PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SUBSEMIGRUP

Skripsi

Oleh

TRIYA LESTARI NOVITA DEVI
1917031097

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

THE IMPLEMENTATION OF A ROUGH SET ON A SUBSEMIGROUP STRUCTURE

By

Triya Lestari Novita Devi

Let (U, R) be an approximation space, where U is a non-empty set and R is an equivalence relation on U. Equivalence relation is a relation that is reflective, symmetric, and transitive which will form separate partitions called equivalence class. If A is a subset of U, then the equivalence class will form the upper approximation of A and the lower approximation of A. If the upper approximation of A and the lower approximation of A are not the same, then A is called a rough set. If binary operations are defined, then A will form a rough semigroup if it meets certain conditions. If a non-empty set B subset of A with a binary operation is given, then B is called an rough subsemigroup in the rough semigroup A if it is closed on the upper approximation of B. Next, we construct the example of the rough semigroup and rough subsemigroup on a finite set. In addition, we provide the properties of the rough subsemigroup and program to determine whether a set is a rough subsemigroup in a given approximation space.

Keywords: *Approximation space, rough set, rough semigroup, rough subsemigroup.*

ABSTRAK

PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SUBSEMIGRUP

Oleh

Triya Lestari Novita Devi

Diberikan ruang aproksimasi (U, R), dengan U himpunan tak kosong dan R merupakan relasi ekuivalensi pada U. Relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat refleksif, simetris dan transitif yang mengakibatkan terbentuknya kelas-kelas ekuivalensi. Jika diberikan himpunan bagian A di U, maka kelas-kelas ekuivalensi akan membentuk aproksimasi atas dari A dan aproksimasi bawah dari A. Jika aproksimasi atas dari A dan aproksimasi bawah dari A tidak sama, maka A disebut himpunan *rough*. Jika didefinisikan operasi biner pada A, A akan membentuk semigrup *rough* apabila memenuhi syarat-syarat tertentu. Jika diberikan himpunan tak kosong B subhimpunan dari A, maka B disebut subsemigrup *rough* pada semigrup *rough* A jika memenuhi sifat tertutup pada aproksimasi atas B. Pada penelitian ini, diberikan konstruksi contoh semigrup *rough* dan subsemigrup *rough* pada himpunan berhingga. Selain itu, diberikan sifat-sifat subsemigrup *rough* dan program untuk menentukan suatu himpunan merupakan subsemigrup *rough* pada ruang aproksimasi tertentu.

Kata kunci: *Ruang aproksimasi, himpunan rough, semigrup rough, subsemigrup rough.*

PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SUBSEMIGRUP

TRIYA LESTARI NOVITA DEVI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **PENERAPAN HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR SUBSEMIGRUP**

Nama Mahasiswa : **Triya Lestari Novita Devi**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1917031097**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP 19840627 200604 2 001

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP 19800206 200312 1 003

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung,

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **3 Maret 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

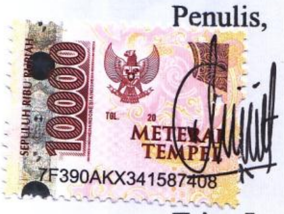
Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Triya Lestari Novita Devi**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031097**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Penerapan Himpunan *Rough* pada Struktur Subsemigrup**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 3 Maret 2023

Penulis,



Triya Lestari Novita Devi

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Triya Lestari Novita Devi yang lahir di Tanjung Karang pada tanggal 23 Januari 2002. Penulis merupakan anak ketiga dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Joko Prayitno dan Sarwati.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Dharma Bakti pada tahun 2006 sampai dengan tahun 2007. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan Sekolah Dasar di SDN 1 Karya Makmur pada tahun 2007 sampai tahun 2013. Kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Pasir Sakti pada tahun 2013 sampai tahun 2016. Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas di SMA N 1 Pasir Sakti.

Pada tahun 2019, penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur SBMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam organisasi. Pada tahun 2020 penulis merupakan anggota Biro Kemuslimahan Rohani Islam Fakultas MIPA Unila dan menjadi anggota Departemen Pengembangan Sumber Daya Manusia Ikatan Mahasiswa Lampung Timur (IKAM LAMTIM).

Pada bulan Januari sampai Februari 2022, sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Rajabasa Lama 1, Kecamatan Labuhan Ratu, Kabupaten Lampung Timur. Pada bulan Juni sampa Juli penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

“Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan”

(Q.S Al-Insyirah: 5)

“Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”

(Q.S. Al-Baqarah: 286)

“Kelihatannya semua itu mustahil sampai semuanya terbukti”

(Nelson Mandela)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,
Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada keluargaku untuk semua do'a, kasih sayang, serta nasehat yang diberikan. Terimakasih seluruh keluargaku karena sudah mendukungku dalam segala hal dan selalu memberikan semangat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahirabbilalamin, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala limpahan karunia serta rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Penerapan Himpunan *Rough* pada Struktur Subsemigrup”. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing I sekaligus pembimbing akademik atas kesediaan waktu dalam memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyeesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Seluruh dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak, mama, mas, mbak, keponakanku dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan do’a kepada penulis.
7. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.

