ANALISIS FAKTORIAL MENDEKATI PRIMA DAN PRIMORIAL MENDEKATI PRIMA

(Skripsi)

Oleh

DIMIANTIKA

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

FACTORIAL ANALYSIS APPROACHING PRIMA AND PRIMORIAL APPROACHING PRIMA

by

Dimiantika

An integer with $p > 1$ is said to be prime if and only if its positive divisors are 1 and p. Prime numbers can be obtained through factorial and primorial approaches. If a prime number is $p > n! + 1$, then $p > n! + n$ is also prime. In addition, if the prime number p satisfies $n! + 1 < p < n! + r^2$ then $p - n!$ also a prime where r is the smallest prime number such that $r > n$. Furthermore, if the prime p satisfies $n! - s^2 < p < n! - 1$ then $n! - p$ is also a prime with $n > 2$ and s is the largest prime number so that $s < n$. If prime p satisfies $q\# + 1 < p < q\# + r^2$ then $p - q\#$ is also prime with $q < r$ being consecutive prime numbers.
Key Words: *Prime numbers, Factorial, Primorial*

ABSTRAK

ANALISIS FAKTORIAL MENDEKATI PRIMA DAN PRIMORIAL MENDEKATI PRIMA

oleh

Dimiantika

Suatu bilangan bulat dengan $p > 1$ dikatakan prima jika dan hanya jika pembagi positifnya adalah 1 dan p. Bilangan prima dapat diperoleh melalui pendekatan faktorial dan primorial. Jika bilangan prima $p > n! + 1$, maka $p > n! + n$ juga prima. Selain itu, jika bilangan prima p memenuhi $n! + 1 < p < n! + r^2$ maka $p - n!$ juga prima dengan r adalah bilangan prima terkecil sehingga $r > n$. Selanjutnya, jika prima p memenuhi $n! - s^2 < p < n! - 1$ maka $n! - p$ juga prima dengan $n > 2$ dan s adalah bilangan prima terbesar sehingga $s < n$. Jika prima p memenuhi $q\# + 1 < p < q\# + r^2$ maka $p - q\#$ juga prima dengan $q < r$ adalah bilangan prima berurutan.

Kata Kunci: Bilangan prima, Faktorial, Primorial

ANALISIS FAKTORIAL MENDEKATI PRIMA DAN PRIMORIAL MENDEKATI PRIMA

Oleh

DIMIANTIKA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **ANALISIS FAKTORIAL MENDEKATI PRIMA DAN PRIMORIAL MENDEKATI PRIMA**

Nama Mahasiswa : ***Dimiantika***

Nomor Pokok Mahasiswa : **1917031019**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.**
NIP 197604112000122001	NIP 199306012019032021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **6 Maret 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama Mahasiswa	: **Dimiantika**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031019**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
Judul Skripsi	: **Analisis Faktorial Mendekati Prima dan Primorial Mendekati Prima**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung,

Dimiantika

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Dimiantika, anak kedua dari dua bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 31 Maret 2001 oleh pasangan suami istri Bapak Kumaidi, S.Pd dan Ibu Normi Turnip, S.Pd. Penulis memiliki kakak kandung perempuan yang bernama Petrina Nordianti, S.Pd.

Penulis menempuh Pendidikan Taman Kanak Kanak (TK) di TK Immanuel pada tahun 2006 - 2007, pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Immanuel pada tahun 2007 - 2013, pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Immanuel pada tahun 2013 - 2016, pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Immanuel pada tahun 2016 - 2019.

Pada tahun 2019, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN).

Penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Bank BRI KCP Tanjung Agung, Bandar Lampung pada bulan Januari sampai Februari tahun 2022. Kemudian pada bulan Juli sampai Agustus tahun 2022, penulis melaksanakan program Kuliah Kerja Nyata (KKN) sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat di Desa Pelindung Jaya, Kecamatan Gunung Pelindung, Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

He makes everything beautiful in it's time.
He even eternity in their hearts. But man cannot fathom the work
that God does from beginning to end
(Ecclesiastes 3:11)

PERSEMBAHAN

Puji Tuhan
Dengan segala kerendahan hati dan rasa syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa
Kupersembahkan karya yang sederhana ini untuk:

Orang tua terkasih, kakak serta seluruh keluarga besar yang selalu memberikan dukungan serta doa disetiap pengerjaan karya tulis ini.

Terima kasih yang sebesar besarnya atas cinta, kasih sayang, pengertian, pengorbanan, waktu, keringat dan segala yang telah kalian berikan.

Para pendidik, guru – guru, serta dosen yang telah meluangkan waktu untuk mengajarkan dan membagikan ilmunya kepada penulis .

Para sahabat yang telah mendukung, memberikan saran dan semangat kepada penulis selama proses perkuliahan.

SANWACANA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa karena berkat, kasih, dan rahmatNya yang telah diberikan kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **"**Analisis Faktorial Mendekati Prima dan Primorial Mendekati Prima**"**. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan skripsi ini banyak pihak yang turut serta membantu penulis, untuk itu penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Tuhan Yang Maha Esa karena berkat, kasih, dan rahmatNya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan keadaan sehat waalfiat.
2. Alm. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I yang telah banyak membantu, mengajarkan serta mendampingi selama proses penyusunan proposal penelitian hingga hasil penelitian.
3. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku penerus Pembimbing I yang juga telah banyak membantu serta mengarahkan selama proses penyusunan skripsi sehingga skripsi ini dapat diselesaikan sebagaimana semestinya.
4. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku Pembimbing II yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan kepada penulis selama proses penyelesaian penyusunan skripsi ini.
5. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis.
6. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc selaku Pembimbing Akademik.
7. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

8. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Seluruh dosen dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
9. Kedua orang tua penulis Bapak Kumaidi dan Ibu Normi Turnip, kakak kandung penulis Petrina Nordianti beserta suami Wanda Richard Ardytino yang telah memberikan semangat, doa, dukungan, nasihat, dan kasih sayang serta pengorbanan yang tak tergantikan.
10. Para kakak tingkat dan adik tingkat yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini.
11. Audrey Verisca Renry, Intan Caroline, dan Aulia Ayu Annisa selaku teman seperbimbingan dan teman-teman Angkatan 2019 Jurusan Matematika yang telah berjuang bersama-sama serta Almamater tercinta Universitas Lampung.
12. Bank BRI KCP Tanjung Agung yang telah memberikan ilmu dan pengalaman kerja kepada penulis.

Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan akan tetapi penulis berharap semoga skripsi ini dapat memberikan informasi yang bermanfaat bagi berbagai pihak.

Bandar Lampung, 6 Maret 2023
Penulis

Dimiantika

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Matematika adalah salah satu ilmu yang banyak dibutuhkan dalam mengembangkan ilmu pengetahuan lainnya. Selain sebagai dasar pengembangan ilmu, matematika juga dapat direalisasikan untuk memecahkan masalah yang sering dijumpai dalam kehidupan. Carl Friedrich Gauss mengatakan bahwa matematika adalah ratu dari ilmu pengetahuan dan aritmatika adalah ratu dari matematika (Polarida, dkk., 2016). Penerapan ilmu matematika akan menghasilkan solusi dari masalah yang ada. Oleh karena itu, perlu adanya pendalaman tersendiri bagi ilmu matematika. Matematika memiliki berbagai cabang materi yang dapat dipelajari. Salah satu cabang matematika yang ada adalah teori bilangan.

Teori bilangan adalah salah satu cabang tertua dari matematika. Selama dua ribu tahun lebih teori bilangan berhasil menarik perhatian bagi para amatir maupun matematikawan (Polarida, dkk., 2016). Secara tradisional, teori bilangan adalah cabang dari matematika yang mempelajari sifat-sifat hubungan dan jenis-jenis bagian dari bilangan. Berdasarkan jenis cabang yang dipelajari dalam teori bilangan, hal yang paling penting adalah himpunan bilangan bulat positif (Burton, 2006). Dalam teori bilangan dasar, bilangan bulat dipelajari tanpa menggunakan teknik dari area matematika lainnya. Bilangan bulat adalah bilangan yang tidak mempunyai pecahan desimal misalnya 9, 21, 8764, -34, 0 (Burton, 1998).

Jika membicarakan tentang teori bilangan maka tidak akan terlepas dari berbagai jenis bilangan yang ada. Tak terkecuali bilangan prima. Bilangan ini bukanlah hal yang asing bahkan bagi bukan ahli matematika sekalipun. Bilangan prima merupakan bilangan bulat positif yang lebih besar dari satu dan hanya habis dibagi oleh satu dan dirinya sendiri (Puspita, dkk., 2015). Pada tahun 1640, Fermat menduga bahwa semua bilangan asli yang berbentuk $2^{2m}+1$ adalah bilangan prima. Namun, dugaan ini digugurkan oleh Euler dengan contoh penyangkal yaitu untuk $m=5$ (Sugiyono, dkk.,2020). Bilangan prima terkecil dan satu-satunya bilangan prima yang genap adalah dua (Rizal & Lukito, 2012). Menurut Euclid bilangan prima adalah bilangan-bilangan yang secara potensial tidak terbatas (Sabirin, 2014).

Bilangan prima dapat dibangun melalui banyak metode, salah satunya melalui faktorial dan primorial. Faktorial prima adalah bilangan prima yang lebih kecil atau lebih besar dari faktorial. Sedangkan primorial prima adalah bilangan prima yang muncul dari bentuk $q\#\pm 1$ dimana $q\#$ adalah primorial dari q (Cejchan, dkk., 2022). Faktorial dan primorial dapat mendekati prima. Pada dasarnya faktorial medekati prima dapat dibangun melalui $n!+1$ maupun $n!-1$. Sedangkan primorial mendekati prima dapat dibangun melalui $q\#+1$ maupun $q\#-1$ (Cejchan, dkk., 2022). Namun belum terdapat pengkajian lebih lanjut mengenai topik ini. Berdasarkan latar belakang tersebut peneliti tertarik untuk meneliti lebih lanjut mengenai faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menganalisis faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diperoleh dari penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Menambah pengetahuan terutama pada bidang teori bilangan.
2. Menambah informasi mengenai faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima.
3. Memberikan kontribusi penelitian tentang faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini akan dibahas mengenai konsep dasar yang mencakup keterbagian, bilangan prima, faktorial, dan primorial. Sehingga konsep dasar tersebut dapat digunakan untuk membuktikan faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima.

2.1 Bilangan

Bilangan adalah suatu konsep yang terdapat dalam matematika dimana konsep ini dapat diterapkan pada pencacahan dan pengukuran. Menurut Soedadiatmodjo bilangan merupakan suatu idea yang dipakai untuk menggambarkan atau mengabstraksikan banyaknya anggota dari suatu himpunan. Bilangan tidak dapat dilihat, ditulis, dibaca, dan dikatakan karena merupakan suatu ide yang hanya dapat dihayati atau dipikirkan saja (Soedadiatmojo, dkk.,1983). Bilangan dapat membangun sebuah sistem yang biasa disebut sebagai sistem bilangan. Diantara sistem bilangan yang ada, sistem yang paling sederhana adalah bilangan-bilangan asli, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, … (Triandi, 2014).

Berdasarkan beberapa pendapat ahli tersebut maka dapat ditarik garis besar bahwa bilangan merupakan salah satu bagian dari matematika yang dipakai untuk melakukan pencacahan dan pengukuran dimana bilangan juga memiliki sifat abstrak sebagai suatu gambaran dari banyaknya anggota himpunan.

2.2 Sistem Bilangan Bulat

Sistem bilangan bulat merupakan sistem yang terdiri atas bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$ beserta dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan juga perkalian $(\times)$ yang memenuhi aksioma berikut:

1. Sifat tertutup terhadap penjumlahan

   Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b)$ berada dalam $\mathbb{Z}$.

   Contoh 1

   1) $-8 + 11 = 3$

      Diketahui bahwa -8 dan 11 adalah bilangan bulat dan 3 juga merupakan bilangan bulat yang berada dalam $\mathbb{Z}$.

