# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Diferensial

Jika $y = f(x)$ dengan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang terdiferensialkan terhadap variabel bebas $x$, maka $dy$ adalah diferensial dari variabel tak bebas (terikat) $y$, yang didefinisikan dengan $dy = f'(x)\, dx$.

Andaikan $y = f(x,y)$, dengan $f$ adalah suatu fungsi yang dapat dideferensialkan, diferensial dari peubah tak bebas (terikat) $dy$, disebut juga diferensial total dari $f$, yang didefinisikan $dy = df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$ (Purcell and Varberg, 1987).

## 2.2 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat variabel bebas, variabel tak bebas dan derivatif-derivatif dari variabel tidak bebas terhadap variabel tidak bebasnya. Tingkat (orde) persamaan diferensial adalah tingkat tertinggi dari derivatif yang terdapat dalam persamaan diferensial. derajat siatu persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari derivatif tertinggi dalam persamaan diferensial.

Contoh 2.2

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0.$

2. $x\ dy + y\ dx = 8\ dx.$ (Wardiman, 1981).

### 2.3 Orde (Tingkat) dan Degree (Derajat)

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk:

$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ yang menyatakan hubungan antara perubah bebas $x$, perubah tak bebas y($x$) dan turunannya yaitu $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke n.

Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai degree (derajad) k jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajad k.

Contoh 2.3

1. $x\frac{dy}{dx} + 5y = 6$ ; orde satu, derajad satu

2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$ ; orde tiga, derajad satu

3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2xy = 6$ ; orde tiga, derajad dua

Karena turunan tertingginya berderajad dua (Kartono, 1994).

### 2.4 Jenis – Jenis Persamaan Diferensial

Berdasarkan variabel bebasnya, persamaan diferensial dikelompokkan menjadi 2, yaitu Persamaan Diferensial Biasa (PDB) atau dikenal dengan istilah *Ordinary Differential Equations* (ODE) dan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) atau dikenal dengan *Partial Differential Equations* (PDE). Berikut adalah bentuk PDB dan PDP:

1. Persamaan diferensial biasa

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\frac{dy}{dx} = kx$$

2. Persamaan diferensial parsial

$$\alpha\frac{\partial^2T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t}$$

(Sasongko,2010).

**2.5 Persamaan Diferensial Biasa**

Persamaan yang memuat satu atau beberapa turunan fungsi yang tidak diketahui, apabila fungsi tersebut merupakan fungsi satu peubah bebas, maka persamaan tersebut dinamakan persamaan diferensial biasa, yang memiliki bentuk secara umum adalah sebagai berikut:

F($x$, $y$,$y'$ $y''$, ............. , $y^{(n)}$) = 0 dengan $x$ adalah peubah bebas dan $y$ adalah peubah yang bergantung pada $x$.

Contoh 2.5

1. $\frac{d^2y}{dx} + \frac{dy}{dx}xy = e^{-x}$

2. $y'' + xy' = e^{-x}$

## 2.6 Persamaan Diferensial Parsial

Apabila pada kedua fungsi pada persamaan diferensial biasa tersebut merupakan fungsi lebih dari satu peubah bebas, maka dinamakan dengan persamaan diferensial parsial yang memiliki bentuk umum :

F($u$, $u_x$, $u_y$, $u_z$, $u_{xx}$, $u_{yy}$, $u_{zz}$, $u_{xy}$, $u_{xz}$, $u_{yz}$, ..........) = 0 dengan x,y,z,....... adalah peubah-peuban bebas dan u adalah peubah tak bebas yang tergantung pada peubah-peubah bebas, dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ; $u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ (Kerami,2003).

Berdasarkan bentuk kelineararannya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu persamaan diferensial linear dan persamaan diferensial tak linear.