8. Untuk Meli, Shella, Roro, Ale, Aulia Ayu, Listra, Aulia Zahro, Kori, Nada, Fitri, Hana, Feby, Echa, Putri, Deswita, Hijri, Elvina, Ali, dan Aldi terimakasih untuk semua motivasi, dukungan, semangat, kebersamaan serta kenangan yang indah dalam menjalani perkuliahan dan selama proses penyusunan skripsi ini.
9. Teman – teman Rois dan Ikam Lamtim, terimakasih atas segala pengalaman dan kebersamaan selama ini.
10. Teman – teman KKN Rajabasa Lama 1, untuk segala kebersamaan dan dukungan selama ini.
11. Teman – teman satu bimbingan, Gusti, Rara, Lutfi, Meli yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.
12. Teman – teman Jurusan Matematika angkatan 2019 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.
13. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusunan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebut satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari sempurna, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 3 Maret 2023
Penulis,

Triya Lestari Novita Devi

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori himpunan *rough* pertama kali dikenalkan pada tahun 1982 oleh Zdzislaw Pawlak. Teori ini digunakan untuk menyelesaikan masalah yang bersifat ketidakpastian (*uncertainty*) dan ketidakjelasan (*obscurity*). Konsep dasar dari teori himpunan *rough* adalah relasi ekuivalensi. Relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat reflektif, simetris, serta transitif. Relasi ekuivalensi akan membentuk kelas-kelas ekuivalensi. Kelas ekuivalensi menentukan aproksimasi atas (*upper approximation*) dan aproksimasi bawah (*lower approximation*) suatu himpunan bagian dari himpunan semesta. Suatu ruang aproksimasi (U, R), dengan U merupakan himpunan semesta dan R merupakan relasi ekuivalensi dari U. Diberikan $A \subseteq U$. Aproksimasi atas dari A pada ruang aproksimasi (U, R) dinotasikan dengan $\overline{R}(A)$, adalah gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang irisannya dengan himpunan A bukan merupakan himpunan kosong. Aproksimasi bawah dari A pada ruang aproksimasi (U, R), dinotasikan dengan $\underline{R}(A)$, adalah gabungan dari kelas-kelas ekuivalensi yang termuat di dalam himpunan A. Jika $\overline{R}(A) - \underline{R}(A) \neq \emptyset$, maka himpunan A disebut himpunan *rough*.

Beberapa peneliti telah melakukan pengkajian tentang teori himpunan *rough*, seperti penelitian yang dilakukan oleh Nobuaki Kuroki pada tahun 1997 tentang ideal *rough* di semigrup, Polkowski dan Skowron pada tahun 1998 tentang himpunan *rough* dan penerapannya pada *trend* terkini komputasi, Grzymala-Busse pada tahun 2005 tentang teori *rough* dengan penerapannya pada *data mining*, Miao dkk., pada tahun 2005 yang mempelajari grup *rough*, subgrup *rough*, dan sifat-sifatnya, Shabir & Rehman pada tahun 2011 tentang himpunan *rough* pada semigrup *ternary*. Thivagar dkk., pada tahun 2012 yang memperkenalkan implementasi teori himpunan *rough* untuk menemukan faktor penentu dari penyakit chikungunya dan diabetes. Selanjutnya, penelitian yang dilakukan oleh Bagirmaz & Ozcan pada tahun 2015 tentang semigrup *rough* pada ruang aproksimasi, Bibi dkk., pada tahun 2016 tentang generalisasi ideal *rough* di semigrup, Wang & Zhan pada tahun 2016 tentang semigrup *rough* dan semigrup *fuzzy rough* berdasar pada ideal *fuzzy*, Hafifullah dkk., pada tahun 2022 tentang sifat-sifat barisan V-Koeksak *rough* pada grup *rough*, Nugraha dkk., pada tahun 2022 tentang penerapan himpunan *rough* pada struktur grup, Setyaningsih dkk., pada tahun 2022 tentang barisan sub-eksak pada grup *rough*, serta berbagai penelitian lainnya.

Himpunan bagian tak kosong T dari semigrup S disebut subsemigrup jika tertutup terhadap operasi S, yaitu untuk setiap $x, y \in T$ berlaku $x * y \in T$. Pada penelitian ini akan membahas penerapan dari himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur subsemigrup dari suatu ruang aproksimasi. Pada penelitian ini juga akan dibahas sifat-sifat struktur himpunan *rough* pada subsemigrup serta membuat program penentuan subsemigrup *rough* pada ruang aproksimasi $(\mathbb{Z}_n, R)$ dengan menggunakan *Software Python.*

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1) menerapkan teori himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur subsemigrup dari suatu ruang aproksimasi serta menyelidiki sifat-sifatnya;
2) membuat program untuk menentukan subsemigrup *rough.*

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini adalah:

1. menambah pengetahuan tentang struktur aljabar terutama pada himpunan *rough;*
2. mengembangkan pengetahuan tentang penerapan himpunan *rough* dalam subsemigrup *rough*;
3. sebagai referensi untuk penelitian lebih lanjut.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dibahas definisi-definisi beserta contoh yang berkaitan dengan penelitian ini.

2.1 Himpunan

Himpunan dikembangkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Jerman yang bernama George Cantor (1845-1918). Himpunan merupakan konsep dari semua cabang matematika. Himpunan dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.1 Himpunan (*set)* adalah koleksi atau kumpulan objek-objek yang berbeda. Objek-objek yang terdapat dalam himpunan disebut elemen, unsur, atau anggota. Himpunan diberi nama dengan menggunakan huruf kapital maupun dengan simbol-simbol lainnya (Munir, 2010).

Jika ada satu atau beberapa himpunan, himpunan-himpunan tersebut dapat dioperasikan dengan operator tertentu. Berikut diberikan beberapa operasi terhadap himpunan :

a. Gabungan dua himpunan A dan B (ditulis $A \cup B$) adalah himpunan semua elemen-elemen anggota A atau anggota B, dinotasikan dengan:

$$A \cup B = \{x \in S | x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

b. Irisan dua himpunan A dan B (ditulis $A \cap B$) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian sehingga x anggota A dan sekaligus anggota B, dinotasikan dengan:

$$A \cap B = \{x \in S | x \in A \text{ dan } x \in B\}.$$

c. Selisih himpunan B dari himpunan A (simbol $A - B$) adalah himpunan semua elemen x dalam S sedemikian sehingga x anggota A, tetapi x bukan anggota B, dinotasikan dengan:

$$A - B = \{x \in S | x \in A \text{ dan } x \notin B\}.$$

(Siang, 2006).

