

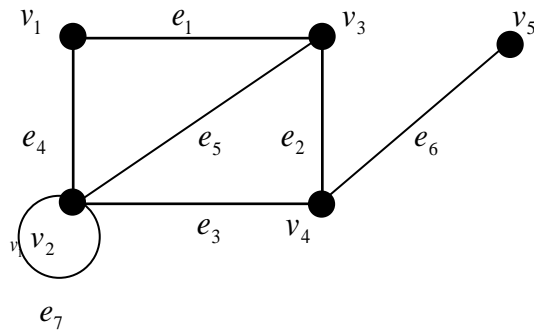
BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan konsep dasar graf dan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf sebagai landasan teori pada penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari Deo (1989). Graf G adalah himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik yang tak kosong dari G dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut orde dari graf G . Misalkan v dan w adalah titik pada graf, jika v dan w dihubungkan oleh sisi e , maka v dan w dikatakan bertetangga (*adjacent*). Sisi $e = (v, w)$ dikatakan menempel (*incident*) dengan titik v dan w demikian juga titik v dan w menempel pada sisi e . Lingkungan (*Neighborhood*) dari suatu titik v , dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v .



Gambar 1. Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Pada Gambar 1. Graf (V, E) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Titik v_3 bertetangga dengan titik v_1, v_2 , dan v_4 sedangkan v_1 dan v_3 menempel dengan e_1 . Sebaliknya, sisi e_1 menempel pada titik v_1 dan titik v_3 . $N(v_1) = \{v_2, v_3\}$.

Derajat suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v , dinotasikan dengan $d(v)$. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat 1. Pada Gambar 1. $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 5$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 3$ dan v_5 adalah daun karena berderajat satu.

Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda atau *loop* disebut graf sederhana. Graf pada Gambar 1. bukan merupakan graf sederhana karena pada graf tersebut terdapat *loop* yaitu di titik v_2 .

Pada graf terhubung G , jarak diantara 2 titik x dan y adalah panjang lintasan terpendek diantara kedua titik tersebut, dinotasikan dengan $d(x, y)$.

Istilah lain yang sering muncul pada pembahasan graf adalah jalan (*walk*), lintasan (*path*) dan sirkuit (*circuit*). Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh jalan berdasarkan Gambar 1. adalah $v_1 - e_4 - v_2 - e_3 - v_4 - e_2 - v_3 - e_5 - v_2 - e_3 - v_4 - e_6 - v_5$.

Lintasan (*path*) adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda. Graf G dikatakan graf terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Lintasan berdasarkan graf pada Gambar 1. adalah $v_3 - e_1 - v_1 - e_4 - v_2 - e_3 - v_4 - e_5 - v_5$.

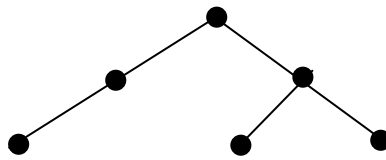
Sedangkan sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup (*closed path*), yaitu lintasan yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit genap dan sirkuit ganjil. Sirkuit genap adalah sirkuit dengan banyaknya titik genap, dan sirkuit ganjil adalah sirkuit dengan banyaknya titik ganjil. Contoh sirkuit berdasarkan gambar pada Gambar 1. adalah $v_1 - e_4 - v_2 - e_5 - v_3 - e_1 - v_1$.

Misalkan G adalah suatu graf. Graf H dikatakan subgraf dari graf G jika dan hanya jika $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$.

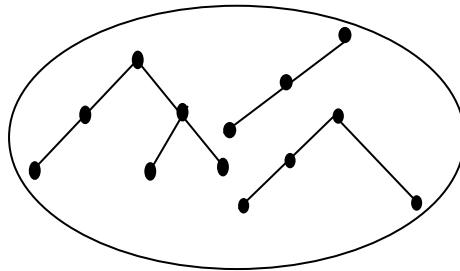
2.2 Beberapa Kelas Graf Pohon

Berikut ini akan diberikan beberapa kelas graf pohon :

Graf pohon (*tree*) suatu graf terhubung yang tidak memuat siklus. Gabungan dari beberapa pohon disebut hutan (*forest*).

