$df(x,y,z) = P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0 \qquad (2.5)$$

Dengan berlaku hubungan :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

(Sugiarto dan Mario, 2002).

Teorema

Persamaan diferensial

$$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$$

Merupakan persamaan diferensial eksak tiga peubah.

Misalkan terdapat fungsi-fungsi : Q_1, Q_2, R_1, R_2 sebagai berikut :

- $Q = Q_1 + Q_2$ dengan $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$

  $R = R_1 + R_2$ dengan $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial R_2}{\partial y} = 0$

- $Q_1(x_0, y, z) = 0$

  $$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy = R_1(x_0, y, z)$$

Maka penyelesaian umum persamaan diferensial

$P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ adalah

$$F(x,y,z) = C \text{ dengan } F = \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz \qquad (2.6)$$

Bukti :

Untuk menunjukkan $F(x,y,z) = C$ dengan $F = \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz$

merupakan solusi PD di atas, cukup ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$, $\frac{\partial F}{\partial z} = R$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial x} = P$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P\, dx + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q_2\, dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z} R_2\, dz$$

Karena $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$, maka $\frac{\partial F}{\partial x} = P + 0 + 0 = P$

$\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = P$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} Q_2\, dy + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{z} R_2\, dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} Q\, dx + Q_2 + 0 = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial x}\right) dx + Q_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q_1}{\partial x} dx + Q_2 = Q_1(x,y,z) - Q_1(x_0,y,z) + Q_2$$

$$= Q_1 + Q_2 = Q$$

$\therefore \frac{\partial F}{\partial y} = Q$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial z} = R$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} P\, dx + \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_0}^{y} Q_2\, dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_{z_0}^{z} R_2\, dz$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial x}\, dx + R_1(x_0,y,z) + R_2$$

$$= \int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial x}\right) dx + R_1(x_0,y,z) + R_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R_1}{\partial x} dx + R_1(x_0,y,z) + R_2$$

$$= R_1(x,y,z) - R_1(x_0,y,z) + R_1(x_0,y,z) + R_2$$

$$= R_1(x,y,z) + R_2 = R$$

$$\therefore \ \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

Jadi, $F = \int_{x_0}^{x} P dx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz = C$ merupakan solusi umum dari persamaan diferensial eksak $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$

Catatan :

1. Dalam pemilihan x_0 dan y_0 harus diperhatikan kondisi :

   $Q_1(x_0,y,z) = 0$ dan $\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy = R_1(x_0,y,z)$

   Untuk mempermudah perhitungan, pilih Q_1 dan Q_2 sehingga dapat diambil x_0 dan $y_0 = 0$

2. PD eksak yang diberikan dapat dipisahkan menjadi dua atau lebih PD eksak, dan dikerjakan masing-masing. Penjumlahan dari solusi ini adalah solusi umum dari PD eksak awal.

(Sugiarto dan Mario, 2002).

2.9 Faktor Integrasi PD Tidak Eksak Tiga Peubah

Definisi : Misal PD $P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = 0$ tak eksak. Fungsi $\mu(x,y,z)$ disebut faktor integrasi jika

$\mu(x,y,z)\ [P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz] = 0$ menjadi eksak.

(Sugiarto dan Mario, 2002).

2.10 Metode Untuk Mencari Fungsi $\mu(x, y, z)$

Missal $\mu = e^{\int adx+bdy+cdz}$, dengan

a berupa fungsi konstan atau fungsi *a(x)*

b berupa fungsi konstan atau fungsi *b(y)*, dan

c berupa fungsi konstan atau fungsi *c(z)*

karena persamaan diferensial :

$\mu(x, y, z)\ [P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz] = 0$ adalah eksak,

maka:

- $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ atau $\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$

  $\mu\frac{\partial P}{\partial y} + Pb\mu = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Qa\mu$ atau $\frac{\partial P}{\partial y} + Pb = \frac{\partial Q}{\partial x} + Qa$

  $$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Qa - Pb$$

- $\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}$ atau $\mu\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial \mu}{\partial x}$