Berikut ini diberikan contoh-contoh himpunan.

Contoh 2.1.2

1) Misalkan A menyatakan himpunan bilangan ganjil kurang dari 10. Himpunan A dapat ditulis $A = \{a | a < 10, a \text{ bilangan ganjil }\}$ atau $A = \{1,3,5,7,9\}$.
2) Himpunan biasanya digunakan untuk mengelompokkan objek yang mempunyai sifat mirip, namun dari definisi himpunan sah-sah saja jika elemen-elemen di dalam himpunan tidak mempunyai hubungan satu sama lain, asalkan berbeda. Misalnya {kucing, b, Bayu, mobil} adalah himpunan yang terdiri dari empat elemen, yaitu kucing, b, Bayu, dan mobil.

Setelah mempelajari definisi himpunan, selanjutnya diberikan definisi mengenai kardinalitas himpunan, himpunan kosong, himpunan semesta, himpunan bagian, dan himpunan kuasa.

Berikut ini definisi dari kardinalitas himpunan.

Definisi 2.1.3 Himpunan dikatakan berhingga (*finite set*) jika terdapat *n* elemen berbeda (*distinct*) yang dalam hal ini *n* adalah bilangan bulat tak negatif. Sebaliknya, himpunan tersebut dinamakan tak-berhingga (*infinite set*). Misalkan *A* merupakan himpunan berhingga, maka jumlah elemen berbeda di dalam *A* disebut kardinal dari himpunan *A* dan dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Munir, 2010).

Berikut diberikan contoh penentuan kardinalitas suatu himpunan.

Contoh 2.1.4

1) Jika $A = \{x|x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari $10\}$,
   maka $|A| = 4$, dengan elemen-elemen A adalah 2,3,5,7 atau $A = \{2,3,5,7\}$.
2) Jika $B = \{$ayam, kucing, kambing, sapi, burung, kerbau$\}$, maka $|B| = 6$.
3) Himpunan bilangan real mempunyai anggota tidak berhingga, sehingga
   $|\mathbb{R}| = \infty$.

Setelah mempelajari kardinalitas himpunan, selanjutnya akan diberikan definisi himpunan kosong.

Definisi 2.1.5 Himpunan yang tidak memiliki elemen atau himpunan dengan kardinal $=\ 0$ disebut himpunan kosong (*empty set*) yang dinotasikan dengan $\emptyset$ atau $\{\}$ (Munir, 2010).

Berikut merupakan contoh himpunan kosong.

Contoh 2.1.6

1) Jika diberikan $S = \{a|a < a\}$, maka $|E| = 0$.
2) Jika diberikan $A =$\{nama bulan berawalan huruf K\}, maka $|A| = 0$.

Selanjutnya, diberikan definisi himpunan semesta (*universal set*) yang dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.7 Dalam setiap membicarakan himpunan, maka semua himpunan yang ditinjau adalah sub himpunan dari sebuah himpunan tertentu yang disebut himpunan semesta. Dengan kata lain, himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda, yang dinotasikan dengan U (Wibisono, 2008).

Berikut ini merupakan contoh himpunan semesta.

Contoh 2.1.8

Dalam suatu Jurusan Matematika, himpunan A menyatakan mahasiswa yang memakai kacamata dan himpunan B menyatakan mahasiswa yang tidak memakai kacamata. Himpunan semesta (U) = Seluruh mahasiswa Jurusan Matematika.

Selanjutnya, diberikan definisi himpunan bagian (*subset*) yang dituliskan sebagai berikut.

Definisi 2.1.9 Himpunan A di katakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen A merupakan elemen dari B. Dalam hal ini, B dikatakan *superset* dari A yang dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Munir, 2010).

Berikut ini diberikan contoh himpunan bagian.

Contoh 2.1.10

1) Jika $X = \{a, b, c\}$ dan $Y = \{a, b, c, d, e\}$, maka $X \subseteq Y$.
2) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai himpunan kuasa.

Definisi 2.1.11 Himpunan kuasa (*power set*) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri yang dinotasikan dengan $P(A)$ atau 2^A (Munir, 2010).

Berikut ini merupakan contoh himpunan kuasa.

Contoh 2.1.12

Diberikan himpunan $C = \{1,2,3\}$. Kardinalitas dari himpunan C yaitu $|C| = 3$. Oleh karena itu, $|P(C)| = 2^3 = 8$. Himpunan kuasa C yaitu $P(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$.

2.2 Relasi

Secara bahasa, relasi bisa diartikan sebagai hubungan. Namun, dalam matematika, relasi adalah aturan yang menghubungkan anggota pada suatu himpunan dengan anggota himpunan lainnya. Relasi juga dapat didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.1 Misalkan A dan B masing-masing adalah himpunan tak kosong. Suatu relasi R dari A ke B adalah himpunan bagian $A \times B$ (Marsudi, 2010).

Berikut ini merupakan contoh dari relasi.

Contoh 2.2.2

Misalkan $K = \{3,4,5\}$ dan $L = \{3,4,5,6,8,9,10\}$. Jika didefinisikan relasi R dari K ke L dengan $(k, l) \in R$ jika k habis membagi l, untuk setiap $k \in K, l \in L$, maka diperoleh:

$R = \{(3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10)\}$.

