STUDI TRANSFORMASI SAWI DAN APLIKASINYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB) LINIER

(Skripsi)

Oleh

ELVINA HALIM

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

STUDY OF SAWI TRANSFORM AND ITS APPLICATION IN SOLVING THE SYSTEMS OF LINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION (ODE)

By

Elvina Halim

There are many problems in nature whose solutions are obtained through mathematical concepts. One of the most common mathematical concepts is a mathematical concept classified in an initial value problem, for example, a system of ordinary differential equations equipped with initial values. One tool that can solve the initial value problem is the Sawi transform. This thesis describes the study of initial value problems in the form of a system of linear ordinary differential equations and their solution using the Sawi transform. In addition, as part of implementing the theory produced in this thesis, 2 (two) case examples were selected (a first-order chemical reaction system with three certain chemicals and a mass-spring system with forced motion) to be solved using the Sawi transform. For the problem solution to be interpreted and simple in understanding, in the 2 (two) case studies discussed and focused on the concentration of the reacting chemical, simulations were carried out for several different initial values and reaction rate constants. Compared with other methods (Laplace transform), the results obtained from using the Sawi transform for the cases discussed show that the analytic solutions for the selected initial values have similar solutions.

Keywords : Sawi Transform, System of Linear Ordinary Differential Equations, Inverse Sawi Transform, First Order Chemical Reaction System, Forced Motion Mass-Spring System

ABSTRAK

STUDI TRANSFORMASI SAWI DAN APLIKASINYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB) LINIER

Oleh

Elvina Halim

Terdapat banyak persoalan di alam yang solusinya diperoleh melalui konsep matematika. Salah satu konsep matematika yang banyak dijumpai adalah konsep matematika yang diklasifikasikan dalam sebuah masalah nilai awal, misalnya sistem persamaan diferensial biasa yang dilengkapi dengan nilai-nilai awal. Salah satu alat yang dapat digunakan dalam menyelesaikan masalah nilai awal yang dimaksud adalah transformasi Sawi. Dalam skripsi ini dideskripsikan studi tentang studi masalah nilai awal dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa linier dan solusinya menggunakan transformasi Sawi. Selain itu, sebagai bagian dari implementasi teori yang dihasilkan dalam skripsi ini, dipilih 2 (dua) contoh kasus (sistem reaksi kimia orde satu dengan tiga zat kimia tertentu dan sistem pegas massa dengan gerak paksa (*forced motion*) untuk diselesaikan dengan menggunakan transformasi Sawi. Agar solusi permasalahan dapat diinterpretasikan dan sederhana dalam pemahamannya maka pada 2 (dua) studi kasus yang dibahas dan difokuskan pada konsentrasi zat kimia yang bereaksi, dilakukan simulasi untuk beberapa nilai awal dan konstanta laju reaksi yang berbeda. Jika dikomparasikan dengan metode lain (transformasi Laplace), hasil yang diperoleh dari penggunaan transformasi Sawi terhadap kasus yang dibahas menunjukan bahwa solusi analitik untuk nilai awal yang dipilih memiliki kemiripan solusi.

Kata kunci : Transformasi Sawi, Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier, Sistem Reaksi Kimia Orde Satu, Sistem Pegas Massa Gerak Paksa

STUDI TRANSFORMASI SAWI DAN APLIKASINYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB) LINIER

Oleh

ELVINA HALIM

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
Sarjana Matematika

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **STUDI TRANSFORMASI SAWI DAN APLIKASINYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL (PDB) LINIER**

Nama Mahasiswa : **Elvina Halim**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1917031020**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.	**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**
NIP. 19690213 199402 1 001	NIP. 19740316 200501 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** .....

Sekretaris : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** .....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** .....

2. Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **15 Maret 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Elvina Halim**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031020**
Jurusan	: **Matematika**
Judul	: **STUDI TRANSFORMASI SAWI DAN APLIKASINYA DALAM PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA (PDB) LINIER**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 15 Maret 2023
Penulis,

Elvina Halim
NPM. 1917031020

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Lampung pada tanggal 7 Maret 2001, sebagai anak tunggal, dari Bapak Halim Senjaya dan Ibu Linda Wati.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar (SD) diselesaikan di SDN 3 Sawah Brebes Bandar Lampung pada tahun 2013, pendidikan Sekolah Menengah Pertama (SMP) diselesaikan di SMPN 4 Bandar Lampung pada tahun 2016, dan pendidikan Sekolah Menengah Akhir (SMA) diselesaikan di SMAN 10 Bandar Lampung pada tahun 2019.

Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung menjadi Anggota Generasi Muda Himpunan Jurusan Matematika 2019 . Penulis juga pernah menjadi Anggota Divisi Sosial dan Kewirausahaan Unit Kegiatan Mahasiswa Buddha Universitas Lampung selama tiga periode, yaitu periode 2020/2021, periode 2021/2022, dan periode 2022/2023.

PERSEMBAHAN

Puji syukur ku panjatkan kepada *Sanghyang Adi Buddha*, para Buddha, *Bodhisatva*, *Mahasatva* yang telah memberikan berkah dan perlindungan dalam menjalani kehidupan.

Karya sederhana ini aku persembahkan kepada kedua orangtuaku yang tidak pernah putus mendoakan dan memotivasi anak tunggalnya hingga tahap akhir penyelesaian skripsi ini. Terima kasih atas kemurahan hati pengertian dan semua pengorbanan yang kalian lakukan hingga akhir tingkat pendidikanku.

Aku sangat bersyukur atas kehadiran kalian kedua orang tuaku dihidupku.