   2) $14 + (-4) = 10$

      Diketahui bahwa 14 dan -4 adalah bilangan bulat dan 10 juga merupakan bilangan bulat yang berada dalam $\mathbb{Z}$.

   3) $-26 + (-11) = -37$

      Diketahui bahwa -26 dan -11 adalah bilangan bulat dan -37 juga merupakan bilangan bulat yang berada dalam $\mathbb{Z}$.

2. Sifat tertutup terhadap perkalian

   Misalkan $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a \times b)$ berada dalam $\mathbb{Z}$.

   Contoh 2

   1) $7 \times 3 = 21$

      Diketahui bahwa 7 dan 3 adalah bilangan bulat dan 21 juga merupakan bilangan bulat yang berada dalam $\mathbb{Z}$.

   2) $3 \times (-12) = -36$

      Diketahui bahwa 3 dan -12 adalah bilangan bulat dan -36 juga merupakan bilangan bulat yang berada dalam $\mathbb{Z}$.

   3) $-5 \times (-3) = 15$

      Diketahui bahwa -5 dan -3 adalah bilangan bulat dan 15 juga merupakan bilangan bulat yang berada dalam $\mathbb{Z}$.

3. Sifat komutatif penjumlahan

   $a + b = b + a.$

   Contoh 3

   1) $3 + 7 = 10$ dan $7 + 3 = 10$
   2) $-6 + 15 = 9$ dan $15 + (-6) = 9$
   3) $8 + (-2) = 6$ dan $-2 + 8 = 6$

4. Sifat komutatif perkalian

   $a \times b = b \times a.$

Contoh 4

1) $11 \times 4 = 44$ dan $4 \times 11 = 44$
2) $-7 \times 5 = -35$ dan $5 \times (-7) = -35$
3) $-11 \times 3 = 33$ dan $3 \times (-11) = 33$

5. Sifat asosiatif penjumlahan

$(a + b) + c = a + (b + c)$.

Contoh 5

1) $(4 + 8) + 6 = 18$ hasilnya sama dengan $4 + (8 + 6) = 18$
2) $\big(-7 + (-13)\big) + 33 = 13$ hasilnya sama dengan $-7 + (-13 + 33) = 13$
3) $(9 + (-3)) + 3 = 9$ hasilnya sama dengan $9 + \big((-3) + 3\big) = 9$

6. Sifat asosiatif perkalian

$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

Contoh 6

1) $(3 \times 3) \times 2 = 18$ hasilnya sama dengan $3 \times (3 \times 2) = 18$
2) $\big((-4) \times 3\big) \times 5 = -60$ hasilnya sama dengan $-4 \times (3 \times 5) = -60$
3) $\big((-3) \times (-6)\big) \times 2 = 36$ hasilnya sama dengan $-3 \times \big((-6) \times 2\big) = 36$

7. Sifat distributif kiri perkalian atas penjumlahan

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

Contoh 7

1) $2 \times (11 + 4) = (2 \times 11) + (2 \times 4) = 30$
2) $4 \times (2 + 9) = (4 \times 2) + (4 \times 9) = 44$
3) $-5 \times (3 + 6) = \big((-5) \times 3\big) + \big((-5) \times 6\big) = -45$

8. Sifat distributif kanan perkalian atas penjumlahan

$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$.

Contoh 8

1) $(17 + 3) \times 2 = (17 \times 2) + (3 \times 2) = 40$
2) $(21 + 2) \times 3 = (21 \times 3) + (2 \times 3) = 69$
3) $(-12 + 9) \times 4 = \big((-12) \times 4\big) + (9 \times 4) = -12$

9. Unsur identitas terhadap penjumlahan

Untuk setiap a, terdapat elemen identitas atau elemen 0 dalam $\mathbb{Z}$ sedemikian rupa sehingga $a + 0 = 0 + a = a$.

Contoh 9

1) $36 + 0 = 0 + 36 = 36$
2) $-49 + 0 = 0 + (-49) = -49$
3) $51 + 0 = 0 + 51 = 51$

10. Unsur identitas terhadap perkalian

    Untuk setiap a, terdapat elemen identitas perkalian atau elemen 1 sedemikian sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$.

Contoh 10

1) $19 \times 1 = 1 \times 19 = 19$
2) $23 \times 1 = 1 \times 23 = 23$
3) $7 \times 1 = 1 \times 7 = 7$

11. Unsur invers terhadap penjumlahan

    Untuk setiap a, terdapat unsur invers penjumlahan sedemikian sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Contoh 11

1) $34 + (-34) = (-34) + 34 = 0$
2) $27 + (-27) = (-27) + 27 = 0$
3) $52 + (-53) = (-53) + 53 = 0$

2.3 Keterbagian

Keterbagian adalah salah satu bagian dalam ilmu matematika yang mempelajari suatu bilangan bulat yang habis dibagi bilangan lain yang dianggap sebagai pembagi. Dalam keterbagian akan menjelaskan lebih lanjut mengenai definisi dan teorema keterbagian.

Definisi 2.3.1

Dimisalkan bahwa a dan b merupakan bilangan bulat yang dapat dinotasikan sebagai $a, b \in \mathbb{Z}$. Sehingga dapat dikatakan bahwa a habis membagi b yang dinotasikan dengan $a|b$ jika $ac = b$ untuk beberapa $c \in \mathbb{Z}$. Sedangkan akan dikatakan bahwa a tidak membagi habis b yang dinotasikan dengan $a \nmid b$ jika tidak terdapat $c \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $ac = b$ (Stein, 2008).

Contoh 12

Bilangan 39 habis dibagi 13 karena $39 = 13 \cdot 3$. Namun, 10 tidak habis dibagi oleh 3 sehingga karena tidak ada bilangan bulat c yang memenuhi maka $10 = 3c$ adalah benar.