Contoh 2.2.3

Diberikan himpunan $A = \{1,2,3,4\}$. Relasi R pada himpunan A didefinisikan sebagai berikut:

$R = \{a > b\}$, sehingga diperoleh $R = \{(4,3), (4,2), (4,1), (3,2), (3,1), (2,1)\}$.

Setelah memahami tentang relasi dan contoh dari relasi, selanjutnya akan dibahas mengenai relasi ekuivalensi. Berikut merupakan definisi dari relasi ekuivalensi.

Definisi 2.2.4 Misalkan A adalah suatu himpunan tidak kosong. Relasi R disebut relasi ekuivalensi pada himpunan A jika memenuhi kondisi berikut:

1) refleksif, yaitu untuk setiap $x \in A$ berlaku xRx;
2) simetri, yaitu untuk setiap $x, y \in A$, jika xRy maka yRx;
3) transitif, yaitu untuk setiap $x, y, z \in A$, jika xRy dan yRz maka xRz

(Marsudi, 2010).

Berikut merupakan contoh dari relasi ekuivalensi.

Contoh 2.2.5 Diberikan relasi R yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan bulat $\mathbb{Z}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + 2y = y^2 + 2x,$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}$.

1) Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}$. Berlaku xRx sebab $x^2 + 2x = x^2 + 2x$. Jadi R merupakan relasi refleksif.
2) Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan xRy, artinya $x^2 + 2y = y^2 + 2x$. Diperoleh $y^2 + 2x = x^2 + 2y$, sehingga yRx. Jadi R merupakan relasi simetris.
3) Diberikan sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$ dengan xRy dan yRz. Karena xRy diperoleh $x^2 + 2y = y^2 + 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = y^2 - 2y$. Di lain pihak, karena yRz diperoleh $y^2 + 2z = z^2 + 2y \Leftrightarrow y^2 - 2y = z^2 - 2z$. Dengan demikian diperoleh $x^2 - 2x = y^2 - 2y = z^2 - 2z$, dengan kata lain $x^2 - 2x = z^2 - 2z \Leftrightarrow x^2 + 2z = z^2 + 2x$. Oleh karena itu, diperoleh xRz. Jadi, terbukti R relasi transitif.

Dengan demikian, relasi R merupakan relasi yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif. Jadi, R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$.

Setelah membahas relasi ekuivalensi, berikut diberikan definisi mengenai kelas ekuivalensi.

Definisi 2.2.6 Misalkan relasi R adalah relasi ekuivalensi pada himpunan A dan $b \in A$. Kelas ekuivalensi dari b pada R adalah $[b]_R = \{x | x \in A \text{ dan } bRx\}$. Dengan kata lain, kelas ekuivalensi b pada R memuat semua elemen dalam himpunan A yang mempunyai relasi dengan b (Barnier & Feldman, 1990).

Berikut ini contoh relasi ekuivalensi.

Contoh 2.2.7

Diberikan relasi R pada himpunan $A = \{-1,0,1,2,3\}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$xRy \Leftrightarrow x^2 + 2y = y^2 + 2x.$$

Diperoleh kelas-kelas ekuivalensi dari A yaitu:

$E_1 = \{-1,3\}$;

$E_2 = \{0,2\}$;

$E_3 = \{1\}$.

2.3 Semigrup

Sebelum membahas semigrup, akan dibahas mengenai operasi biner. Berikut definisi operasi biner.

Definisi 2.3.1 Operasi biner $*$ pada himpunan S adalah fungsi $*: S \times S \to S$. Jika $a, b \in S$, maka $*\,(a, b) \in S$ atau biasa ditulis $*\,(a, b)$ sebagai $a * b$ (Warner, 2018).

Berikut diberikan contoh dari operasi biner.

Contoh 2.3.2

Diberikan himpunan bilangan riil $\mathbb{R}$ dan operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{R}$. Operasi $+$ tertutup di bilangan riil $\mathbb{R}$, yaitu untuk setiap $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, maka $a + b \in \mathbb{R}$, karena penjumlahan dari dua bilangan riil adalah bilangan riil pula. Dengan kata lain, operasi $+$ tertutup di $\mathbb{R}$.

Setelah mempelajari tentang operasi biner, selanjutnya akan dibahas mengenai fungsi. Berikut diberikan definisi fungsi.

Definisi 2.3.3 Suatu fungsi f dari himpunan X ke himpunan Y (simbol $f: X \to Y$) adalah suatu relasi dari X ke Ydengan syarat bahwa setiap elemen $x \in X$ memiliki kawan yang tunggal di Y. Himpunan X disebut daerah asal (domain) f dan Y disebut kodomain f. Kawan dari elemen $x \in X$ dinotasikan dengan $f(x)$ dan dibaca "nilai fungsi f di x". Himpunan semua nilai fungsi f disebut daerah hasil (*range*) f. *Range* $f = \{y \in Y | y = f(x)$, untuk suatu $x \in X\}$ (Siang, 2006).

Berikut diberikan contoh fungsi.

Contoh 2.3.4

Diberikan fungsi f dari himpunan A ke himpunan B $(f: A \to B)$, dengan $f(x) = x + 4$. Diberikan daerah asal $A = \{0,1,2,3,4\}$, diperoleh daerah hasil (*range*) yaitu $B = \{4,5,6,7,8\}$.

Setelah mempelajari definisi fungsi, selanjutnya akan dibahas mengenai sifat-sifat fungsi yaitu fungsi injektif, fungsi surjektif, dan fungsi bijektif. Berikut diberikan definisi fungsi injektif.