  $\mu\frac{\partial P}{\partial z} + Pc\mu = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + Ra\mu$ atau $\frac{\partial P}{\partial z} + Pc = \frac{\partial R}{\partial x} + Ra$

  $$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = Ra - Pc$$

- $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}$ atau $\mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Q\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial R}{\partial y} + R\frac{\partial \mu}{\partial y}$

  $\mu\frac{\partial Q}{\partial z} + Qc\mu = \mu\frac{\partial R}{\partial y} + Rb\mu$ atau $\frac{\partial Q}{\partial z} + Qc = \frac{\partial R}{\partial y} + Rb$

  $$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = Rb - Qc$$

Bagi menjadi tiga kasus, yaitu :

- Kasus 1

  Untuk a=0 dan b=0 $\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

  $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = -Pc$ atau $\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = -Qc$

  $$c(z) = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}}{-Q}$$

  Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int c(z)dz}$ (fungsi dari z)

- Kasus 2

  Untuk b=0 dan c=0 $\rightarrow \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Qa$ atau $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = Ra$

  $$a(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}}{R}$$

  Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int a(x)dx}$ (fungsi dari x)

- Kasus 3

  Untuk a=0 dan c=0 $\rightarrow \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

  $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = -Pb$ atau $\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = Rb$

  $$b(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}}{R}$$

  Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int b(y)dy}$ (fungsi dari y)

(Sugiarto dan Mario, 2002).

2.11 Persamaan Diferensial Eksak Orde Satu dengan Empat Peubah

Persamaan diferensial orde satu dengan empat peubah yang berbentuk :

$$P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt = 0 \qquad (2.7)$$

Disebut eksak apabila terdapat fungsi $f(x,y,z,t)$, sehingga

$$df(x,y,z,t) = P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt = 0 \qquad (2.8)$$

Dengan berlaku hubungan :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial z}$$

(Herlani, 2010).

Teorema

Persamaan diferensial

$$P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt = 0$$

Merupakan persamaan diferensial eksak empat peubah.

Misalkan terdapat fungsi-fungsi : $Q_1, Q_2, R_1, R_2, S_1, S_2$ sebagai berikut :

- $Q = Q_1 + Q_2$ dengan $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$

  $R = R_1 + R_2$ dengan $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial R_2}{\partial y} = 0$

  $S = S_1 + S_2$ dengan $\frac{\partial S_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial S_2}{\partial y} = 0$dan $\frac{\partial S_2}{\partial z} = 0$

- $Q_1(x_0, y, z, t) = 0$

  $$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial z} dy = R_1(x_0, y, z, t)$$

  $$\int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q_2}{\partial t} dy = S_1(x_0, y, z, t)$$

Maka penyelesaian umum persamaan diferensial

$P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt = 0$ adalah

$F(x,y,z,t) = C$ dengan $F = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz + \int_{t_0}^{t} S_2 dt$ (2.9)

Bukti : untuk menunjukkan

$F(x,y,z,t) = C$ dengan $F = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz + \int_{t_0}^{t} S_2 dt$

Merupakan penyelesaian PD di atas, cukup ditunjukkan

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P\, , \frac{\partial F}{\partial y} = Q\, , \frac{\partial F}{\partial z} = R\, , \frac{\partial F}{\partial t} = S$$

Bukti :

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial x} = P$

  $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} P\,dx + \frac{\partial}{\partial x}\int_{y_0}^{y} Q_2\,dy + \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_0}^{z} R_2\,dz + \frac{\partial}{\partial x}\int_{t_0}^{t} S_2 dt$$

  Karena $\frac{\partial Q_2}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial R_2}{\partial x} = 0$ dan $\frac{\partial S_2}{\partial x} = 0$, maka $\frac{\partial F}{\partial x} = P + 0 + 0 + 0 = P$