Istilah lain untuk menunjukkan relasi $a|b$ adalah a membagi b, a pembagi dari b, a faktor dari b atau b adalah kelipatan dari a. Jika a merupakan pembagi bagi b, maka $-a$ juga merupakan pembagi bagi b, sehingga pembagi suatu bilangan selalu memiliki pasangan. Jadi untuk menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat dapat dilakukan dengan menentukan pembagi positifnya kemudian gabungkan faktor positif dengan faktor negatifnya (Burton, 2006). Berdasarkan Definisi 2.3.1 diperoleh beberapa konsep sebagai berikut:

1. $a|0$
2. $1|a$
3. $a|a$

Dapat dilihat bahwa konsep $a|0$ sudah pasti terbukti karena jelas bahwa 0 adalah bilangan yang akan selalu habis dibagi oleh bilangan apapun selain nol. Selanjutnya, konsep $1|a$ menunjukkan bahwa bilangan 1 merupakan sebuah pembagi bagi bilangan apapun termasuk nol. Sedangkan konsep $a|a$ menunjukkan bahwa bilangan tak nol selalu habis membagi dirinya sendiri dan hasil akhir dari pembagiannya adalah 1 (Burton, 1998).

Teorema 2.3.1 (Sukirman, 1997)

Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka berlaku pernyataan berikut:

1. $a|1$ jika dan hanya jika $a = 1$ atau $a = -1$.

   Bukti.

   Jika $a = 1$ atau $a = -1$, maka jelas bahwa $a|1$. Sebaliknya, diketahui $a|1$ maka terdapat $k \in \mathbb{Z}$ sehingga $1 = ka$. Sehingga persamaan ini hanya akan dipenuhi oleh dua kemungkinan sebagai berikut: $k = 1$, $a = 1$ atau $k = -1$, $a = -1$. Maka berlaku jika $a|1$ maka $a = 1$ atau $a = -1$. Jadi terbukti $a|1$ jika dan hanya jika $a|1$ atau $a = -1$.

   ■

Contoh 13

1) $1|1$
2) $-1|1$

2. Jika $a|b$ dan $c|d$ maka $ac|bd$.

Bukti.

Diketahui bahwa $a|b$ dan $c|d$ yaitu ada $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga diperoleh $b = k_1 a$ dan $d = k_2 c$. Kalikan kedua persamaan tersebut dan diperoleh:

$$bd = (k_1 k_2)ac \text{ dengan } k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$$

maka $ac|bd$ terbukti.

■

Contoh 14

1) Jika $2|4$ dan $3|6$ maka $(2 \times 3)|(4 \times 6)$
2) Jika $3|9$ dan $4|8$ maka $(3 \times 4)|(9 \times 8)$
3) Jika $4|12$ dan $5|10$ maka $(4 \times 5)|(12 \times 10)$

3. Jika $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$.

Bukti.

Diketahui $a|b$ dan $b|c$, maka akan terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ sehingga

$$b = k_1 a \tag{2.1}$$

dan

$$c = k_2 b \tag{2.2}$$

Subtitusikan persamaan (2.1) ke persamaan (2.2), sehingga diperoleh

$$c = k_2 b = k_2(k_1 a) = (k_1 k_2)a = ka \text{ dengan } k = k_1 \cdot k_2 \in \mathbb{Z}$$

Jadi $a|c$ terbukti.

■

Contoh 15

1) Jika $3|6$ dan $6|12$ maka $3|12$
2) Jika $4|16$ dan $16|32$ maka $4|32$
3) Jika $7|14$ dan $14|28$ maka $7|28$

4. $a|b$ dan $b|a$ jika dan hanya jika $a = b$ atau $a = -b$.

Bukti.

Diketahui

$$a = k_1 b \tag{2.3}$$

dan

$$b = k_2 a \tag{2.4}$$

Kalikan persamaan (2.3) dengan persamaan (2.4) sehingga diperoleh hasil $ab = (k_1 k_2)(ab)$. Sehingga $k_1 k_2 = 1$, yaitu $k_1 = k_2$ atau $k_1 = k_2 = -1$. Jadi terbukti bahwa $a = b$ atau $a = -b$.

■

Contoh 16

1) $5|5$ dan $5|5$ karena $a = b$
2) $8|-8$ dan $-8|8$ karena $a = -b$

5. Jika $a|b$ dan $b \neq 0$, maka $|a| < |b|$.

Bukti.

Diberikan $b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Ambil nilai mutlak $|b| = |ac| = |a||c|$. Karena $b \neq 0$ maka $|c| \geq 1$. Jadi diperoleh $|b| = |a||c| \geq |a|$.

■

Contoh 17

1) Jika $6|18$ maka $|6| < |18|$
2) Jika $3|6$ maka $|3| < |6|$
3) Jika $2|8$ maka $|2| < |8|$

6. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(bx + cy)$ untuk sebarang bilangan bulat x dan y.

Bukti.

Diketahui $a|b$ dan $a|c$, maka terdapat $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Sehingga terdapat $b = k_1 a$ dan $c = k_2 a$. Untuk sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ berlaku: $bx + cy = k_1 ax + k_2 ay = (k_1 x + k_2 y)a$ dengan $k_1 x + k_2 y \in \mathbb{Z}$ yang artinya $a|(bx + cy)$.

■

Contoh 18

1) Jika $2|4$ dan $2|6$ maka $2|((2 \times 3) + (6 \times 3))$

2) Jika $3|12$ dan $3|9$ maka $3|(12 \times 2) + (9 \times 3))$
3) Jika $5|15$ dan $5|25$ maka $5|(15 \times 3) + (25 \times 2))$

Teorema 2.3.2 (Sukirman, 1997)
Jika a adalah suatu bilangan bulat dan b adalah bilangan bulat positif, maka ada tepat satu bilangan bulat q dan r sehingga $a = qb + r$ dimana $0 \leq r < b$.

Bilangan bulat q disebut hasil bagi dan r disebut sisa pembagian. Jika $r = 0$ maka dikatakan a habis dibagi oleh b dan ditulis $b|a$. Jika $r \neq 0$ maka ditulis $b \nmid a$.

