II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi Turunan

Turunan fungsi *f* adalah fungsi lain *f'* (dibaca " *f* aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa *f* terdiferensialkan (terturunkan) di c. Pencarian turunan disebut pendiferensialan (Purcell,1987)

2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variabel bebas, variabel tak bebas dan derivatif-derivatif dari variabel tidak bebas terhadap variabel bebasnya. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam persamaan diferensial. Derajat suatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari derivatif tertinggi dalam persamaan diferensial (Wardiman, 1981).

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x), \tag{2.2.1}$$

$$y'' - 2y' + y = \cos(x), \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (2.2.3)$$

$$3x^2 dx + 2\,y dy = 0. \quad (2.2.4)$$

Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu biasa dan parsial. Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*), disingkat PDB, adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas, maka suatu persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk $F(x,y,y',y'',\ldots,y^n) = 0$.

Jelas bahwa persamaan (2.2.1), (2.2.2), dan (2.2.4) adalah PDB, sedangkan persamaan (2.2.3) bukan PDB melainkan suatu persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*). Persamaan diferensial parsial, disingkat PDP, adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua atau lebih variabel bebas (Nugroho, 2011).

2.3 Orde dan Derajat Suatu Persamaan Diferensial

Orde persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi turunan yang timbul. Sedangkan derajat persamaan diferensial dapat ditulis sebagai polinomial dalam turunan, adalah derajat turunan tingkat tertinggi yang terjadi. (Ayres, 1995).

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk : $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ yang menyatakan hubungan antara perubah bebas x, perubah tak bebas $y(x)$ dan turunannya yaitu $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) *n* jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke *n*.

Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai degree (derajad) *k* jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajad *k*.

Contoh :

1. $x\frac{dy}{dx} + 5y = 6$; orde satu, derajad satu
2. $\left(\frac{d^3y}{dx}\right) + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$; orde tiga, derajad satu
3. $\left(\frac{d^3y}{dx}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2xy = 6$; orde tiga, derajad dua.

Karena turunan tertingginya berderajad dua (Kartono,1994).

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Diketahui persamaan – persamaan diferensial biasa berikut ini :

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(\,t, x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(\,t, x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,)$$

:

:

:

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(\,t, x_1\,, x_2\,, \dots, x_n\,)$$

Kumpulan persamaan diferensial biasa dalam persamaan tersebut yang mempunyai hubungan simultan disebut sistem persamaan diferensial biasa, dengan $x_1\,, x_2\,, \dots, x_n$ fungsi bernilai real dari t ; $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dx_2}{dt}$, ... , $\frac{dx_n}{dt}$ adalah derivatif fungsi $x_1, x_2, \dots, x_n$ terhadap t ; $f_1, f_2, \dots, f_n$ adalah fungsi – fungsi bernilai real yang terdefinisi dalam ruang Euclid R berdimensi *n+1* (dinotasikan dalam (*t,x*)). Sistem persamaan diferensial biasa dalam notasi vektor ditulis dalam bentuk

$$x' = f\,'(t,x), x \in R^n$$

(Boyce , 1997).

2.5 Persamaan Diferensial Linear Orde Dua Homogen

Bentuk umum

$$y'' + py' + qy = 0$$

Pada bentuk umum PD linear orde dua :

- Suku pertama ruas kiri hanya y'', koefisien satu, tanpa *x*, tanpa *y*.
- Suku ketiga ruas kiri ada *y* pangkat satu
- *p* dan *q* berupa sembarang fungsi atas *x* atau konstan, tidak berisi *y*
- *p* dan *q* disebut koefisien PD tersebut.
- Pada PD homogen, ruas kanan = 0

(Degeng, 2007).

2.6 Definisi Titik Biasa dan Titik Singular

Perhatikan suatu persamaan diferensial orde dua dengan koefisien peubah dari bentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (2.6.1)$$

Sebuah titik x_0 disebut titik biasa dari persamaan diferensial (2.6.1) jika kedua fungsi

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \text{ dan } \frac{a_0(x)}{a_2(x)} \tag{2.6.2}$$

analitik pada titik x_0 . Jika paling sedikit satu fungsi dari (2.6.2) tidak analitik pada titik x_0, maka x_0 disebut sebuah titik singular dari persamaan diferensial (2.6.1).

Sebagian besar persamaan diferensial dari bentuk (2.6.1) yang muncul dalam terapan, mempunyai koefisien-koefisien $a_2(x)$, $a_1(x)$, dan $a_0(x)$, berbentuk polinom. Sesudah menghapuskan faktor bersama (sekutu), fungsi rasional $a_1(x)/a_2(x)$ dan $a_0(x)/a_2(x)$ analitik pada setiap titik kecuali yang menghilangkan penyebut. Titik – titik yang menghilangkan penyebut adalah titik – titik singular dari persamaan diferensial itu, dan semua bilangan riil lainnya adalah titik biasa.

2.7 Definisi Titik Singular yang Regular dan Tak Regular

Sebuah titik x_0 disebut titik singular yang regular dari persamaan diferensial (2.6.1) jika titik ini adalah sebuah titik singular (jika paling sedikit satu fungsi dalam (2.6.2) tidak analitik pada x_0) dan kedua fungsi

$$(x - x_0)\frac{a_1 x}{a_2 x} \text{ dan } (x - x_0)^2\frac{a_0 x}{a_2 x} \tag{2.7.1}$$

analitik pada titik x_0 . Jika paling sedikit satu fungsi dalam (2.7.1) tidak analitik pada titik x_0 , maka x_0 disebut titik singular tak regular dari persamaan diferensial (2.6.1) (Finizio dan Ladas, 1998).