Definisi 2.3.5 Misalkan f adalah suatu fungsi dari X ke Y. Fungsi f disebut fungsi injektif jika dan hanya jika setiap anggota Y paling banyak hanya memiliki satu kawan di X. Jadi, $y \in Y$ boleh memiliki kawan di X. Meskipun memiliki kawan,

kawan tersebut hanya satu. Fungsi $f: X \to Y$ merupakan fungsi injektif jika dan hanya jika untuk setiap $x_1, x_2 \in X$, jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$ (Siang, 2006).

Berikut diberikan contoh fungsi injektif.

Contoh 2.3.6

Diberikan fungsi $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dengan $f(x) = x + 3$ untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$. Akan dibuktikan bahwa f injektif. Diberikan sebarang $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, dengan $f(x_1) = f(x_2)$. Akan ditunjukkan $x_1 = x_2$. Karena $f(x_1) = f(x_2)$, berakibat $x_1 + 3 = x_2 + 3$, sehingga diperoleh $x_1 = x_2$. Jadi, terbukti bahwa f injektif.

Selanjutnya, diberikan definisi fungsi surjektif.

Definisi 2.3.7 Misalkan f adalah fungsi dari himpunan X ke himpunan Y. Fungsi f disebut fungsi surjektif (onto) jika dan hanya jika setiap anggota Y memiliki kawan di X. Kawan anggota Y tersebut boleh lebih dari satu. Fungsi $f: X \to Y$ fungsi surjektif jika dan hanya jika untuk $y \in Y$, terdapat $x \in X$, $f(x) = y$ (Siang, 2006).

Berikut diberikan contoh fungsi surjektif.

Contoh 2.3.8

Diberikan fungsi $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = x + 5$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}$ merupakan fungsi surjektif. Akan dibuktikan bahwa f surjektif, yaitu untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$, terdapat $x \in \mathbb{Z}$, dengan $f(x) = y$. Diberikan sebarang $y \in \mathbb{Z}$ dengan $f(x) = y$, diperoleh $x + 5 = y$, sehingga $x = y - 5$. Karena y adalah bilangan bulat, diperoleh $x = y - 5$ juga merupakan bilangan bulat. Jadi, untuk sebarang bilangan bulat y, terdapat bilangan bulat $x = y - 5$ dengan $f(x) = y$. Terbukti bahwa f surjektif.

Selanjutnya, akan diberikan definisi fungsi bijektif. Berikut definisi fungsi bijektif.

Definisi 2.3.9 Suatu fungsi disebut bijektif jika dan hanya jika f injektif dan surjektif (Siang, 2006).

Berikut diberikan contoh fungsi bijektif.

Contoh 2.3.10

Akan dibuktikan fungsi $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ dengan $f(n) = n + 2$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ merupakan fungsi bijektif.

1) Akan dibuktikan bahwa f injektif. Diberikan sebarang $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, dengan $f(n_1) = f(n_2)$. Akan ditunjukkan $n_1 = n_2$. Karena $f(n_1) = f(n_2)$, berakibat $n_1 + 2 = n_2 + 2$, sehingga diperoleh $n_1 = n_2$. Jadi, terbukti bahwa f injektif.
2) Akan dibuktikan bahwa f surjektif, yaitu untuk setiap $y \in \mathbb{Z}$, terdapat $n \in \mathbb{Z}$, dengan $f(n) = y$. Diberikan sebarang $y \in \mathbb{Z}$ dengan $f(n) = y$, diperoleh $n + 2 = y$, sehingga $n = y - 2$. Diperoleh y adalah bilangan bulat, oleh karena itu, $n = y - 2$ juga merupakan bilangan bulat. Jadi, untuk sebarang bilangan bulat y, terdapat bilangan bulat $n = y - 2$ dengan $f(n) = y$. Terbukti bahwa f surjektif.

Karena f injektif dan surjektif, terbukti f bijektif.

Selanjutnya, akan dibahas mengenai semigrup. Berikut diberikan definisi semigrup.

Definisi 2.3.11 Sistem matematika $\langle S, * \rangle$ disebut semigrup jika $*$ merupakan operasi biner yang bersifat asosiatif pada S, yaitu $(x * y) * z = x * (y * z)$, untuk setiap $x, y, z \in S$ (Warner, 2018).

Berikut contoh dari semigrup.

Contoh 2.3.12

Misalkan diberikan himpunan dengan $A = \{2,4,6,\cdots\}$ dan $+$ adalah operasi penjumlahan yang biasa berlaku pada bilangan-bilangan bulat. Akan dibuktikan bahwa himpunan A merupakan semigrup, sebagai berikut.

1) Diberikan sebarang $a, b \in A$, dengan A merupakan himpunan bilangan-bilangan genap positif. Karena a dan b adalah bilangan-bilangan genap, maka $a = 2r$ dan $b = 2s$, untuk bilangan-bilangan bulat r dan s sehingga

$$\begin{aligned} a + b &= 2r + 2s \\ &= 2(r + s) \end{aligned}$$

   Misalkan $k = r + s$.

   Karena r dan s adalah bilangan-bilangan bulat, maka k adalah bilangan bulat sehingga $a + b = 2k$, untuk suatu bilangan bulat k. Akibatnya, $a + b$ merupakan bilangan genap.

   Terbukti bahwa untuk sebarang $a, b \in A$, berlaku $a + b \in A$. Jadi, operasi $+$ bersifat tertutup.

2) Untuk setiap $a, b, c \in A$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Jadi, operasi $+$ bersifat asosiatif.

3) Diberikan sebarang elemen $a \in A$. Elemen identitas penjumlahan bilangan-bilangan bulat adalah 0, sehingga $0 + a = a + 0 = a$. Akan tetapi, $0 \notin A$ sehingga A tidak memiliki elemen identitas.

Karena $\langle A, + \rangle$ hanya memenuhi sifat tertutup dan asosiatif, maka $\langle A, + \rangle$ adalah semigrup.