## 2.7 Persamaan Diferensial Linear

Suatu persamaan diferensial linear orde n adalan persamaan yang berbentuk

$$a_n\,(x)y^{(n)} + \ a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \ a_1(x)y' + \ a_0(x)y = f(x) \qquad (2.7)$$

Dimisalkan bahwa koefisien-koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), a_1(x), \dots a_0(x)$ dan fungsi *f(x)* merupakan fungsi-fungsi yang kontinu pada suatu selang I dan bahwa koefisien pertama $a_n(x)\ \neq 0$ untuk setiap $x \in I$. Selang *I* disebut *selang definisi* (selang asal) dari persamaan diferensial itu. Jika fungsi *f* identik dengan nol, maka persamaan (2.7) disebut *homogen*.

Jika *f(x)* tak identik nol, persamaan (2.7) disebut *takhomogen.* Bila semua koefisien $a_n(x), a_{n-1}(x), a_1(x), \dots a_0(x)$ adalah tetap, Persamaan (2.7) dikatakan persamaan diferensial linear dengan *koefisien konstatnta*, dilain pihak, adalah persamaan diferensial dengan *koefisien-koefisien peubah.* Berikut ini adalah contoh-contoh persamaan diferensial linear:

$xy' - 2y = x^3 \; ; x \neq 0$ (a)

$y'' + 2y' + 3y = \cos x$ (b)

$y^{(4)} - y = 0$ (c)

Persamaan (a) adalah persamaan linear takhomogen orde satu dengan koefisien konstanta. Persamaan (b) adalah persamaan linear takhomogen orde dua dengan koefisien konstanta. Persamaan (c) adalah suatu pernamaan linear takhomogen orde empat dengan koefisien konstanta. Istilah *linear* berkaitan dengan kenyataan bahwa tiap suku dalam persamaan diferensial itu, peubah-peubah $y, y', \ldots \ldots\; y^{(n)}$ berderajat satu atau nol. (Finizio,N & Ladas,G. 1988).

## 2.8 Persamaan Diferensial Tak Linear

Persamaan diferensial biasa $F\big(t, y, y', \ldots \ldots\; y^{(n)}\big) = 0$ dikatakan linear jika F adalah linear dalam variabel-variabel $y, y', \ldots \ldots\; y^{(n)}$. Definisi serupa juga berlaku untuk persamaan diferensial sebagian. Jadi, secara umum persamaan diferensial biasa linear orde-n diberikan dengan

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t) \qquad (2.8)$$

Persamaan yang tidak dalam bentuk persamaan (2.8) merupakan persamaan tak linear. Contoh persamaan tak linear, persamaan pendulum, yaitu:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\alpha = 0.$$

Persamaan tersebut tak linear karena suku $\sin\alpha$. (Waluyo,2006).

Berdasarkan ordenya, persamaan diferensial dibagi menjadi persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua, sampai dengan persamaan diferensial orde n.

## 2.9 Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

Suatu persamaan diferensial biasa linear orde satu adalah suatu persamaan yang berbentuk:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Misalkan bahwa koefisien-koefisien $a_1(x)$, $a_0(x)$, dan $f(x)$ adalah fungsi-fungsi kontinu pada selang *I* dan bahwa koefisien $a_1(x) \neq 0$ untuk semua *x* di dalam *I*. Jika kedua ruas dibagi oleh $a_1(x)$ dan menetapkan $a(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$ dan $b(x) = \frac{f(x)}{a_1(x)}$, diperoleh persamaan diferensial yang sepadan:

$$y' + a(x)y = b(x)$$

Dimana $a(x)$ dan $b(x)$ fungsi-fungsi $x$ yang kontinu pada selang *I*. Penyelesaian umum persamaan $y' + a(x)y = b(x)$ dapat dicari secara eksplisit dengan memperhatikan bahwa peubah-peubah:

$$w = ye^{\int a(x)dx}$$

Memetakan persamaan $y' + a(x)y = b(x)$ kedalam persamaan diferensial. Jadi, (dengan mengingat $\frac{d}{dx}[\int a(x)dx] = a(x)$),

$w' = y'e^{\int a(x)dx} + ya(x)e^{\int a(x)dx}$

$= [y' + a(x)y]e^{\int a(x)dx}$

$= b(x)e^{\int a(x)dx}$

Ini adalah persamaan diferensial terpisah dengan penyelesaian umum:

$$w(x) = c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx} dx$$

$$\rightarrow y e^{\int a(x)dx} = c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx} dx$$

$\rightarrow y = e^{-\int a(x)dx}\left[c + \int b(x)\, e^{\int a(x)dx} dx\right]$ (Finizio,N & Ladas,G. 1988).