KATA INSPIRASI

“ Lakukan hal-hal sulit selagi mudah dan lakukan hal-hal besar saat hal itu masih kecil. “

Lao Tzu

“ Perjalanan seribu mil harus dimulai dengan satu langkah. “

Lao Tzu

“ Kehidupan adalah perubahan yang alami dan spontan. Jangan menolaknya, karena akan menimbulkan kesedihan. Biarlah sesuai dengan kenyataan. Biarkan mengalir secara natural, berjalan apa adanya. “

Lao Tzu

SANWACANA

Puji syukur kepada *Sanghyang Adi Buddha*, para Buddha, *Bodhisatva*, *Mahasatva* yang telah memberikan karunia serta kasih-Nya sehingga berkah karma baik dan lindungan *Tiratana*, penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul *"Studi Transformasi Sawi dan Aplikasinya dalam Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa (PDB) Linier"*. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) pada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku pembimbing utama atas kesediaan waktu, pemikiran dalam memberikan evaluasi, arahan, dan saran yang membangun dalam proses penyusunan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku pembimbing kedua atas kesediaan waktu, saran, dan arahan selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si., selaku dosen penguji atas kesediaan waktu, saran, dan masukan yang membangun selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Para Dosen dan Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

7. Papa, Mama, dan keluargaku yang selalu mendoakan, mendukung, dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan perkuliahan.
8. Diriku yang sudah bertahan sejauh ini dari awal menempuh pendidikan hingga menyelesaikan perkuliahan, mampu menghadapi senang, sedih, dan semua keadaan dalam kehidupan.
9. Albert, lelaki yang menemani saya dari saya menggarap laporan kuliah praktik hingga sekarang.
10. Tyara, Icha, Roro, Wina, Upi, serta sahabat maupun orang dekatku atas keceriaan dan dukungan serta semangat yang diberikan kepada penulis.
11. Triya dan Ali, teman seperjuangan kuliah praktik yang selama ini menemani saya dikala pembuatan skripsi.
12. Bang Danu, kakak tingkat satu dosen pembimbing dengan saya yang selalu membantu ketika saya mengalami kesulitan selama menyusun skripsi ini.
13. Koko, cece, teman-teman, dan adik-adik UKM Buddha Unila yang memberi dukungan moral selama ini.
14. Teman-teman mahasiswa jurusan matematika angkatan 2019 serta seluruh pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Bandar Lampung, 15 Maret 2023
Penulis,

Elvina Halim

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR iii

DAFTAR TABEL iv

I. PENDAHULUAN 1

1.1 Latar Belakang 1

1.2 Tujuan Penelitian 3

1.3 Manfaat Penelitian 3

II. TINJAUAN PUSTAKA 4

2.1 Persamaan Diferensial Biasa 4

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier 4

2.3 Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linier 7

2.4 Transformasi Sawi 8

2.5 Karakteristik Transformasi Sawi 11

2.6 Transformasi Sawi dari Fungsi Turunan 13

2.7 Dualitas antara Transformasi Laplace-Sawi 15

2.8 Invers Transformasi Sawi 16

2.9 Transformasi Sawi untuk Sistem Persamaan Diferensial 18

III. METODE PENELITIAN 22

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 22

3.2 Metode Penelitian 22

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN 23

4.1 Aplikasi Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier dalam Kehidupan Nyata 23

4.1.1 Reaksi Kimia Orde Satu dari Tiga Zat Kimia Tertentu 23

4.1.2 Sistem Pegas Massa Gerak Paksa *(Forced Motion)* 25

4.2 Algoritma Transformasi Sawi Untuk Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier 26

4.3 Aplikasi Transformasi Sawi pada Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier 27

4.3.1 Aplikasi Transformasi Sawi pada Penyelesaian Sistem Reaksi Kimia Orde Satu Untuk Tiga Suatu Zat Kimia 27

4.3.2 Aplikasi Transformasi Sawi pada Penyelesaian Sistem Pegas Massa Gerak Paksa *(Forced Motion)* 43

4.4 Interpretasi Penyelesaian Kedua Persoalan dalam Bentuk Grafik dan Tabel 59

4.4.1 Interpretasi Penyelesaian Sistem Reaksi Kimia dari Tiga Zat Kimia Tertentu Dalam Bentuk Grafik dan Tabel 59

4.4.2 Interpretasi Penyelesaian Sistem Pegas Massa Gerak Paksa dalam Bentuk Grafik dan Tabel 70

V. KESIMPULAN DAN SARAN 73

5.1 Kesimpulan 73

5.2 Saran 74

DAFTAR PUSTAKA 75

LAMPIRAN 77

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 1. Sistem pegas massa dengan sebagian tekstur kasar 25

Gambar 2. Grafik solusi $C_1(t)$ yang menggambarkan suatu zat kimia L selama waktu t dengan variasi nilai β dan k_1 yang berbeda untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2)..... 62

Gambar 3. Grafik solusi $C_2(t)$ yang menggambarkan konsentrasi suatu zat kimia M selama waktu t dengan variasi nilai β, k_1, dan k_2 yang berbeda untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2) 68

Gambar 4. Grafik solusi $C_3(t)$ yang menggambarkan konsentrasi dari suatu zat kimia N selama waktu t dengan variasi nilai β, k_1, dan k_2 yang berbeda untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2)..... 70

Gambar 5. Grafik solusi $x_1(t)$ dan $x_2(t)$ yang menggambarkan perpindahan pegas yang dihubungkan dengan massa m_1 dan m_2 secara mendatar selama waktu t untuk sistem persamaan (4.3) dengan kondisi awal (4.5) 72

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 1. Tabel transformasi Sawi pada fungsi $f(t)$ 10

Tabel 2. Tabel Invers Transformasi Sawi dari Fungsi $T(\mu)$ 17

Tabel 3. Simulasi Konsentrasi $C_1(t)$ suatu zat kimia L selama waktu t dengan variasi nilai berbeda pada nilai β dan k_1 untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2) 61

Tabel 4. Simulasi Konsentrasi $C_2(t)$ suatu zat kimia M selama waktu t dengan variasi nilai $\beta = 1$, k_1, dan k_2 yang berbeda untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2) 66

Tabel 5. Simulasi Konsentrasi $C_2(t)$ suatu zat kimia M selama waktu t dengan variasi nilai $\beta = 2$, k_1, dan k_2 yang berbeda untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2) 67

Tabel 6. Simulasi Konsentrasi $C_3(t)$ suatu zat kimia N selama waktu t dengan variasi nilai $\beta = 1$, k_1, dan k_2 yang berbeda untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2) 68

Tabel 7. Simulasi Konsentrasi $C_3(t)$ suatu zat kimia N selama waktu t dengan variasi nilai $\beta = 2$, k_1, dan k_2 untuk sistem persamaan (4.1) dengan kondisi awal (4.2)..... 69

Tabel 8. Simulasi Perpindahan pegas x_1 dan x_2 selama waktu t 71

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Metode transformasi integral merupakan salah satu alat matematika yang digunakan oleh para peneliti untuk menyelesaikan persoalan dalam berbagai ilmu pengetahuan, seperti astronomi, ekonomi, telekomunikasi, statistik, ilmu termal, ilmu kelautan, biologi, kimia, fisika, matematika, kedokteran, aerodinamika, teknik sipil, teori kontrol, kardiologi, mekanika, dan banyak bidang lainnya yang dapat dinyatakan dalam berbagai bentuk pemodelan matematika, baik dalam bentuk persamaan maupun sistem persamaan dapat ditangani dengan bantuan transformasi integral dengan mengubahnya menjadi bentuk matematika. Saat ini banyak metode transformasi integral yang dikembangkan untuk menyelesaikan persoalan linier, seperti transformasi Laplace, transformasi Fourier, transformasi Sumudu dan lain-lain. Namun untuk transformasi integral yang baru dikembangkan belakangan terus diteliti oleh para peneliti kelebihan dan karakteristik dari transformasi integral tersebut.