Adapun sifat-sifat keterbagian adalah sebagai berikut:
1. $a|a$ (sifat reflektif)
2. $a|b$ dan $b|c$ maka $a|c$ (sifat transitif)
3. $a|b$ maka $a|mb$ untuk setiap bilangan bulat m
4. $a|b$ dan $a|c$ maka $a|b + c, a|b - c$ atau $a|bc$
5. $ab|c$ maka $b|c$ dan $a|c$
6. $a|b$ dan $a|c$ maka $a|(bx + by)$ untuk setiap bilangan bulat x dan y

2.4 Bilangan prima

Bilangan prima adalah bilangan yang sudah tidak asing lagi ditemui dalam cabang ilmu matematika, berikut akan dijabarkan definisi dan teorema yang lebih lanjut mengenai bilangan prima yang diambil dari (Burton, 2006).

Definisi 2.4.1
Suatu bilangan bulat dengan $n > 1$ dikatakan prima jika dan hanya jika pembagi positif bagi n adalah 1 dan n. Jika n tidak prima maka n dapat disebut sebagai komposit. Terdapat bilangan yang tidak dapat dikatakan sebagai prima ataupun komposit yaitu bilangan 1.

Berdasarkan definisi ini maka dapat dijabarkan beberapa bilangan prima antara lain 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 41, 43, 47, 53, 61, 67, 71, 73, 79, …
Beberapa bilangan komposit antara lain 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, …

Teorema 2.4.1

Setiap bilangan asli merupakan suatu perkalian dari bilangan prima.

Bukti.

Akan dibuktikan bilangan asli merupakan suatu hasil kali dari bilangan prima. Misalkan bahwa n adalah bilangan asli. Terdapat beberapa kemungkinan, yaitu:

1. Jika $n = 1$, maka n adalah hasil perkalian kosong dari bilangan prima.
2. Jika n merupakan bilangan prima, maka jelas terbukti bahwa n adalah perkalian dari bilangan prima.
3. Jika n merupakan komposit, maka terdapat $n = ab$ dimana $a, b < n$. Karena a dan b adalah perkalian dari bilangan prima, maka n juga merupakan perkalian dari bilangan prima.

Jadi terbukti bahwa bilangan asli merupakan suatu perkalian dari bilangan prima.

■

Teorema 2.4.2

Setiap bilangan bulat n dengan $n > 1$ dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti.

Jika n merupakan bilangan prima maka $n|n$ dan teorema telah terbukti. Misalkan n adalah bilangan komposit, maka n memiliki faktor selain 1 dan n. Ambil d_1 dan $d_1|n$ maka terdapat n_1 sehingga $n = d_1n_1$. Perlu diingat bahwa $d_1 \neq 1$ dan $d_1 \neq n$ yang berakibat $1 < n_1 < n$. Jika n_1 merupakan bilangan prima maka $n_1|n$. Jadi teorema terbukti.

■

Teorema 2.4.3

Jika n bilangan komposit, maka n memiliki suatu faktor k sedemikian rupa sehingga $1 < k < \sqrt{n}$.

Bukti.

Diketahui n bilangan komposit sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k dan m dimana $km = n$ dengan $1 < k < n$ dan $1 < m < n$. Jika k dan m lebih besar dari $\sqrt{n}$ maka $n = km > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Maka diperoleh $n > n$ dimana hal ini tidak dapat dibuktikan kebenarannya. Jadi salah satu dari k atau m haruslah lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$. Misalkan k lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$, maka diperoleh $1 < k < \sqrt{n}$. Jadi k adalah bilangan prima.

■

Teorema 2.4.4

Jika n bilangan komposit, maka n memiliki suatu faktor prima yang lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$.

Bukti.

Berdasarkan Teorema 2.4.4 diketahui bahwa n memiliki faktor k sedemikian sehingga $1 < k < \sqrt{n}$, maka k memiliki faktor prima. Misalkan p merupakan faktor prima sehingga $p \leq k$, maka diperoleh $p \leq k \leq \sqrt{n}$. Jadi teorema ini terbukti benar, begitu pula dengan kontraposisinya, yaitu jika n tidak memiliki faktor prima yang lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$ maka n bilangan prima.

■

Teorema 2.4.5

Jika p bilangan prima dan $p|ab$ maka $p|a$ atau $p|b$.

Bukti.

Diketahui bahwa p bilangan prima, maka p hanya memiliki faktor 1 dan p. Sehingga $FPB(a,p) = 1$ atau $FPB(a,p) = p$ untuk sebarang bilangan bulat a. Jika $FPB(a,p) = 1$ dan karena $p|ab$ maka $p|b$ dan jika $FPB(a,p) = p$ maka $p|a$. Jadi terbukti bahwan jika p bilangan prima maka $p|a$ atau $p|b$.

■

Teorema 2.4.6

Dua bilangan bulat a dan b disebut sebagai relatif prima atau prima satu sama lain ketika $\gcd(a,b) = 1$.

Bukti

Akan dibuktikan bahwa bilangan bulat a dan b adalah relatif prima ketika $\gcd(a,b) = 1$. Ingat kembali bahwa pasangan bilangan bulat mungkin saja menjadi relatif prima walupun kedua bilangan bulat bukan bilangan prima. Misalkan p adalah bilangan prima, menurut definisi bilangan prima diperoleh $\gcd(a,p) = 1$ jika dan hanya jika $p \nmid a$ adalah benar. Pembagi untuk p adalah 1 dan dirinya sendiri, sehingga $\gcd(a, p) = 1$ atau $\gcd(a, p) = p$. Jadi terbukti bahwa bilangan bulat relatif prima ketika $\gcd(a, b) = 1$.

■

Teorema 2.4.7

Misal diberikan a dan b adalah bilangan bulat, dimana keduanya bukan nol. Maka a dan b adalah relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $1 = ax + by$.

Bukti.