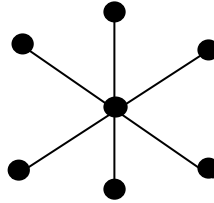


Gambar 2. Graf pohon



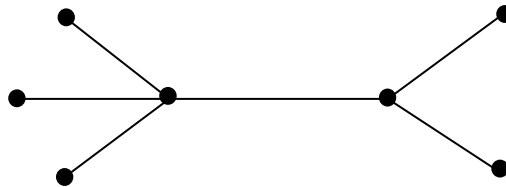
Gambar 3. Contoh hutan (*forest*)

Suatu graf bintang $K_{1,n}$ (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat n yang disebut pusat dan titik lainnya berderajat satu (Chartrand dkk., 1998).



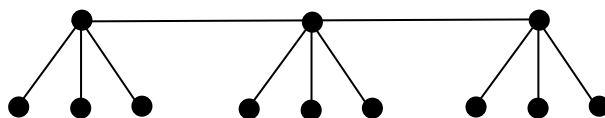
Gambar 4. Contoh graf bintang $K_{1,6}$

Graf pohon disebut graf bintang ganda (*double star*) jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berturut-turut berderajat $a+1$ dan $b+1$, dinotasikan dengan $S_{a,b}$ (Chartrand dkk., 1998).



Gambar 5. Contoh graf bintang ganda $S_{3,2}$

Graf ulat (*caterpillar graf*) adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan (Chartrand dkk., 1998).

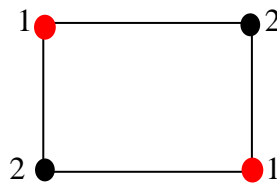


Gambar 6. Contoh graf ulat $C(3, 3, 3)$

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi

Pada bagian ini akan diberikan definisi yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf. Chartrand dkk., memulai penelitian tentang bilangan kromatik lokasi graf pada tahun 2002, dengan mengembangkan dua konsep dalam graf yaitu pewarnaan titik dan dimensi partisi pada graf.

Pewarnaan titik pada graf adalah $c: V(G) \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, k\}$ dengan syarat untuk setiap dua titik yang bertetangga harus memiliki warna yang berbeda. Minimum banyaknya warna yang digunakan untuk pewarnaan titik pada graf G disebut bilangan kromatik, yang dinotasikan dengan $\chi(G)$.



Gambar 7. Contoh bilangan kromatik

Selanjutnya akan diberikan definisi dan teorema yang berkaitan dengan bilangan kromatik lokasi pada suatu graf menurut Chartrand dkk. (2002). Misalkan c suatu pewarnaan titik pada graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G . Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i , yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna

$c_{\Pi}(v)$ dari v adalah k -pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min \{d(v, x) \mid x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G . Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G , dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$. Karena setiap pewarnaan lokasi juga merupakan suatu pewarnaan, maka $\chi(G) \leq \chi_L(G)$.

Berikut ini adalah teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi pada graf yang diambil dari Chartrand dkk. 2002.

Teorema 2.1. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G . Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u, w) = d(v, w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti : Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna C_i . Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π . Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap

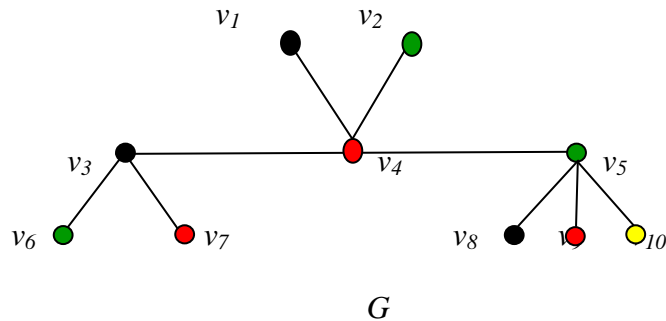
$w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u, C_j) = d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$.

Akibatnya $c_{\Pi}(u) = c_{\Pi}(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi,

$c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1. Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti : Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun x_1, x_2, \dots, x_k di G . Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i , $i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i . Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■



Gambar 8. Pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Diberikan graf G seperti yang terlihat pada Gambar 8. untuk menentukan minimum pewarnaan lokasi pada graf tersebut akan dilakukan dua tahap :

1. Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf G . Karena terdapat titik v_5 yang mempunyai 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq 4$.