Metode Transformasi Sawi merupakan salah satu bentuk transformasi integral yang diperoleh dari integral Fourier klasik sehingga didapatkan transformasi Sawi dan sifat-sifat dasarnya. Transformasi Sawi diperkenalkan oleh Mohand dan Mahgoub pada tahun 2019 untuk memudahkan proses penyelesaian persamaan diferensial biasa dan parsial dalam domain waktu (Mohand & Mahgoub, 2019). Transformasi Sawi memiliki keunggulan dalam mereduksi kerja komputasi dan kesalahan hasil analisis terhadap solusi yang tepat (Nadeem et al., 2022).

Pada tahun 2019 penelitian yang dilakukan oleh Aggarwal & Singh mencari solusi dari pertumbuhan dan penurunan penduduk dengan metode transformasi Sawi dengan mengaplikasikan solusi numerik untuk menjelaskan efektivitas dari transformasi Sawi. Hasil penelitian yang dilakukan membuktikan bahwa transformasi Sawi cukup berguna untuk mencari solusi masalah pertumbuhan dan penurunan penduduk (Aggarwal & Singh, 2019). Di tahun yang sama, Aggarwal & Gupta menyajikan dualitas antara transformasi Sawi dan transformasi integral yang bertujuan untuk membangun hubungan dualitas antara beberapa transformasi integral dengan transformasi Sawi (Aggarwal & Gupta, 2019).

Pada tahun 2020 penelitian yang dilakukan oleh Aggarwal, dkk menyajikan Transformasi Sawi dari fungsi Bessel dengan aplikasi untuk mengevaluasi integral tentu. Dari penelitian tersebut menunjukkan hasil bahwa transformasi Sawi memberikan nilai integral tertentu, yang berisi fungsi Bessel dalam integral dalam waktu yang sangat singkat dan tanpa melakukan perhitungan besar (Aggarwal et al., 2020).

Pada tahun 2021 penelitian yang dilakukan oleh Sahoo menggunakan transformasi Sawi untuk menyelesaikan masalah pada Hukum Pendinginan Newton dan memberikan satu aplikasi untuk menunjukkan efektivitas transformasi Sawi untuk menyelesaikan masalah pada Hukum Pendinginan Newton (Sahoo, 2021). Pada tahun yang sama, Aggarwal dan Higazy meneliti tentang aplikasi transformasi Sawi untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan diferensial biasa serta penerapannya dalam sistem reaksi kimia orde satu berseri. Hasil dari penelitian tersebut menunjukkan bahwa transformasi Sawi dapat menyelesaikan solusi dari sistem persamaan diferensial biasa (Aggarwal & Higazy, 2021).

Pada tahun 2022 penelitian yang dilakukan oleh Baleanu, dkk berkaitan dengan stabilitas Hyers-Ulam persamaan diferensial linier orde ke-n menggunakan transformasi Sawi. Penelitian tersebut bertujuan untuk mendapatkan gambaran umum hasil stabilitas Hyers-Ulam untuk persamaan diferensial linier homogen dan non homogen (Baleanu et al., 2022).

Berdasarkan beberapa penelitian dari transformasi Sawi, muncul ketertarikan untuk mengkaji lebih dalam metode transformasi Sawi dimana pada penelitian ini akan diambil persoalan kimia fisik untuk mendapatkan penyelesaian analitik dari konsentrasi suatu zat kimia dalam suatu sistem reaksi kimia dan juga diambil persoalan sistem pegas massa untuk menentukan posisi pegas dalam sistem pegas massa gerak paksa *(forced motion)* dengan menggunakan transformasi Sawi. Kemudian dilakukan simulasi dari beberapa nilai awal dan konstanta laju reaksi berbeda pada konsentrasi zat kimia yang bereaksi serta dilakukan simulasi dari pergerakan posisi benda selama waktu t dari sistem pegas massa.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mencari penyelesaian dari masalah nilai awal yang ditentukan dari sistem reaksi kimia orde satu dari tiga zat kimia tertentu dan sistem pegas massa gerak paksa *(forced motion)* dengan menggunakan metode transformasi Sawi.

1.3 Manfaat Penelitian

1. Memperluas pengetahuan dalam pengembangan keilmuan khususnya dalam bidang matematika mengenai perkembangan integral transformasi dalam menyelesaikan sistem persamaan diferensial.
2. Sebagai referensi bagi pembaca untuk penelitian selanjutnya dan dapat memberikan motivasi dalam mempelajari dan mengembangkan ilmu matematika khususnya di bidang persamaan diferensial.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan diferensial yang memuat turunan biasa dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. (Ross, 2010)

Contoh :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = \sin t \tag{2.2}$$

Pada persamaan (2.1) variabel x merupakan variabel bebas tunggal dan variabel y merupakan variabel terikat sementara Persamaan (2.2) variabel t merupakan variabel bebas tunggal dan variabel x merupakan variabel terikat .

2.2 Sistem Persamaan Diferensial Biasa Linier

Sistem persamaan diferensial adalah persamaan yang terdiri dari dua atau lebih persamaan yang saling terkait. Sistem persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua, yaitu sistem persamaan diferensial linier dan nonlinier. (Wibowo et al., 2013)

Pada persamaan (2.3) merupakan bentuk standar dari sistem persamaan diferensial linier homogen orde satu :

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \mathrm{a}_{1n}x_n \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \mathrm{a}_{2n}x_n \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + \mathrm{a}_{nn}x_n \end{aligned} \tag{2.3}$$

dengan $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ bernilai konstan dan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ merupakan variabel terikat. Persamaan (2.3) dapat ditulis dalam bentuk : $\dot{x} = Ax$.(Ross, 2010)

Contoh:

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linier

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 2y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sistem persamaan diferensial pada sistem persamaan (2.4) merupakan sistem persamaan diferensial linier homogen.