Akan dibuktikan a dan b relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $1 = ax + by$. Diketahui bahwa a dan b adalah bilangan bulat tak nol. Jika a dan b adalah relatif prima, sehingga $\gcd(a, b) = 1$. Ingat teorema sebelumnya dimana bilangan bulat a dan b dengan a dan b tak nol maka terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $\gcd(a, b) = ax + by$. Berdasarkan teorema tersebut maka jelas terdapat bilangan bulat x dan y yang mengakibatkan $1 = ax + by$. Sebaliknya, misalkan $1 = ax + by$. Karena $d|a$ dan $d|b$, maka haruslah $d|(ax + by)$ atau $d|1$. Sehingga berakibat $d = 1$ karena d adalah bilangan bulat positif. Jadi terbukti a dan b relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $1 = ax + by$.

■

2.5 Ketakberhinggaan Bilangan Prima

Bilangan prima, sama halnya dengan bilangan bulat, mempunyai jumlah yang tak berhingga. Bukti dari pernyataan ini terdapat dalam *Euclid's Elements*. Euclid menyatakan bahwa terdapat lebih banyak bilangan prima daripada sejumlah berhingga bilangan prima yang diberikan.

Sebagai bukti, akan digunakan pembuktian terbalik atau membuktikan kontradiksi dari pernyataan tersebut. Diasumsikan ada sejumlah terbatas bilangan prima $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$. Lalu, dilakukan operasi sebagai berikut:

$$Q = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$$

Didapat sebuah bilangan baru Q yang merupakan hasil perkalian seluruh bilangan prima ditambahkan dengan 1 (satu). Menurut Teori Fundamental Aritmetik, seluruh bilangan bulat positif dapat difaktorkan menjadi satu atau lebih bilangan prima. Dengan dasar tersebut, Q dapat difaktorkan menjadi satu atau lebih bilangan prima. Namun, tidak ada satu pun bilangan prima (yang telah diasumsikan berjumlah berhingga) yang dapat habis membagi Q karena apapun bilangan primanya, misalkan p_j, Q dibagi p_j selalu akan menghasilkan sisa minimal 1.

Jadi, terdapat suatu bilangan prima baru yang tidak termasuk dalam bilangan prima $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ yaitu Q sendiri bila prima atau faktor prima dari Q. Kesimpulan ini kontradiktif dengan asumsi sebelumnya bahwa ada sejumlah berhingga bilangan prima. Oleh karena itu, bilangan prima berjumlah tak berhingga (Rosen, 2007).

Teorema 2.5.1 (Křížek, dkk., 2021)
Bilangan prima memiliki jumlah yang tak berhingga.
Bukti.
Asumsikan sebaliknya bahwa hanya terdapat sejumlah bilangan prima yang berhingga yang dituliskan sebagai $p_1, p_2, \cdots, p_n$ dan himpunan

$$m = p_1 p_2 \cdots p_n + 1. \qquad (2.7)$$

Jika m dibagi dengan p_i maka hasilnya akan selalu menyisakan 1, maka dari itu tidak terdapat p_i yang membagi habis m. Berdasarkan teorema fundamental, m adalah prima lainnya atau m adalah komposit dan habis dibagi oleh prima yang berbeda dari $p_1, p_2, \cdots, p_n$. Hal ini berkontradiksi dengan asumsi awal bahwa hanya terdapat sejumlah bilangan prima yang berhingga. Jadi terbukti bahwa bilangan prima memiliki jumlah yang tak berhingga.

■

Contoh 19
Tentukan bilangan prima a, b dan c sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = c$
Penyelesaian.
Diketahui $a^2 - b^2 = c$ maka lakukan pemfaktoran sehingga diperoleh

$$(a - b)(a + b) = c$$

Karena a, b, c prima maka berdasarkan bentuk pemfaktoran diperoleh kemungkinan sebagai berikut:
$a - b = 1$

$a + b =$ prima

$a - b =$ prima

$a + b = 1$

Dapat diketahui bahwa satu-satunya bilangan prima yang memiliki selisih satu adalah $3 - 2 = 1$ dan tidak ada dua bilangan prima yang bila dijumlahkan akan diperoleh hasil 1. Jadi diperoleh $a = 3, b = 2$ dan $c = 5$.

Contoh 20

Tentukan semua bilangan bulat positif n sedemikian rupa sehingga $6n^2 + 5n - 4$ merupakan bilangan prima.

Penyelesaian.

Diketahui $6n^2 + 5n - 4$ maka lakukan pemfaktoran sehingga diperoleh $(3n + 4)(2n - 1)$ adalah bilangan prima. Berdasarkan bentuk pemfaktoran maka kemungkinan yang diperoleh adalah sebagai berikut:

1) $3n + 4 = 1$ maka $2n - 1$ adalah bilangan prima.
   Diperoleh $3n = -3, n = -1$ dimana hal ini tidak memenuhi syarat.
2) $3n + 4$ prima maka $2n - 1 = 1$.
   Diperoleh $2n = 2, n = 1$ maka $3n + 4 = (3 \times 1) + 4 = 7$ adalah bilangan prima.

Jadi nilai n yang memenuhi adalah $n = 1$.

2.6 Faktorial

Faktorial bilangan asli n merupakan hasil dari perkalian semua bilangan asli yang kurang atau sama dengan n. Faktorial biasanya akan dilambangkan dengan tanda seru atau !. Sehingga faktorial n dapat dituliskan kembali sebagai n! (Křížek, dkk., 2021).

Contoh 21

1! = 1

2! = $1 \times 2 = 2$

3! = $1 \times 2 \times 3 = 6$

4! $= 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

$7! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5.040$

$8! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40.320$

$9! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 362.880$

10!= $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10 = 3.628.800$, dan seterusnya.

2.6.1 Faktorial Prima

Berdasarkan persamaan (2.7) pada Teorema 2.5.1 maka diperoleh sebuah persamaan baru, yaitu

$$m = p! + 1 \tag{2.8}$$

dimana p merupakan prima terbesar, jika hanya terdapat bilangan prima yang berhingga. Sehingga untuk setiap bilangan asli terdapat $q \leq p$ yang mengakibatkan m/q akan menghasilkan sisa 1. Maka tidak ada bilangan prima yang kurang dari atau sama dengan p membagi m. Jadi, bilangan m adalah bilangan prima selanjutnya atau m habis dibagi bilangan prima yang lebih besar dari p. Maka hal ini berkontradiksi. Persamaan (2.8) disebut sebagai faktorial prima, walaupun p bukan bilangan prima (Křížek, dkk., 2021).