Selanjutnya, diberikan definisi semigrup komutatif.

Definisi 2.3.13 S merupakan semigrup komutatif jika memenuhi $x * y = y * x$ untuk setiap $x, y \in S$ (Howie, 1976).

Berikut diberikan contoh semigrup komutatif.

Contoh 2.3.14

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_6$ dengan operasi biner $+_6$. Akan ditunjukkan bahwa $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$ merupakan semigrup komutatif. Berikut diberikan Tabel *Cayley* semigrup komutatif.

Tabel 2.3.1 Tabel *Cayley* semigrup komutatif

$+_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$

Berdasarkan Tabel 2.3.1 dapat diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_6$, dengan operasi biner $+_6$ berlaku $x +_6 y = y +_6 x$. Jadi, $\mathbb{Z}_6$ merupakan semigrup komutatif.

Selanjutnya, diberikan definisi elemen idempoten pada suatu semigrup.

Definisi 2.3.15 Diberikan semigrup S. $a \in S$ disebut elemen idempoten jika $aa = a^2 = a$ (Clifford, 1961).

Berikut diberikan contoh elemen idempoten pada suatu semigrup.

Contoh 2.3.16

Diberikan himpunan tak kosong $A = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{4}\} \subset \mathbb{Z}_6$. Akan ditunjukkan A merupakan semigrup dan A merupakan semigrup idempoten terhadap operasi biner perkalian modulo 6.

Berikut diberikan Tabel *Cayley* perkalian idempoten.

Tabel 2.3.2. Tabel *Cayley* perkalian idempoten

$\cdot_6$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$

Berdasarkan Tabel 2.3.2 dapat diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in A$, berlaku $x \cdot_6 y \in A$, serta memenuhi untuk setiap $x, y, z \in A$ berlaku $x \cdot_6 (y \cdot_6 z) = (x \cdot_6 y) \cdot_6 z$. Jadi $\langle A, \cdot_6 \rangle$ merupakan semigrup. Setiap elemen dari himpunan A merupakan elemen idempoten, karena memenuhi $x \cdot_6 x = x$.

Selanjutnya diberikan definisi *band*.

Definisi 2.3.17 Semigrup S yang setiap elemennya merupakan elemen idempoten disebut *band* (Clifford, 1961).

Berikut diberikan contoh *band*.

Contoh 2.3.18

Berdasarkan Contoh 2.3.16, karena setiap elemen dari himpunan tak kosong A merupakan elemen idempoten, A merupakan *band*.

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi subsemigrup. Berikut definisi subsemigrup.

Definisi 2.3.19 Himpunan bagian tak kosong T dari semigrup S disebut subsemigrup jika tertutup terhadap operasi S, yaitu untuk setiap $x, y \in T$ berlaku $x * y \in T$ (Howie, 1976).

Berikut diberikan contoh subsemigrup.

Contoh 2.3.20

$T = \{\overline{0}, \overline{2}, \overline{4}\}$ merupakan himpunan bagian dari semigrup $S = \langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$. Perhatikan Tabel *Cayley* berikut:

Tabel 2.3.3. Tabel *Cayley* subsemigrup

$+_6$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$

Berdasarkan Tabel 2.3.3 dapat diketahui bahwa untuk setiap $x, y \in T$, berlaku $x +_6 y \in T$, sehingga T merupakan subsemigrup pada $\langle \mathbb{Z}_6, +_6 \rangle$.

Selanjutnya akan dibahas mengenai monoid. Berikut diberikan definisi monoid.

Definisi 2.3.21 Suatu himpunan tak kosong G dengan operasi biner $*$ disebut monoid jika memenuhi aksioma berikut:

1) operasi $*$ bersifat tertutup di G, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$;
2) operasi $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3) terdapat suatu elemen e di G, yang dinamakan elemen identitas di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (Siang, 2006).

Berikut diberikan contoh monoid.

Contoh 2.3.22

Misalkan himpunan $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1,0,1,2, \cdots\}$ terdapat operasi biner perkalian $*$. Akan dibuktikan bahwa operasi $*$ merupakan monoid.

1) Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a * b \in \mathbb{Z}$. Operasi biner perkalian $*$ memenuhi sifat tertutup.
2) Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $a * (b * c) = (a * b) * c$. Operasi biner perkalian $*$ memenuhi sifat asosiatif.
3) Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, berlaku $a * e = e * a = a$. Oleh karena itu, terdapat $1 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a * 1 = 1 * a = a$. Terdapat elemen identitas untuk operasi biner $*$.

Karena $*$ memenuhi sifat tertutup, asosiatif dan memiliki elemen identitas, maka $*$ merupakan monoid.

2.4 Ruang Aproksimasi

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi ruang aproksimasi. Berikut definisi ruang aproksimasi.

Definisi 2.4.1 Misalkan $U \neq \emptyset$ dan R adalah relasi ekuivalensi pada U. Pasangan (U, R) disebut ruang aproksimasi, yang dinotasikan dengan $K = (U, R)$ (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh ruang aproksimasi.

Contoh 2.4.2

Berdasarkan Contoh 2.2.5 telah dibuktikan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ bukan himpunan kosong, maka pasangan $(\mathbb{Z}, R)$ adalah ruang aproksimasi.

Setelah mempelajari tentang ruang aproksimasi, selanjutnya akan dibahas mengenai definisi aproksimasi atas dan aproksimasi bawah. Berikut definisi aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari suau himpunan.

