II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial (*Differential Equation*)

Fungsi $y = f(x)$ mendeskripsikan bahwa nilai variabel *y* ditentukan oleh nilai variabel *x*, sehingga nilai *y* bergantung pada nilai *x*. Adanya relasi kebergantungan antara *y* terhadap *x* ini, maka perubahan nilai variabel *x* akan mengakibatkan perubahan nilai variabel *y*. Tingkat perubahan *y* terhadap perubahan kecil *x* dalam kalkulus didefinisikan sebagai

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{dy}{dx}$$

$$= \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{2.1}$$

Jika limitnya ada.

Rumusan (2.1) ini dapat digunakan manakala $y = f(x)$ telah diketahui, padahal di dunia nyata atau dalam kehidupan sehari-hari tidaklah demikian halnya karena $y = f(x)$ sering tidak diketahui dan justru yang sering diketahui adalah perilaku atau fenomena perubahannya. Oleh karena itu, diperlukan suatu cara untuk dapat mengetahui atau menemukan $y = f(x)$ berdasarkan pengetahuan atau pengamatan terhadap perilaku atau fenomena perubahannya. Inilah pentingnya pembelajaran persamaan diferensial (Kartono, 2012).

Persamaan diferensial (*differential equation*) adalah persamaan yang melibatkan variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya terhadap variabel-variabel bebas.

Berikut ini adalah contoh persamaan diferensial :

$$\frac{dy}{dx} = e^x + \sin(x), \tag{2.2}$$

$$y^n - 2y' + y = \cos(x), \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \tag{2.4}$$

Persamaan diferensial dibagi dalam dua kelas yaitu PD biasa dan PD parsial. Persamaan diferensial biasa (*ordinary differential*), disingkat PDB, adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan hanya satu variabel bebas. Jika diambil *y*(*x*) sebagai suatu fungsi satu variabel, dengan *x* dinamakan variabel bebas dan *y* dinamakan variabel tak bebas, maka suatu persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk F$\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.

Jelas bahwa persamaan (2.2) dan (2.3) adalah PDB, sedangkan (2.4) bukan PDB. Sebenarnya, (2.4) adalah suatu persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*) (Nugroho, 2011).

Definisi 1

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah suatu persamaan yang dapat ditulis dalam bentuk $y^n = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ (2.5)

Dimana $y, y', \ldots, y^{(n)}$ semua ditentukan nilainya oleh *x*.

Peubah bebas *x* terletak dalam suatu selang *I* (*I* boleh berhingga atau tak berhingga, fungsi F diberikan, dan fungsi *y* = *y*(*x*) tak diketahui. Pada umumnya fungsi F dan *y* akan bernilai real (Finizio dan Ladas,1982).

Definisi 2

Suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa adalah suatu fungsi $y(x)$ yang ditentukan pada suatu selang bagian J ⊂ I yang secara identik memenuhi persamaan (2.5) pada seluruh selang J.

Jelaslah, setiap penyelesaian $y(x)$ dari persamaan (2.5) mempunyai sifat-sifat berikut :

1. y harus mempunyai turunan paling sedikit sampai dengan turunan ke n dalam selang J.
2. Untuk setiap x di dalam J titik $(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ akan terletak di dalam daerah definisi (asal) fungsi F, yaitu, F akan ditentukan pada titik ini.
3. $y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$ untuk setiap x di dalam J.

Sebagai gambaran perhatikan bahwa fungsi $y(x) = e^x$ adalah suatu penyelesaian persamaan diferensial biasa orde dua $y'' - y = 0$. Nyatalah bahwa,

$$y''(x) - y(x) = (e^x)'' - e^x = e^x - e^x = 0.$$

Jelaslah, e^x untuk x dalam selang real $(-\infty, +\infty)$ adalah suatu penyelesaian dari $y'' - y = 0$. Sebagai contoh lain, fungsi $y(x) = \cos x$ adalah suatu penyelesaian dari $y'' + y = 0$ di seluruh selang $(-\infty, +\infty)$. Memang benar.