Definisi 2.2.1

Misalkan A matriks $n \times n$. Untuk $t \in R$, berlaku

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} \tag{2.5}$$

Dengan A matriks $n \times n$, e^{At} adalah matriks $n \times n$ yang dapat dihitung dengan nilai eigen dan vektor eigen dari A. (Wibowo et al., 2013)

Teorema 2.2.2

Jika A matriks $n \times n$. Untuk $x_0 \in R^n$, maka masalah nilai awal $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ memiliki penyelesaian tunggal yaitu $x(t) = e^{At} x_0$.(Wibowo et al., 2013).

Bukti:

Untuk membuktikan teorema 2.2.2 , pertama-tama cari turunan dari fungsi eksponensial e^{At} menggunakan Lemma berikut

Lemma. Jika A matriks persegi, maka

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At}$$

Bukti. Karena A komutatif dengan dirinya sendiri, maka dengan menggunakan definisi turunan dengan limit didapat

$$\frac{d}{dt} e^{At} = \lim_{h \to 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{At} \frac{\left(e^{Ah} - I\right)}{h}$$

$$= e^{At} \lim_{h \to 0} \lim_{k \to \infty} \left(A + \frac{A^2 h}{2!} + \ldots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right)$$

$$= Ae^{At}.$$

Dari lemma yang sudah dibuktikan sebelumnya, jika $x(t) = e^{At} x_0$, maka

$$x'(t) = \frac{d}{dt} e^{At} x_0 = Ae^{At} x_0 = Ax(t)$$

Untuk semua $t \in \mathbb{R}$ dan $x(0) = Ix_0 = x_0$. Jadi $x(t) = e^{At} x_0$ adalah solusinya. Untuk melihat bahwa $x(t) = e^{At} x_0$ adalah penyelesaian tunggal, misalkan $x(t)$ adalah sebarang penyelesaian dari masalah nilai awal $x(0) = x_0$ dan tetapkan

$$y(t) = e^{-At}x(t)$$

Maka dari lemma di atas dan mengingat bahwa $x(t)$ merupakan solusi dari $\dot{x} = Ax$ dengan masalah nilai awal $x(0) = x_0$

$$\begin{aligned} y'(t) &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Untuk semua $t \in \mathbb{R}$ karena e^{-At} dan A komutatif. Sehingga, $y(t)$ merupakan konstanta. Saat $t = 0$ menunjukkan bahwa $y(t) = x_0$ dan oleh karena itu setiap solusi dari masalah nilai awal $x(0) = x_0$ diberikan oleh $x(t) = e^{At}y(t) = e^{At}x_o$. Penjelasan tersebut melengkapi pembuktian teorema 2.2.2 (Perko, 1991).

2.3 Solusi Sistem Persamaan Diferensial Linier

Definisi 2.3.1

1. Diberikan sistem persamaan diferensial linier homogen $\dot{x} = Ax$ dengan x vektor $n \times 1$. Himpunan n penyelesaian yang bebas linier dari sistem persamaan diferensial linier disebut himpunan fundamental dari sistem persamaan diferensial linier.
2. Matriks kolom yang terdiri dari himpunan fundamental dari penyelesaian sistem persamaan diferensial linier disebut matriks fundamental dari sistem persamaan diferensial linier, yaitu jika fungsi vektor $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$ yang di definisikan oleh

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{pmatrix}, x^{(2)} = \begin{pmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{pmatrix} \ldots, x^{(n)} = \begin{pmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ \vdots \\ x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Maka matriks

$$M(t)=\begin{pmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

disebut matriks fundamental dari sistem persamaan diferensial linier.(Ross, 2010)

Definisi 2.3.2

Diberikan sistem persamaan diferensial linier homogen $\dot{x}=Ax$ dengan x vektor $n\times 1$. Penyelesaian umum dari sistem persamaan diferensial linier adalah $c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\ldots+\mathrm{c}_n x^{(n)}$ dengan $c_1,c_2,\ldots,\mathrm{c}_n$ adalah n konstanta sebarang dan $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n)}$ adalah himpunan solusi fundamental dari sistem persamaan diferensial linier. (Ross, 2010)

2.4 Transformasi Sawi

Jika diberikan himpunan A dengan anggotanya adalah fungsi orde eksponensial berpangkat, sehingga A dapat ditulis sebagai

$$A=\left\{ f(t):\exists M,k_1,k_2>0.\left|f(t)\right|<Me^{\frac{|t|}{k_j}},\ \ jika\ t\in(-1)^j\times[0,\infty)\right\} \tag{2.8}$$

(Aggarwal & Higazy, 2021)

Dengan M adalah bilangan berhingga dan k_1,k_2 adalah bilangan berhingga atau tak berhingga. Maka transformasi Sawi dari fungsi $f(t),t\geq 0$ yang dinotasikan dengan operator $S(.)$ didefinisikan sebagai:

$$S\{f(t)\}=T(\mu)=\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt,\mu>0 \tag{2.9}$$

(Aggarwal & Higazy, 2021; Mohand & Mahgoub, 2019)

Untuk mencari transformasi Sawi pada suatu fungsi $f(t)$, di bawah ini disajikan beberapa contoh transformasi sawi pada suatu fungsi $f(t)$.

Contoh

Misalkan $f(t)=1$, maka dapat dicari transformasi Sawi dari $f(t)=1$ dengan definisi transformasi Sawi

$$S\{1\}=\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty 1e^{-\frac{t}{\mu}}dt=\frac{1}{\mu^2}\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-\frac{t}{\mu}}dt=\frac{1}{\mu^2}\lim_{b\to\infty}\left[-\mu e^{-t}\right]_0^b=\frac{1}{\mu}$$

Misalkan $f(t)=t$, maka

$$S\{t\}=\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty te^{-\frac{t}{\mu}}dt$$

Misal $u=-\frac{t}{\mu}$; $\frac{du}{d\mu}=\frac{t}{\mu^2}$; $d\mu=\frac{\mu^2}{t}du$, maka

$$S\{t\}=\int\frac{1}{\mu^2}te^{-\frac{t}{\mu}}=\int e^u du=e^u=e^{-\frac{t}{\mu}}=\lim_{b\to\infty}\left[e^{-\frac{t}{\mu}}\right]_0^b=1$$

Selain dari beberapa contoh transformasi Sawi dari fungsi $f\{t\}$ yang telah dijabarkan di atas, Tabel transformasi Sawi dari Fungsi $f(t)$ dapat dilihat pada tabel 1 berikut.