## 2.10 Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

Persamaan diferensial linear orde kedua memiliki bentuk:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = k(x)$$

Akan dibuat dua asumsi penyederhanaan, yaitu $a_1(x)$ dan $a_2(x)$ adalah konstanta serta $k(x)$ identik dengan nol. Sehingga, $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$. Sebuah persamaan diferensial dimana $k(x) = 0$ dikatakan bersifat homogen.

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial orde satu, diperlukan satu integral yang akan menghasilkan solusi umum dengan satu konstanta sebarang. Sedangkan secara analogi, penyelesaian persamaan diferensial orde dua memerlukan dua integral sehingga solusi umumnya akan mempunyai dua konstanta. Persamaan diferensial linear homogen orde dua selalu mempunyai dua solusi dasar, yaitu $u_1(x)$ dan $u_2(x)$, yang berdiri sendiri atau tidak bergantung (*independent*) satu sama lain (yaitu tidak satupun dari kedua fungsi tersebut merupakan kelipatan konstanta dari persamaan lainnya). (Purcell and Varberg, 1987).

## 2.11 Persamaan Diferensial Biasa Orde-n

Persaamaan Diferensial orde-n adalah persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = r$$

Perhatikan:

1. $y^{(n)}$ adalah turunan $y$ ke-n
2. Persamaan Diferensial linear jika $p_0, p_1$, ..... $p_{n-1}$ dan r merupakan fungsi dari x, atau konstan, tidak berisi y.
3. Persamaan Diferensial tak linear jika $p_0, p_1$, ..... $p_{n-1}$ ada yang berisi y atau r berisi y berpangkat selain nol atau satu.
4. Jika $r \neq 0$, disebut persamaan diferensial linear orde-n tak homogen.
5. Jika $r = 0$, disebut persamaan diferensial linear orde-n homogen.
6. Jika $p_0, p_1$, ..... $p_{n-1}$ merupakan konstan, disebut persamaan diferensial orde-n koefisien konstan. (Degeng,2007).

## 2.12 ContohPersamaan Diferensial Tak Linear

Persamaan diferensial Riccati adalah persamaan diferensial tak linear dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$$

Bila $R(x) = 0$ persamaan diferensial Riccati berbentuk persamaan diferensial Bernoulli dan bila $Q(x) = 0$ menjadi persamaan diferensial orde-1. Solusi persamaan diferensial Riccati bergantung pada fungsi $P(x), Q(x) dan\ R(x)$.

Penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan diferensial Riccati sesuai dengan sifat-sifat transformasi diferensial (Shepley L. Ross, 1966).

## 2.13 Transformasi Diferensial

Transformasi diferensial merupakan suatu langkah iteratif untuk memperoleh solusi analitik deret Taylor dari persamaan diferensial. transformasi diferensial diperkenalkan pertama kali oleh Zhou pada tahu 1986 untuk menyelesaikan persamaan nilai awal yang linear dan tak linear pada analisis sirkuit listrik (Rahayu,2012)

## 2.14 Deret Taylor

**Teorema 2.14**

Misalkan fungsi $f$ terdiferensialkan sampai tingkat ke-(n+1) pada selang terbuka $I$ yang memuat c. Maka terdapat ε diantara $x$ dan $c$ sehingga:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

Dengan:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n$$

Dan:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{n!}(x-c)^{n+1}$$

(Martono,1999).