  $\therefore \frac{\partial F}{\partial x} = P$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$

  $$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P\,dx + \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} Q_2\,dy + \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_0}^{z} R_2\,dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_{t_0}^{t} S_2 dt$$

  $$= \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} Q\,dx + Q_2 + 0 + 0 = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial x}\right)dx + Q_2$$

  $$= \int_{x_0}^{x}\frac{\partial Q_1}{\partial x}dx + Q_2 = Q_1(x,y,z,t) - Q_1(x_0,y,z,t) + Q_2$$

  $$= Q_1 + Q_2 = Q$$

  $\therefore \frac{\partial F}{\partial y} = Q$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial z} = R$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} P\,dx + \frac{\partial}{\partial z}\int_{y_0}^{y} Q_2\,dy + \frac{\partial}{\partial z}\int_{z_0}^{z} R_2\,dz + \frac{\partial}{\partial z}\int_{t_0}^{t} S_2 dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R}{\partial x}\,dx + R_1(x_0, y, z, t) + R_2 + 0$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial R_1}{\partial x} + \frac{\partial R_2}{\partial x}\right) dx + R_1(x_0, y, z, t) + R_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial R_1}{\partial x} dx + R_1(x_0, y, z, t) + R_2$$

$$= R_1(x, y, z, t) - R_1(x_0, y, z, t) + R_1(x_0, y, z, t) + R_2$$

$$= R_1(x, y, z, t) + R_2 = R$$

$$\therefore\ \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

- Akan ditunjukkan $\frac{\partial F}{\partial t} = S$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_0}^{x} P\,dx + \frac{\partial}{\partial t}\int_{y_0}^{y} Q_2\,dy + \frac{\partial}{\partial t}\int_{z_0}^{z} R_2\,dz + \frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} S_2 dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial S}{\partial x}\,dx + S_1(x_0, y, z, t) + 0 + S_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \left(\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial S_2}{\partial x}\right) dx + S_1(x_0, y, z, t) + S_2$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial S_1}{\partial x} dx + S_1(x_0, y, z, t) + S_2$$

$$= S_1(x, y, z, t) - S_1(x_0, y, z, t) + S_1(x_0, y, z, t) + S_2$$

$$= S_1(x, y, z, t) + S_2 = R$$

$$\therefore\ \frac{\partial F}{\partial z} = R$$

Jadi, $F = \int_{x_0}^{x} Pdx + \int_{y_0}^{y} Q_2 dy + \int_{z_0}^{z} R_2 dz + \int_{t_0}^{t} S_2 dt = C$ merupakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial eksak

$P(x, y, z, t)dx + Q(x, y, z, t)dy + R(x, y, z, t)dz + S(x, y, z, t)dt = 0$

(Herlani, 2010).

2.12 Faktor Integrasi PD Tidak Eksak Empat Peubah

Misal PD $P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt = 0$ tak eksak. Fungsi $\mu(x,y,z,t)$ disebut faktor integrasi PD

$P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt = 0$

Sehingga,

$\mu(x,y,z,t)\ [P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt] = 0$

menjadi eksak.

Misal $\mu = e^{\int adx+bdy+cdz+ddt}$

dengan *a* berupa fungsi konstan atau fungsi *a(x)*,

b berupa fungsi konstan atau fungsi *b(y)*,

c berupa fungsi konstan atau fungsi *c(z)*,

dan *d* berupa fungsi konstan atau fungsi *d(t)*.

karena persamaan diferensial :

$\mu(x,y,z,t)\ [P(x,y,z,t)dx + Q(x,y,z,t)dy + R(x,y,z,t)dz + S(x,y,z,t)dt] = 0$

adalah eksak, maka:

- $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ atau $\mu\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$

  $\mu\frac{\partial P}{\partial y} + Pb\mu = \mu\frac{\partial Q}{\partial x} + Qa\mu$ atau $\frac{\partial P}{\partial y} + Pb = \frac{\partial Q}{\partial x} + Qa$

  $$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Qa - Pb$$

- $\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial x}$ atau $\mu\frac{\partial P}{\partial z} + P\frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + R\frac{\partial \mu}{\partial x}$

  $\mu\frac{\partial P}{\partial z} + Pc\mu = \mu\frac{\partial R}{\partial x} + Ra\mu$ atau $\frac{\partial P}{\partial z} + Pc = \frac{\partial R}{\partial x} + Ra$

  $$\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = Ra - Pc$$

- $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} = \frac{\partial(\mu R)}{\partial y}$ atau $\mu \frac{\partial Q}{\partial z} + Q \frac{\partial \mu}{\partial z} = \mu \frac{\partial R}{\partial y} + R \frac{\partial \mu}{\partial y}$