Tabel 1. Tabel transformasi Sawi pada fungsi $f(t)$

No.	$f(t)$	$S\{f(t)\} = T(\mu)$
1.	1	$\frac{1}{\mu}$
2.	t	1
3.	t^2	2μ
4.	$t^{\rho}, \rho \in N$	$\rho!(\mu)^{\rho-1}$
5.	$t^{\rho}, \rho > -1$	$(\mu)^{\rho-1}\Gamma(1+\rho)$
6.	$e^{\beta t}$	$\frac{1}{\mu(1-\beta\mu)}$
7.	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{(1+\beta^2\mu^2)}$
8.	$\cos \beta t$	$\frac{1}{\mu(1+\beta^2\mu^2)}$
9.	$\sinh \beta t$	$\frac{\beta}{(1-\beta^2\mu^2)}$
10.	$\cosh \beta t$	$\frac{1}{\mu(1-\beta^2\mu^2)}$

(Aggarwal & Higazy, 2021).

2.5 Karakteristik Transformasi Sawi

2.5.1 Sifat Linieritas Transformasi Sawi

Jika $S\{f_1(t)\} = T_1(\mu)$ dan $S\{f_2(t)\} = T_2(\mu)$, maka $\mathrm{S}\left[mf_1(t) + nf_2(t)\right] = \left[mT_1(\mu) + nT_2(\mu)\right]$, dimana m, n merupakan konstanta yang berubah-ubah.

Bukti:. Diberikan definisi dari transformasi Sawi

$$S\{f(t)\} = \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt$$

Maka dengan menggunakan definisi dari transformasi Sawi dengan $f(t) = mf_1(t) + nf_2(t)$, kita dapat mencari transformasi Sawi dari $mf_1(t) + nf_2(t)$.

$$\mathrm{S}\{\left[mf_1(t) + nf_2(t)\right]\} = \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty \left[mf_1(t) + nf_2(t)\right]e^{-\frac{t}{\mu}}dt$$

$$\mathrm{S}\{\left[mf_1(t) + nf_2(t)\right]\} = m\left[\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f_1(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt\right] + n\left[\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f_2(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt\right]$$

$$\mathrm{S}\{\left[mf_1(t) + nf_2(t)\right]\} = mS\{f_1(t)\} + nS\{f_2(t)\}$$

$$\mathrm{S}\{\left[mf_1(t) + nf_2(t)\right]\} = mT_1(\mu) + nT_2(\mu) \tag{2.10}$$

Dimana m, n merupakan konstanta yang berubah-ubah (Aggarwal & Higazy, 2021)

2.5.2 Sifat Penskalaan Transformasi Sawi

Jika $T(\mu)$ transformasi Sawi dari fungsi $f(t)$ maka $kT(k\mu)$ transformasi Sawi dari fungsi $f(kt)$.

Bukti: dengan menggunakan definisi transformasi Sawi , maka:

$$S\{f(kt)\} = \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(kt)e^{-\frac{t}{\mu}}dt \tag{2.11}$$

Misal $kt = p \Rightarrow kdt = dp$, ketika permisalan tersebut disubstitusikan maka:

$$\begin{aligned} S\{f(kt)\} &= \frac{1}{\mu^2}\left[\frac{1}{k}\int_0^\infty f(p)e^{-\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{p}{k}\right)}dp\right] \\ &= \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(p)e^{-\left(\frac{1}{\mu}\right)\left(\frac{p}{k}\right)}dp\right] \\ &= \left[\frac{k}{k^2\mu^2}\int_0^\infty f(p)e^{-\left(\frac{p}{k\mu}\right)}dp\right] \end{aligned}$$

$$S\{f(kt)\} = kT(k\mu) \tag{2.12}$$

(Aggarwal & Higazy, 2021)

2.5.3 Sifat Translasi Transformasi Sawi

Jika $T(\mu)$ transformasi Sawi dari $f(t)$ maka $\frac{1}{(1-k\mu)^2}T\left(\frac{\mu}{1-k\mu}\right)$ transformasi Sawi dari fungsi $e^{kt}f(t)$.

Bukti:. Dengan menggunakan definisi transformasi Sawi, maka akan dibuktikan bahwa $\frac{1}{(1-k\mu)^2}T\left(\frac{\mu}{1-k\mu}\right)$ transformasi Sawi dari fungsi $e^{kt}f(t)$.

$$S\{e^{kt}f(t)\} = \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty e^{kt}f(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)e^{-\left(\frac{t}{\mu}-kt\right)}dt$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)e^{-\left(\frac{1}{\mu}-k\right)t}dt$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)e^{-\left(\frac{1-k\mu}{\mu}\right)t}dt$$

$$= \frac{1}{(1-k\mu)^2}\left[\frac{(1-k\mu)^2}{\mu^2}\int_0^\infty f(t)e^{-\left(\frac{1-k\mu}{\mu}\right)t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{(1-k\mu)^2}T\left(\frac{\mu}{1-k\mu}\right) \tag{2.13}$$

(Aggarwal & Higazy, 2021)

2.6 Transformasi Sawi dari Fungsi Turunan

Jika $T(\mu)$ transformasi Sawi dari $f(t)$ maka:

a) $\frac{1}{\mu}T(\mu)-\frac{1}{\mu^2}f(0)$ merupakan transformasi Sawi dari fungsi turunan $f'(t)$.

b) $\frac{1}{\mu^2}T(\mu)-\frac{1}{\mu^3}f(0)-\frac{1}{\mu^2}f'(0)$ merupakan transformasi Sawi dari fungsi turunan $f''(t)$.

c) $\frac{1}{\mu^\rho}T(\mu)-\sum_{k=0}^{\rho-1}\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\rho-(k-1)}f^{(k)}(0)$ merupakan transformasi Sawi dari fungsi turunan $f^{(\rho)}(t)$.