$y''(x) + y(x) = (\cos x)'' + \cos x = -\cos x + \cos x = 0$ (Finizio dan Ladas,1982).

Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang melibatkan suatu fungsi yang dicari dan turunannya.

Persamaan-persamaan berikut adalah persamaan-persamaan diferensial yang melibatkan fungsi *y* yang tidak diketahui.

$$\frac{dy}{dx} = 5x + 3 \tag{2.7}$$

$$e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \tag{2.8}$$

$$4\frac{d^3y}{dx^3} + (\sin x)\frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3y\left(\frac{dy}{dx}\right)^7 + y^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 5x \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \tag{2.11}$$

Pada persamaan (2.7) sampai (2.10) adalah contoh dari persamaan diferensial biasa karena fungsi *y* yang tidak diketahui terdiri hanya pada variabel *x*. Persamaan (2.11) merupakan persamaan diferensial parsial, karena *y* terdiri dari variabel bebas *t* dan *x*.

Orde dari persamaan diferensial adalah *orde* dari turunan tertinggi yang muncul di dalam persamaan tersebut.

Persamaan (2.7) merupakan persamaan diferensial *orde*-satu ; (2.8), (2.10), dan (2.11) merupakan persamaan diferensial *orde*-dua. Perhatikan dalam (2.10) bahwa *orde* dari turunan tertinggi yang muncul di dalam persamaan tersebut adalah dua. Persamaan (2.9) merupakan persamaan diferensial *orde*-ketiga (Bronson dan Costa, 2007).

2.2 Persamaan Diferensial Linier

Suatu persamaan diferensial dikatakan linear jika tidak ada perkalian antara variabel-variabel tak bebas dan derivatif-derivatifnya.

Dengan kata lain, semua koefisiennya adalah fungsi dari variabel-variabel bebas. Suatu persamaan diferensial yang tidak linear dalam beberapa variabel tak bebas dikatakan tidak linear dalam variabel tersebut. Suatu persamaan diferensial yang tidak linear dalam himpunan semua variabel tak bebas secara sederhana dikatakan tak linear (Nugroho, 2011).

Analisis sebarang jenis sistem linear umumnya akan menghasilkan suatu model matematik dalam bentuk persamaan diferensial. Dalam matematika terapan, persamaan diferensial terpenting dan yang kerap kali dijumpai adalah persamaan diferensial linear. Persamaan diferensial tingkat *n* adalah persamaan yang berbentuk

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x) \qquad (2.12)$$

Dengan $a_0, a_1, \dots, a_n$ dan *f* adalah fungsi-fungsi dari variabel bebas *x* dan $a_0 \neq 0$. Jika *n* = 0, diperoleh persamaan diferensial linear tingkat satu, persamaan ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \qquad (2.13)$$

Jika $Q(x) = 0$, menjadi

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \qquad (2.14)$$

Persamaan ini dinamakan *persamaan linear homogen tingkat satu.* Persamaan ini dapat dibawa ke bentuk

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx \qquad (2.15)$$

Dalam bentuk ini, variabel-variabelnya dikatakan *terpisah,* dan karenanya kedua ruas dapat diintegralkan dan diperoleh

$$\ln y = -\int P(x)dx + c \qquad (2.16)$$

Dengan c tetapan sebarang. Jadi diperoleh

$$y = e^{-\int P(x)dx + c} = e^{-\int P(x)dx} e^{c} \qquad (2.17)$$

Tetapi karena e^c suatu tetapan sebarang, maka dapat dinyatakan dengan *K*. Jadi penyelesain (2,14) ialah :

$$y = Ke^{-\int P(x)dx} \qquad (2.18)$$

(Pipes dan Harvill, 1992).