Definisi 2.4.3 Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan $X \subseteq U$. Aproksimasi atas dan aproksimasi bawah dari X didefinisikan sebagai berikut:

$$\overline{R}(X) = \{x | [x]_R \cap X \neq \emptyset\} \tag{2.1}$$

$$\underline{R}(X) = \{x | [x]_R \subseteq X\} \tag{2.2}$$

$\overline{R}(X)$ disebut aproksimasi atas dari X dan $\underline{R}(X)$ disebut aproksimasi bawah dari X di ruang aproksimasi (U, R) (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

Contoh 2.4.4

Diberikan ruang aproksimasi (U, R), dengan himpunan

$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{10}\}.$$

R adalah relasi ekuivalensi pada U dengan kelas-kelas ekuivalensi sebagai berikut:

$E_1 = \{x_1, x_3\}$

$E_2 = \{x_2, x_7, x_9\}$

$E_3 = \{x_4\}$

$E_4 = \{x_6, x_{10}\}$

$E_5 = \{x_5, x_8\}$

Jika dipilih $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, maka aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari A adalah sebagai berikut:

$\underline{R}(A) = \{x_1, x_3\} \cup \{x_4\} = \{x_1, x_3, x_4\}$.

$\overline{R}(A) = \{x_1, x_3\} \cup \{x_2, x_7, x_9\} \cup \{x_4\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_9\}$.

2.5 Himpunan *Rough*

Selanjutnya, akan dibahas mengenai definisi himpunan *rough*. Berikut definisi himpunan *rough*.

Definisi 2.5.1 Diberikaan ruang aproksimasi (U, R). Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$, jika $\overline{R}(X) - \underline{R}(X) \neq \emptyset$, maka X disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Berikut diberikan contoh himpunan *rough.*

Contoh 2.5.2

Berdasarkan Contoh 2.4.4, pasangan berurutan aproksimasi bawah dan aproksimasi atas dari A yaitu ($\{x_1, x_3, x_4\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_9\}$) merupakan himpunan *rough* di dalam ruang aproksimasi (U, R).

2.6 Semigrup *Rough*

Selanjutnya, akan dibahas mengenai semigrup *rough*. Berikut definisi semigrup *rough*.

Definisi 2.6.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, R) dan operasi biner $*$ pada U. Himpunan bagian S dari U disebut semigrup *rough* pada ruang aproksimasi, jika sifat-sifat berikut dipenuhi:

i. untuk setiap $x, y \in S, x * y \in \overline{R}(S)$;

ii. untuk setiap $x, y, z \in S, (x * y) * z = x * (y * z) \in \overline{R}(S)$;

(Bagirmaz & Ozcan, 2015).

Selanjutnya, akan diberikan definisi monoid *rough*. Berikut diberikan definisi monoid *rough.*

Definisi 2.6.2 Diberikan ruang aproksimasi (U, R), operasi biner $*$ pada U, dan semigrup *rough* S di (U, R). Elemen $x \in \overline{R}(S)$ disebut identitas kiri dari S, jika untuk setiap $y \in S$ berlaku $xy = y$. Elemen x disebut identitas kanan dari S, jika untuk setiap $y \in S$ berlaku $yx = y$. Jika x merupakan identitas kiri dan identitas kanan dari S, maka x disebut elemen identitas *rough*. Semigrup *rough* merupakan monoid *rough*, jika memiliki elemen identitas *rough.*

2.7 Subsemigrup *Rough*

Setelah mempelajari definisi semigrup *rough*, akan dibahas definisi subsemigrup *rough*. Berikut definisi subsemigrup *rough*.

Definisi 2.7.1 Diberikan ruang aproksimasi (U, R), operasi biner $*$ pada U, semigrup *rough* S di ruang aproksimasi (U, R), dan H himpunan bagian tak kosong S. Himpunan H dari semigrup *rough* S disebut subsemigrup *rough* dari S, jika $a * b \in \overline{R}(H)$, untuk setiap $a, b \in H$, dan berlaku $HH \subseteq \overline{R}(H)$ (Bagirmaz & Ozcan, 2015).

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada Semester Ganjil Tahun Ajaran 2022/2023 bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan studi literatur secara sistematis yang diperoleh dari jurnal atau artikel dan buku-buku untuk mendukung penulisan penelitian ini. Adapun langkah-langkah yang dilakukan di dalam penelitian ini dapat dilihat pada diagram berikut:

Mempelajari himpunan *rough* (Pawlak, 1982), grup *rough*, subgrup *rough* dan sifat-sifatnya (Miao dkk., 2005), dan mempelajari semigrup *rough* pada ruang aproksimasi (Bagirmaz & Ozcan, 2015).

↓

Tahap 1
Menyelidiki sifat-sifat semigrup *rough*

↓

Tahap 2
Mengkonstruksi semigrup *rough*, monoid *rough*, dan *band rough* pada suatu himpunan berhingga

↓

Tahap 3
Mengkonstruksi subsemigrup *rough* dari semigrup *rough* yang sudah dikontruksi sebelumnya

↓

Tahap 4
Menyelidiki sifat-sifat subsemigrup *rough*

↓

Tahap 5
Membuat program untuk menentukan subsemigrup *rough* pada ruang aproksimasi $(\mathbb{Z}_n, R)$

Gambar 3.2.1. Diagram metode penelitian

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab IV diperoleh bahwa, pada teori subsemigrup *rough*, apabila S merupakan semigrup *rough* maka himpunan bagian H merupakan subsemigrup *rough* pada ruang aproksimasi (U, R) jika dibentuk dengan operasi biner $*$ yang sama dengan S dengan syarat-syaratnya yaitu untuk setiap $x, y \in H$, dengan $H \neq \emptyset$, $x * y \in \overline{R}(H)$.