Bukti:.

a) $S\{f'(t)\} = \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty f'(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left[f(t)e^{-\frac{t}{\mu}} \right]_0^\infty - \frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty \left\{ -\left(\frac{1}{\mu}\right) \right\} f(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\lim_{t\to\infty}\left[f(t)e^{-\frac{t}{\mu}} \right] - \frac{1}{\mu^2} f(0) + \frac{1}{\mu^3}\int_0^\infty f(t)e^{-\frac{t}{\mu}}dt$$

$$= 0 - \frac{1}{\mu^2} f(0) + \frac{1}{\mu} S\{ f(t) \}$$

$$= \frac{1}{\mu} T(\mu) - \frac{1}{\mu^2} f(0) \qquad (2.14)$$

b) Karena $S\{ f'(t) \} = \frac{1}{\mu} T(\mu) - \frac{1}{\mu^2} f(0) = \frac{1}{\mu} S\{ f(t) \} - \frac{1}{\mu^2} f(0)$, maka:

$$S\{ f''(t) \} = \frac{1}{\mu} S\{ f'(t) \} - \frac{1}{\mu^2} f'(0)$$

$$= \frac{1}{\mu}\left[\frac{1}{\mu} S\{ f(t) \} - \frac{1}{\mu^2} f(0) \right] - \frac{1}{\mu^2} f'(0)$$

$$= \frac{1}{\mu^2} T(\mu) - \frac{1}{\mu^3} f(0) - \frac{1}{\mu^2} f'(0) \qquad (2.15)$$

c) Karena $S\{ f''(t) \} = \frac{1}{\mu^2} T(\mu) - \frac{1}{\mu^3} f(0) - \frac{1}{\mu^2} f'(0)$, maka:

$$S\{ f'''(t) \} = \frac{1}{\mu^2} S\{ f'(t) \} - \frac{1}{\mu^3} f'(0) - \frac{1}{\mu^2} f''(0)$$

$$S\{ f'''(t) \} = \frac{1}{\mu^2}\left[\frac{1}{\mu} S\{ f(t) \} - \frac{1}{\mu^2} f(0) \right] - \frac{1}{\mu^3} f'(0) - \frac{1}{\mu^2} f''(0)$$

$$S\{ f'''(t) \} = \frac{1}{\mu^3} S\{ f(t) \} - \frac{1}{\mu^4} f(0) - \frac{1}{\mu^3} f'(0) - \frac{1}{\mu^2} f''(0)$$

$$S\{ f'''(t) \} = \frac{1}{\mu^3} T(\mu) - \frac{1}{\mu^4} f(0) - \frac{1}{\mu^3} f'(0) - \frac{1}{\mu^2} f''(0)$$

Diperoleh bentuk fungsi derivatif secara umum

$$S\left\{\mu^{(\rho)}(t)\right\} = \frac{1}{\mu^{\rho}} S\left\{f(t)\right\} - \frac{1}{\mu^{\rho+1}} f(0) - \frac{1}{\mu^{\rho}} f'(0) - \ldots\ldots - \frac{1}{\mu^{\rho-1}} f^{(\rho-1)}(0)$$

$$= \frac{1}{\mu^{\rho}} T(\mu) - \frac{1}{\mu^{\rho+1}} f(0) - \frac{1}{\mu^{\rho}} f'(0) - \ldots\ldots - \frac{1}{\mu^{\rho-1}} f^{(\rho-1)}(0)$$

$$= \frac{1}{\mu^{\rho}} T(\mu) - \sum_{k=0}^{\rho-1} \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\rho-(k-1)} f^{(k)}(0) \tag{2.16}$$

(Aggarwal & Higazy, 2021)

2.7 Dualitas antara Transformasi Laplace-Sawi

Jika transformasi Laplace dari $Z(\alpha)$ adalah $F(\mu)$ dan transformasi Sawi dari $Z(\alpha)$ adalah $T(\mu)$, maka

$$F(\mu) = \frac{1}{\mu^2} T\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{2.17}$$

$$T(\mu) = \frac{1}{\mu^2} F\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{2.18}$$

Bukti:.

Dengan menerapkan definisi transformasi Laplace, diperoleh:

$$F(\mu) = \int_0^{\infty} Z(\alpha) e^{-\mu\alpha} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\mu^2}\left[\mu^2 \int_0^{\infty} Z(\alpha) e^{-\mu\alpha} d\alpha\right] \tag{2.19}$$

Dengan menggunakan definisi transformasi Sawi, diperoleh

$$F(\mu) = \frac{1}{\mu^2} T\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{2.20}$$

Dengan mendefinisikan $T(\mu)=\frac{1}{\mu^2}F\left(\frac{1}{\mu}\right)$ ke dalam definisi transformasi Sawi , diperoleh

$$T(\mu)=\frac{1}{\mu^2}\int_0^\infty Z(\alpha)e^{-\frac{\alpha}{\mu}}d\alpha \tag{2.21}$$

Selanjutnya, dengan menggunakan definisi transformasi Laplace untuk pada persamaan (2.21) diperoleh

$$T(\mu)=\frac{1}{\mu^2}F\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{2.22}$$

(Aggarwal & Gupta, 2019)

2.8 Invers Transformasi Sawi

Fungsi $f(t)$ dinamakan invers transformasi Sawi dari fungsi $T(\mu)$ jika $S\{f(t)\}=T(\mu)$. Secara matematis, invers transformasi Sawi dapat ditulis sebagai $S^{-1}\{T(\mu)\}=f(t)$. Invers transformasi Sawi $T(\mu)$ dari fungsi $T(\mu)$ dapat dilihat pada tabel 2 berikut.