2.7 Primorial

Misalkan q adalah sembarang bilangan prima. Maka semua perkalian dari semua bilangan prima yang tidak melebihi q atau dapat dituliskan sebagai $q\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots q$. Primorial biasanya dilambangkan penulisannya dengan $q\#$ (Cejchan, dkk., 2022).

Contoh 22

$2\# = 2$

$3\# = 2 \cdot 3$

$5\# = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$7\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

$11\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$

$13\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$

$17\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17$

$19\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$

$23\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23$

$29\# = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29$, dan seterusnya.

2.8 Metode Pembuktian Matematika

Adapun disajikan beberapa metode pembuktian matematika yang akan digunakan dalam penelitian kali ini diambil dari (Hernadi, 2008).

2.8.1 Metode Kontradiksi

Kebenaran implikasi $p \Rightarrow q$ dibuktikan dengan diketahui p dan $\sim q$. Dengan kata lain pembuktian kontradiksi terjadi dengan adanya pernyataan yang bertentangan. Keuntungan dari metode ini adalah diperolehnya dua pernyataan (kenyataan) yang bertentangan. Sedangkan, kelemahannya adalah tidak ada yang tahu pasti dimana kontradiksi akan terjadi.

Contoh 23

Misalkan himpunan A didefinisikan sebagai interval setengah terbuka. $A \coloneqq [0,1)$. Buktikan maksimum A tidak ada.

Bukti.

Bentuk implikasi dari pernyataan di atas adalah “jika $A \coloneqq [0,1)$ maka maksimum A tidak ada. Misalkan maksimum A ada, katakan p. Sedemikian sehingga $0 < p < 1$ yang mengakibatkan $\frac{1}{2}p < \frac{1}{2}$ dan $\frac{1}{2}(p+1) < 1$, maka

$$p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p < \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(p+1) < 1$$

Terdapat dua pernyataan yang diperoleh dari hasil tersebut, yaitu:

1) p maksimum A, yaitu elemen terbesar himpunan A.
2) Ada $q \in A$, yaitu $q \coloneqq \frac{1}{2}(p+1)$ yang lebih besar dari p.

Karena kedua pernyataan tersebut kontradiksi maka pengandaian awal salah. Jadi haruslah tidak ada maksimum.

∎

Contoh 24

Buktikan jika r bilangan real sedemikian sehingga $r^2 = 2$, maka r irasional.

Bukti.

Akan dibuktikan bahwa r irasional dengan menggunakan metode kontradiksi. Misalkan $r^2 = 2$ dan r tidak irasional. Karena r rasional, maka terdapat bilangan bulat m dan n sedemikian sehingga $r = \frac{m}{n}$. Asumsikan bahwa m dan n tidak memiliki *common divisor* yang lebih dari 1, karena jika m dan n memiliki *common divisor* maka pembilang dan penyebut dapat dibagi dengan *greatest common divisor* tersebut. Maka $r^2 = \frac{m^2}{n^2}$ dan diperoleh $m^2 = r^2n^2$. Karena $r^2 = 2$, maka diperoleh $m^2 = 2n^2$. Oleh karenanya maka haruslah m^2 genap, maka n haruslah genap juga. Suatu kelipatan perseketuan (*common divisor*) lebih besar dari 1 diperoleh karena m dan n keduanya genap. Hal ini jelas berkontradiksi dengan asumsi awal bahwa m dan n tidak mempunyai kelipatan persekutuan lebih besar dari 1. Jadi pengandaian salah dan yang benar adalah r bilangan rasional.

■

1.8.2 Metode Induksi

Induksi matematika adalah metode pembuktian untuk proporsisi terkait dengan bilangan bulat positif. Induksi matematika adalah suatu teknik pembuktian yang baku dalam matematika. Metode ini dapat mempersingkat langkah-langkah pembuktian bahwa semua bilangan bulat termasuk dalam suatu himpunan kebenaran dengan jumlah langkah yang terbatas.

Dalam melakukan pembuktian dengan metode ini diperlukan adanya prinsip induksi matematika. Prinsip induksi matematika adalah prinsip yang digunakan untuk inferensi terhadap pernyataan tentang n dimana n berjalan pada himpunan bilangan bulat,biasanya himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ atau pada himpunan bagian bilangan asli, $N_1 \subset \mathbb{N}$. Bilangan asli n tersebut biasa dianyatakan dengan $P(n)$.

Prinsip induksi matematika sederhana adalah sebagai berikut:

a. Misalkan $P(n)$ adalah proporsi bilangan bulat positif dan akan dibuktikan bahwa $P(n)$ adalah benar untuk semua bilangan bulat positif n. Lakukan langkah-langkah berikut untuk melakukan pembuktian:

(i) $P(1)$ benar.

(ii) Asumsikan bahwa $P(n)$benar, maka $P(n+1)$ benar untuk setiap $n \geq 1$.

Sehingga $P(n)$ benar untuk semua bilangan bulat positif n.

b. Basis Induksi

Basis induksi digunakan untuk memperlihatkan bahwa suatu pernyataan benar jika n diganti dengan 1, dimana 1 adalah bilangan bulat positif terkecil. Kemudian buat impilkasi untuk fungsi berikutnya benar untuk setiap bilangan bulat positif.

c. Langkah Induksi

Langkah induksi berisi pengandaian atau asumsi yang akan menunjukkan bahwa $P(n)$ benar. Asumsi tersebut biasa disebut dengan hipotesis induksi.

Contoh 25

Tunjukkan bahwa untuk $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = n(n+1)/2$ melalui induksi matematika.

Bukti.