Suatu persamaan diferensial biasa

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (2.19)$$

Dikatakan linear jika *F* merupakan suatu fungsi linear dari peubah $y, y', \dots, y^{(n)}$; definisi yang sama juga berlaku untuk persamaan diferensial parsial. Secara umum persamaan diferensial biasa linear orde ke-*n* dituliskan sebagai

$$a_0(x)y^n + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = g(x) \qquad (2.20)$$

(Marwan dan Munzir, 2009).

Perhatikan sebuah persamaan diferensial dalam bentuk standar $y' = f(x, y)$. Jika $f(x, y)$ dapat dituliskan sebagai $f(x, y) = -p(x)y + q(x)$ (yang artinya, sebagai fungsi dari *x* dikalikan *y*, ditambah satu lagi fungsi dari *x*), persamaan diferensial tersebut adalah linear. Persamaan diferensial *orde*-pertama dapat selalu dituliskan sebagai $y' + p(x)y = q(x)$ (Bronson dan Costa, 2007)

2.3 Deret Pangkat

Definisi :

Fungsi dikatakan analitik di titik $x = x_0$ jika terdapat suatu bilangan real positif R sehingga y dapat dinyatakan sebagai deret pangkat konvergen

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{2.23}$$

Untuk semua $|x - x_0| < R$. Bilangan R dinamakan jari-jari konvergensi deret pangkat.

Contoh fungsi analitik yaitu memuat eksponen, sin, dan cos. Sebagai contoh

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \tag{2.24}$$

Menyajikan suatu deret pangkat yang konvergen dimanapun. Jari-jari konvergensi adalah tak terhingga. Dicatat juga bahwa polinomial adalah deret pangkat berhingga.

Seringkali terjadi kesulitan untuk mengenal setiap bentuk deret pangkat sebagai suatu kombinasi dari fungsi sederhana, tetapi paling tidak dikenal ekspansi berikut:

$$(1 - ax)^{-1} = 1 + ax + (ax)^2 + (ax)^3 + \cdots \tag{2.24}$$

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^3}{3!} + \cdots \tag{2.25}$$

$$\ln(1 - ax) = -ax - \frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^3}{3} + \cdots \tag{2.26}$$

$$\cos(ax) = 1 - \frac{(ax)^2}{2!} + \frac{(ax)^4}{4!} - + \cdots \tag{2.27}$$

$$\sin(ax) = ax - \frac{(ax)^3}{3!} + \frac{(ax)^5}{5!} - + \cdots \tag{2.28}$$

Dengan ɑ adalah sembarang bilangan real.

Sifat-sifat penting deret pangkat

Fungsi analitik yang tak berhingga sering terdeferensial, dan deret pangkatnya dapat dideferensialkan suku demi suku. Untuk fungsi (2.23) dipunyai

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \quad (2.29)$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} \quad (2.30)$$

Deret pangkat dari fungsi analitik adalah tunggal. Khususnya jika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad (2.31)$$

Maka $a_n = 0$ untuk semua *n* (Nugroho, 2011).

Deret pangkat adalah deret yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots)$$

Dengan x adalah suatu variabel dan a_0 adalah konstanta-konstanta yang disebut koefisien dari deret tersebut. Untuk setiap x tertentu, deret tersebut merupakan deret konstanta-konstanta yang dapat di ujikonvergensi atau divergensinya. Suatu deret pangkat mungkin konvergen untuk beberapa nilai x dan divergen untuk nilai x lainnya. Jumlah deret tersebut merupakan suatu fungsi

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

Yang daerah asalnya adalah himpunan semua x sedemikian rupa sehingga deret konvergen. Perhatikan bahwa *f* menyerupai suatu polinom. Bedanya disini *f* mempunyai takhingga banyaknya suku (Stewart, 2003).

Pada deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$ kalau diperhatikan terdapat dua variabel, yaitu n dan *x*. Untuk n , nilainya dari 0 sampai ∞, sedangkan nilai *x* dapat dicari dengan uji rasio untuk kekonvergenan mutlak, yaitu pada saat *r < 1*.

Interval nilai *x* yang memenuhi kekonvergenan dari deret

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$$

Maupun

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_{0)})^n$$

disebut interval kekonvergenan.