Berdasarkan pembahasan subsemigrup *rough* yang telah dikonstruksi sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa setiap subsemigrup merupakan subsemigrup *rough*, tetapi setiap subsemigrup *rough* belum tentu subsemigrup. Jika H_1 dan H_2 merupakan subsemigrup *rough* dari semigrup S, irisan dari $H_1 \cap H_2$ merupakan subsemigrup *rough* pada ruang aproksimasi tertentu dengan syarat yaitu $\overline{R}(H_1) \cap \overline{R}(H_2) = \overline{R}(H_1 \cap H_2)$. Jika H_1 dan H_2 merupakan subsemigrup *rough* dari semigrup *rough* S, dengan syarat $\overline{R}(H_1) + \overline{R}(H_2) = \overline{R}(H_1 + H_2), H_1 + H_2 \neq U,$ dan $\overline{R}(H_1)$ atau $\overline{R}(H_2) = U$, maka penjumlahan dua himpunan bagian yang didefinisikan oleh $H_1 + H_2 = \{a + b | a \in H_1, b \in H_2\}$ merupakan subsemigrup *rough*. Selain itu, penjumlahan dua himpunan bagian dengan H_1 merupakan subsemigrup *rough* dari semigrup *rough* S dan H_2 bukan merupakan subsemigrup *rough* dari semigrup *rough* S dengan syarat $\overline{R}(H_1) + \overline{R}(H_2) = \overline{R}(H_1 + H_2),\ H_1 + H_2 \neq U,$ dan $\overline{R}(H_1) = U$ juga merupakan subsemigrup *rough*.

Penggunaan program dalam melakukan konstruksi subsemigrup *rough* dapat membantu pengerjaan dan mengefisienkan waktu yang digunakan. Dimulai dengan memasukkan himpunan semesta U, menentukan relasi ekuivalensi, menentukan kelas – kelas ekuivalensi, memasukkan anggota himpunan $A \subset U$ serta menentukan aproksimasi atas dan bawah, sehingga dapat ditunjukkan bahwa himpunan bagian A merupakan himpunan *rough.* Selanjutnya, dengan aksioma yang diberikan akan ditunjukkan bahwa himpunan bagian A merupakan semigrup *rough*, kemudian memasukkan himpunan $B \subset A$, dengan aksioma yang diberikan akan ditunjukkan bahwa himpunan bagian B merupakan subsemigrup *rough.*

5.2 Saran

Berdasarkan hasil penelitian, dalam mengkonstruksi subsemigrup *rough* masih sedikit ditentukan sifat-sifatnya, sehingga tidak menutup kemungkinan ada sifat-sifat lain yang masih terdapat pada subsemigrup *rough*. Selain itu, dalam mengkonstruksi semigrup *rough,* subsemigrup *rough, band rough*, dan monoid *rough* dapat menggunakan himpunan universal dan relasi lain selain yang ada pada penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

Bagirmaz, N., & Ozcan, A. F. (2015). Rough Semigroups on Approximation Spaces. *International Journal of Algebra. 9*, 339-350.

Barnier, W., & Feldman, N. (1990). *Introduction to Advanced Mathematics*. New Jersey: Prentice-hall International.

Bibi, M., Arif, M. S., & Soori, A. H. (2016). Generalized Rough Ideals in S Semigroups. *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST). 3*(10), 5622-5628.

Clifford, A., H. (1961). The Algebraic Theory of Semigroup. *American Mathematical Society Providence. 7(1).*

Grzymala-Busse, J. W. (2005). Rough Set Theory with Applications to Data Mining. *Studies in Fuzziness and Soft Computing*. 221-244.

Hafifullah, D., Fitriani, F., Faisol, A. (2022). The Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. *BAREKENG: Journal of Mathematics and Its Application. 16*(3), 1069-1078.

Howie, J. M. (1976). *An Introduction to Semigroup Theory*. London: Academic Press.

Kuroki, N. (1997). Rough Ideals in Semigroups. *Information Sciences. 100*, 139-163.

Marsudi. (2010). *Logika dan Teori Himpunan*. Malang: UB Press.

Miao, D., Han, S., Li, D., & Sun, L. (2005). Rough Group, Rough Subgroup, and Their Properties. *Rough Set, Fuzzy Sets, Data Mining, and Granular Computing*, 104-113.

Munir, R. (2010). *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika.

Nugraha, A. A., Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). The Implementation of Rough Set on a Group Structure. *Jurnal Matematika MANTIK. 8*(1), 45-52.

Pawlak, Zdzislaw. (1982). Rough Sets. *International Journal of Computing and Information Sciences. 11*(5), 341-356.

Polkowski, L., Skowron, A. (1998). *Rough Sets and Current Trends in Computing*. Lecture Notes in Computer Science.

Setyaningsih, N., Fitriani, F., & Faisol, A. (2022). Sub-Exact Sequence of Rough Groups. *Al-jabar: Jurnal Pendidikan Matematika. 12*(2), 267-272.

Shabir, M., & Rehman, N. (2011). Roughness in ternary semigroups. *Quasigroups and Related Systems. 19*, 331-338.

Siang, J.J. (2006). *Matematika Diskrit dan Aplikasinya pada Ilmu Komputer (Edisi Ketiga)*. Yogyakarta: Andi Yogyakarta.

Thivagar, M. L., Richard, C., & Paul, N. R. (2012). Mathematical Innovations of a Modern Topology in Medical Events. *International Journal of Information Science. 2*(4), 33-36.

Wang, Q., & Zhan, J. (2016). Rough semigroups and rough fuzzy semigroups based on fuzzy ideals. *Open Math. 14*, 1114-1121.

Warner, S. (2018). *Pure Mathematics for Beginners*. New York: Get 800.

Wibisono, S. (2008). *Matematika Diskrit (Edisi Kedua)*. Yogyakarta: Graha Ilmu.