Tabel 2. Tabel Invers Transformasi Sawi dari Fungsi $T(\mu)$

No.	$T(\mu)$	$f(t)=S^{-1}\{T(\mu)\}$
1.	$\frac{1}{\mu}$	1
2.	1	t
3.	μ	$\frac{t^2}{2!}$
4.	$(\mu)^{\rho-1}, \rho \in N$	$\frac{t^\rho}{\rho!}$
5.	$(\mu)^{\rho-1}, \rho > -1$	$\frac{t^\rho}{\Gamma(\rho+1)}$
6.	$\frac{1}{\mu(1-\beta\mu)}$	$e^{\beta t}$
7.	$\frac{1}{(1+\beta^2\mu^2)}$	$\frac{\sin \beta t}{\beta}$
8.	$\frac{1}{\mu(1+\beta^2\mu^2)}$	$\cos \beta t$
9.	$\frac{1}{(1-\beta^2\mu^2)}$	$\frac{\sinh \beta t}{\beta}$
10.	$\frac{1}{\mu(1-\beta^2\mu^2)}$	$\cosh \beta t$

(Aggarwal & Higazy, 2021)

2.8.1 Sifat Linieritas Invers Transformasi Sawi

Jika $S^{-1}\{T_1(\mu)\} = f_1(t)$ dan $S^{-1}\{T_2(\mu)\} = f_2(t)$ maka

$$\Rightarrow S^{-1}\{mT_1(\mu)+nT_2(\mu)\} = mS^{-1}\{T_1(\mu)\}+nS^{-1}\{T_2(\mu)\}$$

$$S^{-1}\{mT_1(\mu)+nT_2(\mu)\} = mS^{-1}\{T_1(\mu)\}+nS^{-1}\{T_2(\mu)\}$$

Dimana m,n merupakan konstanta yang berubah-ubah. (Aggarwal & Higazy, 2021)

2.9 Transformasi Sawi untuk Sistem Persamaan Diferensial

Tinjau sistem persamaan diferensial orde pertama berikut.

$$\begin{aligned}
\frac{d\Phi_1}{dt} &= p_{11}\Phi_1 + p_{12}\Phi_2 + \ldots + p_{1n}\Phi_n \\
\frac{d\Phi_2}{dt} &= p_{21}\Phi_1 + p_{22}\Phi_2 + \ldots + p_{2n}\Phi_n \\
&\vdots \\
\frac{d\Phi_\rho}{dt} &= p_{\rho 1}\Phi_1 + p_{\rho 2}\Phi_2 + \ldots + p_{\rho\rho}\Phi_n
\end{aligned} \tag{2.23}$$

dengan kondisi awal

$$\Phi_1(0) = r_1, \Phi_2(0) = r_2, \ldots, \Phi_\rho(0) = r_\rho \tag{2.24}$$

$p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{1p}, p_{21}, p_{22}, \ldots, \mathrm{p}_{2p}, p_{\rho 1}, p_{\rho 2}, \ldots, p_{\rho\rho}$ merupakan konstanta. Sistem persamaan (2.23) dan kondisi awal (2.24) dapat ditulis dalam bentuk $\frac{d\Phi}{dt} = P\Phi + Q(t)$ dengan $\Phi(0) = R$.

Dimana

$$\frac{d\Phi}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{d\Phi_1}{dt}\\ \frac{d\Phi_2}{dt}\\ \vdots\\ \frac{d\Phi_\rho}{dt}\end{bmatrix}, P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1\rho}\\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2\rho}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{\rho\rho}\end{bmatrix}, \Phi=\begin{bmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\\ \vdots\\ \Phi_\rho\end{bmatrix}, Q=\begin{bmatrix}q_1(t)\\ q_2(t)\\ \vdots\\ q_\rho(t)\end{bmatrix},$$

$$\Phi(0)=\begin{bmatrix}\Phi_1(0)\\ \Phi_2(0)\\ \vdots\\ \Phi_\rho(0)\end{bmatrix} \text{ dan } R=\begin{bmatrix}r_1\\ r_2\\ \vdots\\ r_\rho\end{bmatrix}$$

Dengan mengoperasikan Transformasi Sawi pada sistem persamaan (2.23) dan menerapkan kondisi awal (2.24), maka didapat

$$\begin{aligned}
&\left(\left(\frac{1}{\mu}\right)-p_{11}\right)S\{\Phi_1\}-p_{12}S\{\Phi_2\}-\ldots-p_{1\rho}S\{\Phi_\rho\}=S\{q_1(t)\}+\frac{r_1}{\mu^2}\\
&-p_{21}S\{\Phi_1\}+\left(\left(\frac{1}{\mu}\right)-p_{22}\right)S\{\Phi_2\}\ldots-p_{2\rho}S\{\Phi_\rho\}=S\{q_2(t)\}+\frac{r_2}{\mu^2}\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&-p_{\rho1}S\{\Phi_1\}-p_{\rho2}S\{\Phi_2\}-\ldots+\left(\left(\frac{1}{\mu}\right)-p_{\rho\rho}\right)S\{\Phi_\rho\}=S\{q_\rho(t)\}+\frac{r_\rho}{\mu^2}
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Dengan menggunakan aturan Cramer, diperoleh solusi dari sistem persamaan (2.23), yaitu:

$$S\{\Phi_1\} = \frac{\begin{bmatrix} S\{q_1(t)\} + \frac{r_1}{\mu^2} & p_{12} & \cdots & -p_{1\rho} \\ S\{q_2(t)\} + \frac{r_2}{\mu^2} & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{22}\right) & \cdots & -p_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ S\{q_\rho(t)\} + \frac{r_\rho}{\mu^2} & -p_{\rho 2} & \cdots & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{\rho\rho}\right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{11}\right) & -p_{12} & \cdots & -p_{1\rho} \\ -p_{21} & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{22}\right) & \cdots & -p_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -p_{\rho 1} & -p_{\rho 2} & \cdots & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{\rho\rho}\right) \end{bmatrix}}$$

$$S\{\Phi_2\} = \frac{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{11}\right) & S\{q_1(t)\} + \frac{r_1}{\mu^2} & \cdots & -p_{1\rho} \\ -p_{21} & S\{q_2(t)\} + \frac{r_2}{\mu^2} & \cdots & -p_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -p_{\rho 1} & S\{q_\rho(t)\} + \frac{r_\rho}{\mu^2} & \cdots & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{\rho\rho}\right) \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{11}\right) & -p_{12} & \cdots & -p_{1\rho} \\ -p_{21} & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{22}\right) & \cdots & -p_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -p_{\rho 1} & -p_{\rho 2} & \cdots & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{\rho\rho}\right) \end{bmatrix}}$$

$$\vdots$$

$$S\{\Phi_\rho\} = \frac{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{11}\right) & -p_{12} & \cdots & S\{q_1(t)\} + \frac{r_1}{\mu^2} \\ -p_{21} & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{22}\right) & \cdots & S\{q_2(t)\} + \frac{r_2}{\mu^2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -p_{\rho 1} & -p_{\rho 2} & \cdots & S\{q_\rho(t)\} + \frac{r_\rho}{\mu^2} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{11}\right) & -p_{12} & \cdots & -p_{1\rho} \\ -p_{21} & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{22}\right) & \cdots & -p_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -p_{\rho 1} & -p_{\rho 2} & \cdots & \left(\left(\frac{1}{\mu}\right) - p_{\rho\rho}\right) \end{bmatrix}}$$