2. Selanjutnya akan ditentukan batas atas bilangan kromatik lokasi pada graf G . Titik-titik pada $V(G)$ dipartisi sebagai berikut :

$$C_1 = \{v_1, v_3, v_8\}; C_2 = \{v_2, v_5, v_6\}; C_3 = \{v_4, v_7, v_9\}; C_4 = \{v_{10}\}.$$

Kode warnanya adalah :

$$c_{\Pi}(v_1) = (0, 2, 1, 3); c_{\Pi}(v_2) = (2, 0, 1, 3); c_{\Pi}(v_3) = (0, 1, 1, 3); c_{\Pi}(v_4) = (1, 1, 0, 2);$$

$$c_{\Pi}(v_5) = (1, 0, 1, 1); c_{\Pi}(v_6) = (1, 0, 2, 4); c_{\Pi}(v_7) = (1, 0, 2, 4); c_{\Pi}(v_8) = (0, 1, 2, 2);$$

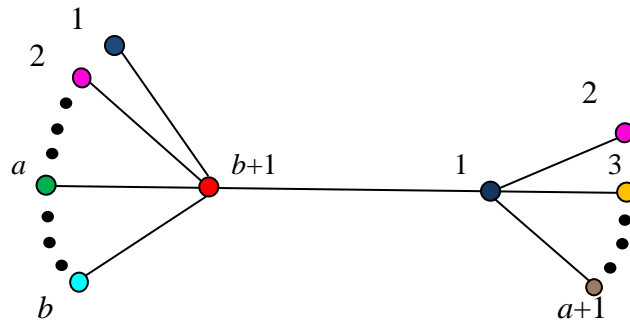
$$c_{\Pi}(v_9) = (2, 1, 0, 2); c_{\Pi}(v_{10}) = (2, 1, 2, 0).$$

Teorema 2.2. Misalkan k adalah derajat maksimum di graf G maka $\chi_L(G) \leq 1 + k$.

Teorema 2.3. Bilangan kromatik lokasi pada graf lintasan P_n ($n \geq 3$) adalah 3.

Bukti : Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Jelas bahwa $\chi_L(P_n) \geq 3$ untuk $n \geq 3$. Berdasarkan Teorema 2.2 $\chi_L(G) \leq 1 + k$, dengan k derajat titik maksimum. Karena pada $P_n, k = 2$ maka $\chi_L(P_n) \leq 1 + 2$. Akibatnya $\chi_L(P_n) \leq 3$. Jadi terbukti $\chi_L(P_n) = 3$. ■

Teorema 2.4. Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$ $\chi_L(S_{a,b}) = b + 1$.



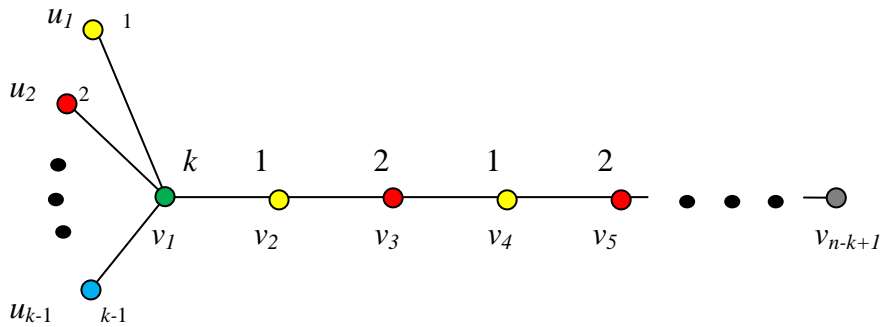
Gambar 9. Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{a,b}$

Bukti : Berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh batas bawah yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \geq b+1$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya, yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan $(b+1)$ warna sebagaimana terlihat pada Gambar 9. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) = b+1$. ■

Chartrand dkk. (2003) telah mendapatkan bentuk graf pohon berorde $n \geq 5$ yang memiliki bilangan kromatik lokasi dari 3 sampai n , kecuali $n-1$, sebagaimana teorema berikut ini.