2.8 Deret Kuasa

Suatu deret dengan bentuk

$$a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

disebut deret kuasa dari $(x - x_0)$ dan dinyatakan oleh

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n . \tag{2.8.1}$$

Bilangan-bilangan $a_0, a_1, a_{2,}, \ldots , a_n , \ldots$ disebut koefisien dari deret kuasa itu, dan titik x_0 disebut pusat dari deret kuasa itu. Kita katakan juga bahwa (2.8.1) merupakan deret kuasa di sekitar titik x_0.

Kita katakan bahwa suatu deret kuasa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ konvergen pada sebuah titik tertentu x_1 , jika

$$\lim_{N \to x} \sum_{n=0}^{N} a_n(x_1 - x_0)^n$$

ada. Dalam hal ini nilai limit itu disebut jumlah deret pada titik x_1. Jika limit ini tidak ada, deret tersebut dikatakan divergen pada titik x_1.

Jika diketahui deret (2.8.1) adalah penting untuk mencari semua titik *x* yang mengakibatkan deret itu konvergen. Untuk mencari ini kita hitung jari-jari kekonvergenan dari deret kuasa itu. Istilah itu dinyatakan oleh *R* dan diberikan oleh rumus

$$R = \frac{1}{\lim_{n \to x} \sqrt[n]{a_n}} \tag{2.8.2}$$

atau

$$R = \lim_{n \to x} \frac{a_n}{a_{n+1}} \tag{2.8.3}$$

asalkan limit dalam (2.8.2) dan (2.8.3) ada. Untuk deret dalam bentuk lain dari (2.8.1), seperti $\sum_{n=0}^{x} x^{2n+1}/2^n$, Persamaan (2.8.2) dan (2.8.3) tidak dapat digunakan.

Jika $R = 0$, deret (2.8.1) hanya konvergen pada pusatnya, $x = x_0$. Jika $R = +\infty$, deret (2.8.1) konvergen untuk semua *x*. Akhirnya, jika 0 < R < ∞, deret konvergen di dalam selang | $x - x_0$ | < *R*, yaitu untuk

$$-R + x_0 < x < R + x_0 \tag{2.8.4}$$

dan divergen untuk | $x - x_0$ | > *R*. Selang (2.8.4), atau seluruh garis real jika *R* = ∞, disebut selang kekonvergenan dari deret (2.8.1). Di dalam selang ini semua operasi yang akan kita lakukan pada deret, dalam usaha kita mencari penyelesaian deret diferensial, adalah sah. Pada titik batas selang (2.8.4) yaitu, untuk $x = -R + x_0$ dan $R + x_0$, deret mungkin konvergen atau divergen (Finizio dan Ladas, 1988).

2.9 Persamaan Indeks

Persamaan diferensial linear orde dua dengan koefisien peubah yang berbentuk

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \tag{2.9.1}$$

dalam selang tanpa titik pusat di sekitar titik singular yang regular x_o. Bila titik x_o merupakan titik singular yang regular dari persamaan diferensial (2.9.1), maka fungsi – fungsi

$$(x - x_0)\frac{a_1x}{a_2x} \text{ dan } (x - x_0)^2\frac{a_0x}{a_2x}$$

mempunyai uraian deret kuasa berbentuk

$$(x - x_0)\frac{a_1x}{a_2x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_o| < R_1 \tag{2.9.2}$$

$$(x - x_0)^2 \frac{a_1 x}{a_2 x} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (x - x_0)^n \text{ untuk } |x - x_o| < R_2 \qquad (2.9.3)$$

dengan jari – jari kekonvergenan R_1 dan R_2.

Misalkan bahwa x_0 sebuah titik singular yang regular dari persamaan diferensial (2.9.1) dan misalkan bahwa uraian (2.9.2) dan (2.9.3) berlaku. Maka persamaan kuadrat

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0$$

disebut persamaan indeks dari (2.9.1) pada x_0.

2.10 Penyelesaian di Sekitar Titik Singular yang Regular

Teorema 2.10 (Penyelesaian di dekat sebuah Titik Singular yang Regular)

Misalkan bahwa x_0 sebuah titik singular yang regular dari persamaan diferensial (2.9.1) dan misalkan bahwa uraian (2.9.2) dan (2.9.3) berlaku. Misalkan pula bahwa λ_1 dan λ_2 dua akar dari persamaan indeks

$$\lambda^2 + (A_0 - 1)\lambda + B_0 = 0 \qquad (2.10.1)$$

yang ditandai sedemikian sehingga $\lambda_1 \geq \lambda_2$ dalam hal kedua akar itu merupakan bilangan riil. Maka salah satu penyelesaian dari persamaan (2.9.1) berbentuk

$$y_1(x) = |x - x_0|^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n , \qquad (2.10.2)$$

dengan $a_0 = 1$, dan berlaku di dalam selang tanpa pusat $0 < |x - x_0| < R$, di mana $R = \min(R_1, R_2)$(Finizio dan Ladas,1988).