(i) Basis induksi

Akan ditujukkan $p(1)$ benar. $P(1)$ benar $\rightarrow n = 1$ diperoleh dari:

$1 = 1(1+1) = 2$

$1 = 1(2)/2$

$1 = 2/2$

$1 = 1$

(ii) Langkah induksi

Misalkan bahwa $P(n)$ benar. Asumsikan $1 + 2 + 3 + \cdots + n(n+1) = n(n+1)/2$ adalah benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(n+1)$ juga benar. Sehingga diperoleh:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1)$

$= (n+1)[(n+1)+1]/2$

$= (1 + 2 + 3 + \cdots n) + (n+1)$

$= [n(n+1)/2] + (n+1)$

$= [(n^2+n)/2] + (n+1)$

$= [(n^2+n)/2] + [(2n+2)/2]$

$= (n^2 + 3n + 2)/2$

$= (n^2 + 1)(n + 2)/2$

$= (n + 1)[(n + 1) + 1]/2$

Karena langkah (i) dan (ii) benar maka terbukti bahwa $n \geq 1, 1 + 2 + 3 + \cdots + n = n(n + 1)/2$ untuk semua bilangan bulat positif n.

■

Contoh 26

Buktikan bahwa jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2 dengan induksi matematika.

Bukti.

(i) Basis induksi

Akan ditunjukkan $P(1)$ benar. $P(1)$ benar → jumlah 1 buah bilangan ganjil positif pertma adalah $1^2 = 1$.

(ii) Langkah induksi

Misalkan bahwa $P(n)$ benar. Sehingga $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ adalah benar. Akan ditunjukkan bahwa $P(n + 1)$ juga benar. Maka akan diperoleh

$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) + (2n + 1)$

$= [1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)] + (2n + 1)$

$= n^2 + (2n + 1)$

$= n^2 + 2n + 1$

$= (n + 1)^2$

Karena langkah (i) dan (ii) benar maka terbukti untuk jumlah n buah bilangan ganjil positif pertama adalah n^2.

■

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil Tahun Akademik 2022/2023 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang dilakukan adalah studi literatur dengan literatur utama adalah *On Remarkable Properties of Primes Near Factorials and Primorials* oleh Antonin Cejchan, Michal Krizek dan Lawrence Somer.

Adapun langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian kali ini antara lain:

1. Mengkaji tentang bilangan prima, faktorial, primorial, faktorial mendekati prima, dan primorial mendekati prima.
2. Menjabarkan definisi, lemma, dan teorema terkait pembuktian faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima.
3. Membuktikan faktorial mendekati prima dan primorial mendekati prima dengan berlandaskan dasar teori yang telah dikaji.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan didapat kesimpulan bahwa bilangan prima diperoleh melalui pendekatan faktorial dan primorial. Jika bilangan prima $p > n! + 1$, maka $p > n! + n$ juga prima. Selain itu, jika bilangan prima p memenuhi $n! + 1 < p < n! + r^2$ maka $p - n!$ juga prima dengan r adalah bilangan prima terkecil sehingga $r > n$. Selanjutnya, jika prima p memenuhi $n! - s^2 < p < n! - 1$ maka $n! - p$ juga prima dengan $n > 2$ dan s adalah bilangan prima terbesar sehingga $s < n$. Jika prima p memenuhi $q\# + 1 < p < q\# + r^2$ maka $p - q\#$ juga prima dengan $q < r$ adalah bilangan prima berurutan.

5.2 Saran

Beberapa konjektur atau dugaan pada paper telah diberikan dan dapat dijadikan sebagai penelitian lanjutan.

DAFTAR PUSTAKA

Burton, D. (1998). *Elementary Number Theory* (Fourth Edition). United States of America:McGraw-Hill.

Burton, D. (2006). *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition* (6 ed.). United states of America:McGraw-Hill.

Cejchan, A., Křížek, M., & Somer, L. (2022). On Remarkable Properties of Primes Near Factorials and Primorials. *Journal of Integer Sequences*, *25*.

Hernadi, J. (2008). Metoda Pembuktian dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *2*(1), 1–13.

Křížek, M., Somer, L., & Šolcová, A. (2021). *From Great Discoveries in Number Theory to Applications*. Springer. Switzerland:Springer.

Polarida., Sirait, A., & M, Musraini. (2016). *Menghitung Banyaknya Bilangan Prima yang Lebih Kecil Dari Atau Sama Dengan Suatu Bilangan Bulat n*. Riau:University of Riau

Puspita, S., Noviani, E., & Prihandono, B. (2015). Metode Solovay-Strassen untuk Pengujian Bilangan Prima. *Buletin Ilmiah Mat. Stat Dan Terapannya*, *04*(1), 85–94.

Rizal, S., & Lukito, A. (2012). Bilangan Prima Fibonacci. *Jurnal Matematika*, *01*(01), 0–216.

Rosen, K. H. (2007). *Discreate Mathematics and Its Application* (Sixth Edition). New York:McGraw-Hill.

Sabirin, M. (2014). Konsep Ketakhinggaan dalam Matematika. *Jurnal Pendidikan Matematika*, *02*(1), 1–7.

Soedadiatmojo, Soeratno, & Sumunar. (1983). *Matematika I*. Depdikbud. Jakarta.

Stein, W. (2008). *Elementary Number Theory: Primes, Congruences, and Secrets* (S. Axler & K. A. Ribet, Ed.). Washington DC:Springer.

Sugiyono., Sutopo, B., Widoyoko, R.D.T., Puspitasari, Indah., & Famukhit, M.L . (2020). Mengurai Problematika Pembelajaran pada Masa Pandemi dalam Rangka Menyiapkan SDM Unggul. *Prosiding Seminar Nasional Dalam Jaringan Hasil Penelitian dan Abdimas Tahun 2020*. Dalam Mukodi (Ed.), (hlm. 1–592).

Sukirman. (1997). *Ilmu Bilangan*. Universitas Terbuka. Jakarta.

Triandi, B. (2014). Aplikasi Tes Bilangan Prima Menggunakan Rabin-Miller, GCD, Fast Exponensial, dan Faktorisasi Prima Untuk dasar Matematis Kriptografi. *Seminar Nasional Informatika* (hlm. 227–232). STMIK Potensi Utama.