Bentuk interval kekonvergenan dari deret pangkat ini memiliki ciri khusus dan hanya memiliki 3 variasi bentuk untuk masing – masing deret.

Tiga kemungkinan untuk interval kekonvergenan deret adalah :

Selang konvergensi untuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n$

- Deret konvergen hanya di *x = 0*
- Deret konvergen mutlak di *x Î R*
- Deret konvergen mutlak pada interval buka *(–r,r)* atau ditambah pada ujung – ujung intervalnya.

Selang konvergensi untuk deret $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_{0)})^n$

- Deret konvergen hanya di *x = b*
- Deret konvergen mutlak di *x Î R*

Deret konvergen mutlak pada interval buka *(b–r,b+r)* atau ditambah pada ujung – ujung intervalnya.

Jika $x = 0$ merupakan titik biasa dari persamaan $y'' + p(x)y' + Q(x)y = 0$, maka solusi umum dalam interval yang memiliki titik ini memiliki bentuk

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{2.32}$$

Dimana a_0 dan a_1 adalah konstanta-konstanta sembarang dan $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan fungsi-fungsi analitis independen pada $x = 0$.

Untuk menghitung koefisien-koefisien a_n dalam solusi yang diberikan melalui teorema $b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$ gunakanlah prosedur lima langkah berikut ini yang dikenal sebagai metode deret pangkat.

Langkah 1. Masukkanlah ke persamaan diferensial homogen yang diberikan deret pangkat

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1}$$

$$+ a_{n+2} x^{n+2} + \cdots \tag{2.33}$$

Bersama-sama dengan deret pangkat untuk

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots + n a_n x^{n-1} + (n+1) a_{n+1} x^n$$

$$+ (n+2) a_{n+2} x^{n+1} + \cdots \tag{2.34}$$

Dan

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12 a_4 x^2 + \cdots + n(n-1) a_n x^{n-2} + (n+1)(n) a_{n+1} x^{n-1} +$$

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \cdots \tag{2.35}$$

Langkah 2. Kumpulkanlah *x* yang memiliki pangkat yang sama dan jadikanlah koefisien-koefisiennya setara dengan nol.

Langkah 3. Persamaan yang diperoleh dengan menjadikan koefisien-koefisien dari x^n setara dengan nol dalam langkah 2 akan memiliki a_j suku sebanyak bilangan terbatas j. Persamaan yang dihasilkan dikenal sebagai rumus rekursi untuk persamaan diferensial yang diberikan.

Langkah 4. Gunakanlah rumus rekursi untuk berturut-turut menentukan a_j $(j = 2,3,4, \dots)$ dalam suku-suku a_0 dan a_1.

Langkah 5. Masukkanlah koefisien-koefisien yang diperoleh dalam langkah 4 ke dalam persamaan (2.33) dan tuliskan ulang solusinya dalam bentuk persamaan

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

Metode deret pangkat hanya dapat digunakan jika $x = 0$ adalah titik biasa. Walaupun untuk menetukan apakah $x = 0$ suatu persamaan diferensial harus memiliki bentuk persamaan $y'' + P(x)y' + Q(x)y = \emptyset(x)$, setelah kondisi ini diverifikasi, metode deret pangkat dapat digunakan bentuk $b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$ atau $y'' + P(x)y' + Q(x)y = \emptyset(x)$. Jika $P(x)$ atau $Q(x)$ dalam $y'' + P(x)y' + Q(x)y = \emptyset(x)$ merupakan hasil bagi dari polinomial, terkadang lebih mudah jika terlebih dahulu mengalikannya dengan penyebut umum terendah, sehingga menghilangkan semua pecahannya, dan kemudian mengaplikasikan metode deret pangkat pada persamaan yang dihasilkan dalam bentuk persamaan $b_2(x)y'' + b_1(x)y' + b_0(x)y = g(x)$ (Bronson dan Costa, 2007).