  $\mu \frac{\partial Q}{\partial z} + Qc\mu = \mu \frac{\partial R}{\partial y} + Rb\mu$ atau $\frac{\partial Q}{\partial z} + Qc = \frac{\partial R}{\partial y} + Rb$

  $$\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} = Rb - Qc$$

- $\frac{\partial(\mu P)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu S)}{\partial x}$ atau $\mu \frac{\partial P}{\partial t} + P \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial S}{\partial x} + S \frac{\partial \mu}{\partial x}$

  $\mu \frac{\partial P}{\partial t} + Pd\mu = \mu \frac{\partial S}{\partial x} + Sa\mu$ atau $\frac{\partial P}{\partial t} + Pd = \frac{\partial S}{\partial x} + Sa$

  $$\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x} = Sa - Pd$$

- $\frac{\partial(\mu Q)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu S)}{\partial y}$ atau $\mu \frac{\partial Q}{\partial t} + Q \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial S}{\partial y} + S \frac{\partial \mu}{\partial y}$

  $\mu \frac{\partial Q}{\partial t} + Qd\mu = \mu \frac{\partial S}{\partial y} + Sb\mu$ atau $\frac{\partial Q}{\partial t} + Qd = \frac{\partial S}{\partial y} + Sb$

  $$\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial y} = Sb - Qd$$

- $\frac{\partial(\mu R)}{\partial t} = \frac{\partial(\mu S)}{\partial z}$ atau $\mu \frac{\partial R}{\partial t} + R \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial S}{\partial z} + S \frac{\partial \mu}{\partial z}$

  $\mu \frac{\partial R}{\partial t} + Rd\mu = \mu \frac{\partial S}{\partial z} + Sc\mu$ atau $\frac{\partial R}{\partial t} + Rd = \frac{\partial S}{\partial z} + Sc$

  $$\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial z} = Sc - Rd$$

Bagi menjadi empat kasus, yaitu :

- Kasus 1

  Untuk *a=0, b=0* dan *c=0* $\rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$

  $\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x} = -Pd$ atau $\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial y} = -Qd$ atau $\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial z} = -Rd$

  $$d(t) = \frac{\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial x}}{-P} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial y}}{-Q} = \frac{\frac{\partial R}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial z}}{-R}$$

  Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int d(t)dt}$ (fungsi dari *t*).

- Kasus 2

Untuk a=0, $b=0$ dan $d=0$ $\rightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial y}$

$\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=-Pc$ atau $\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=-Qc$ atau $\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial z}=Sc$

$$c(z)=\frac{\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}}{-P}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}}{-Q}=\frac{\frac{\partial R}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial z}}{S}$$

Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int c(z)dz}$ (fungsi dari z)

- Kasus 3

Untuk a=0, $c=0$ dan $d=0$ $\rightarrow$ $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial z}$

$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=-Pb$ atau $\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}=Rb$ atau $\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial y}=Sb$

$$b(y)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{-P}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}}{R}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial y}}{S}$$

Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int b(y)dy}$ (fungsi dari y)

- Kasus 4

Untuk b=0, $c=0$ dan $d=0$ $\rightarrow$ $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial z}$

$\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}=Qa$ atau $\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}=Ra$ atau $\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x}=Sa$

$$a(x)=\frac{\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}=\frac{\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}}{R}=\frac{\frac{\partial P}{\partial t}-\frac{\partial S}{\partial x}}{S}$$

Jadi, faktor integrasi dari $\mu^{\int a(x)dx}$ (fungsi dari x)

(Herlani, 2010).

2.13 Definisi Persamaan Diferensial Total

Suatu persamaan : $f(x, y, z) = C$ (2.10)

dengan C adalah konstan sebarang, maka persamaan diferensial :

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \tag{2.11}$$

dengan $P(x, y, z)dx = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)dx$

$$Q(x, y, z)dy = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)dy$$

$$R(x, y, z)dz = \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z)dz$$

persamaan diferensial total dari (2.10) dan (2.11) merupakan persamaan diferensial eksak.

Jadi, persamaan diferensial eksak merupakan persamaan diferensial total dari suatu fungsi primitifnya (Ayres dan Ault, 1999).