Dengan memperluas determinan menggunakan aturan Cramer, maka diperoleh $S\{\Phi_1\}, S\{\Phi_2\}, \ldots, S\{\Phi_\rho\}$. Invers transformasi Sawi dari fungsi-fungsi tersebut memberikan nilai yang dibutuhkan dari $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\rho$ (Aggarwal & Higazy, 2021).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun ajaran 2022/2023 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini sebagai berikut:

1. Mengobservasi referensi yang berhubungan dengan metode transformasi Sawi.
2. Menetapkan persoalan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa linier homogen dan non homogen di kehidupan nyata, yaitu sistem reaksi kimia orde satu dan sistem pegas massa gerak paksa *(forced motion)* dengan kondisi awal yang diberikan.
3. Mengonstruksi algoritma transformasi Sawi untuk persoalan dari sistem persamaan diferensial biasa linier yang telah ditetapkan.
4. Mengaplikasikan metode transformasi Sawi kedalam dua persoalan dalam bentuk sistem persamaan diferensial biasa linier .
5. Menyelesaikan kedua persoalan yang telah ditetapkan dengan menggunakan metode transformasi Sawi sehingga didapatkan solusi analitiknya.
6. Menginterpretasikan solusi penyelesaian dalam bentuk tabel nilai numerik dan grafik.
7. Menentukan kesimpulan.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah didapatkan kesimpulan dari penelitian ini adalah :

1. Solusi analitik dari sistem reaksi orde satu dari tiga zat kimia tertentu adalah:

$$C_1 = \beta e^{-k_1 t}$$

$$C_2 = \left[\frac{\beta k_1}{(k_2 - k_1)}\right]\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

$$C_3 = \beta\left(1 - \left[\frac{k_2}{(k_2 - k_1)}\right]e^{-k_1 t} + \left[\frac{k_1}{(k_2 - k_1)}\right]e^{-k_2 t}\right)$$

2. Solusi analitik dari sistem pegas massa gerak paksa adalah:

$$x_1(t) = \frac{4}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t + \frac{\sqrt{6}}{5}\sin\sqrt{6}t - \frac{2}{5}\cos\sqrt{6}t - \sin 2t$$

$$x_2(t) = \frac{8}{5}\sin t + \frac{4}{5}\cos t - \frac{\sqrt{6}}{10}\sin\sqrt{6}t + \frac{1}{5}\cos\sqrt{6}t - \frac{1}{2}\sin 2t$$

3. Dari hasil penelitian yang telah dilakukan menunjukkan bahwa transformasi Sawi dapat digunakan untuk menyelesaikan solusi dari aplikasi sistem persamaan diferensial biasa pada sistem reaksi kimia orde satu dari tiga zat kimia tertentu dan sistem pegas massa gerak paksa. Penelitian ini memberikan solusi dari masalah kritis dalam menentukan konsentrasi ketiga suatu zat kimia dari reaksi kimia orde satu pada waktu melakukan reaksi kimia. Selain itu, penelitian ini juga memberikan solusi dari masalah kritis dalam menentukan perpindahan dua pegas dari dua massa dalam sistem pegas massa gerak paksa *(Forced Motion)* saat sistem pegas massa berada pada

kondisi bidang mendatar. Kemudian solusi analitik yang didapat dari penelitian yang telah dilakukan simulasi untuk memahami perilaku dinamik pada persoalan yang ditetapkan dengan untuk beberapa kondisi yang berbeda.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat ditindak lanjuti dengan mencari solusi pada peluruhan nukleus radioaktif berurutan atau mencari solusi dari aplikasi sistem persamaan diferensial parsial linier dalam kehidupan nyata untuk mendapatkan penyelesaian analitik dengan menggunakan metode transformasi Sawi.

DAFTAR PUSTAKA

Aggarwal, S., & Gupta, A. R. (2019). Dualities between Some Useful Integral Transforms and Sawi Transform. *International Journal of Recent Technology and Engineering (IJRTE)*, *8*(3), 5978–5982.

Aggarwal, S., & Higazy, M. (2021). Sawi Transformation for System of Ordinary Differential Equations with Application. *Ain Shams Engineering Journal*, *12*(3), 3173–3182.

Aggarwal, S., Sharma, S. D., & Vyas, A. (2020). Sawi Transform of Bessel's Functions with Application for Evaluating Definite Integrals. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science (IJLTEMAS)*, *IX*(VII), 12–18.

Aggarwal, S., & Singh, G. P. (2019). Sawi Transform for Population Growth and Decay Problems. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science (IJLTEMAS)*, *VIII*(VIII), 157–162.

Arifin, S. (2020). Matrix Laplace Transform Method And It Application On Spring-Mass Systems. *Factor M:Focus ACTion Of Research Mathematic*, *2*(2), 85–101.

Baleanu, D., Edwan, R., Ganesh, A., Jayapriya, M., Mohamed Khedher, K., & Sundar Santra, S. (2022). Sawi transform and Hyers-Ulam Stability of nth Order Linear Differential Equations. *Journal of Mathematics and Computer Science*, *28*(2023), 393–411.

Mohand, & Mahgoub, A. (2019). The New Integral Transform "Sawi Transform." *Advances in Theoretical and Applied Mathematics*, *14*(1), 81–87.

Nadeem, M., Edalatpanah, S. A., Mahariq, I., & Aly, W. H. F. (2022). Analytical View of Nonlinear Delay Differential Equations Using Sawi Iterative Scheme. *Symmetry*, *14*(11), 2430. https://doi.org/10.3390/sym14112430

Perko, L. (1991). *Differential Equations and Dynamical Systems* (3rd ed.). Springer-Verlag. Berlin.

Ross, S. L. (2010). *Differential Equations* (3rd ed.). John Wiley & Sons, Inc. New Delhi.

Sahoo, L. (2021). Application of Sawi Transform for Solving Problems on Newton's Law of Cooling. *International Journal of Science and Research (IJSR)*, *10*(1), 1584–1586.

Wibowo, E. S. A. W., Thresye, & Yulida, Y. (2013). Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Linier Melalui Diagonalisasi Matriks. *Jurnal Matematika Murni Dan Terapan "Epsilon," 7*(2), 12–19.