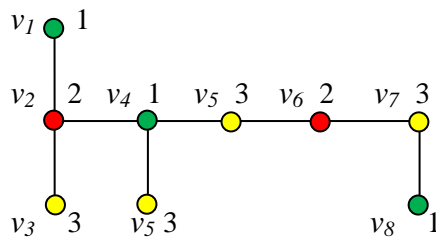
Teorema 2.5. Terdapat pohon dengan berorde $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika $k \in (3, 4, \dots, n-2, n)$.

Pewarnaan pada Teorema 2.5 dapat diberikan sebagai berikut :



Gambar 10. Pohon T dari orde n dengan $\chi_L(T)=k$

Selanjutnya akan diberikan beberapa definisi tentang titik dominan dan *clear path* yang diambil dari Asmiati dkk. (2013). Misalkan c adalah k -pewarnaan lokasi pada graf $G(V,E)$ dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari $V(G)$ yang diinduksi oleh c . Titik $v \in V(G)$ dikatakan suatu titik dominan jika $d(v, C_i) = 1$, jika $v \notin C_i$. Suatu lintasan yang menghubungkan dua titik dominan di graf G disebut *clear path*, jika semua titik internalnya bukan merupakan titik dominan.



Gambar 11. Graf G dengan 3 titik dominan

Titik dominan pada Gambar 11. adalah v_2 , v_4 , dan v_7 . *Clear path* pada Gambar 11. adalah lintasan yang menghubungkan v_4 dan v_7 dimana tidak terdapat titik dominan dalam titik internalnya. Karena graf G pada Gambar 11. mempunyai bilangan kromatik lokasi tiga, maka panjang *clear path* dari graf G ganjil.

Lemma 2.1. Diberikan graf G dengan $\chi_L(G)=k$, maka terdapat paling banyak k titik dominan di G dan masing-masing titik dominan memiliki warna yang berbeda.

Bukti : Misalkan $v \in G$ merupakan titik dominan dan G adalah graf terhubung, maka $d(v, C_i)=0$ untuk $v \in C_i$ dan $d(v, C_i)=1$ untuk $v \notin C_i$. Karena $\chi_L(G)=k$, maka kelas partisi Π memuat k kelas warna, katakan C_1, C_2, \dots, C_k . dan setiap $x \in G$ memiliki kode warna yang berbeda. Oleh karena itu, G paling banyak memuat sebanyak k titik dominan dan masing-masing titik dominan pada G memiliki kode warna yang berbeda. ■

Lemma 2.2 Misalkan graf G dengan $\chi_L(G)=3$, maka panjang dari setiap *clear path* di G adalah ganjil.

Bukti : Misalkan G adalah graf terhubung dan P adalah *clear path* yang menghubungkan 2 titik dominan x dan y di G . Asumsikan $c(x) = 1$ dan $c(y)=2$. Karena P adalah *clear path* maka warna dari titik titik didalamnya harus 1 dan 2 berturut-turut. Misalkan x dan y akan membentuk barisan

alternating. Karena banyaknya titik dalam *clear path* P harus genap, maka panjang P ganjil. ■

Lemma 2.3 Misalkan G adalah graf terhubung dengan $\chi_L(G)=3$. Jika memuat 3 titik dominan maka terdapat 3 titik dominan dalam suatu lintasan.

Bukti : Misalkan G adalah graf terhubung dan x, y dan z adalah tiga titik dominan dari graf G . P adalah lintasan yang menghubungkan x dan z . Asumsikan y tidak terdapat dalam lintasan P . Karena G adalah graf terhubung maka terdapat titik dalam u , sehingga u memiliki jarak terpendek (dibandingkan dengan titik dalam lainnya) ke y . Lintasan L_1 menghubungkan x ke u kemudian ke y . Sehingga lintasan L_1 adalah *clear path*. Oleh karena itu, panjangnya lintasan tersebut adalah ganjil. Sekarang, pertimbangkan lintasan L_2 yang menghubungkan y ke u kemudian ke z . Maka, L_2 merupakan *clear path*. Oleh karena itu, panjangnya adalah ganjil. Kedua fakta tersebut menyatakan panjang dari lintasan yang menghubungkan x ke u ditambah panjang lintasan yang menghubungkan u ke z panjangnya adalah genap, kontradiksi. ■