PENYELESAIAN INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL *RIEMANN-LIOUVILLE* PADA FUNGSI PANGKAT TUJUH ORDE $\frac{5}{2}$

(Skripsi)

Oleh

NURUL FAQIH

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

THE SOLUTION OF FRACTIONAL INTEGRAL AND FRACTIONAL DERIVATIVES RIEMANN-LIOUVILLE WHICH HAS $\frac{5}{2}$ ORDER IN THE 7^{TH} ORDER FUNCTION

By

Nurul Faqih

Fractional integrals and fractional derivatives Riemann-Liouville are definitions which can be used to find integrals and derivatives of the order of a fractional number. This study aims to obtain the general form of the fractional integral and the fractional derivative Riemann-Liouville which has $\frac{5}{2}$ order in a 7^{th} order function. Furthermore, the results of this research found out the general equations of fractional integrals and fractional derivatives Riemann-Liouville version which has $\frac{5}{2}$ order in a 7^{th} order function. Based on the research, it can be concluded that the equations obtained have characteristics where the order of the integrals is in the interval $\alpha > 0$ and $n - 1 \leq \alpha < n$.

Keywords: Fractional Integrals, Derivatives of Integral, Seventh-Order Function, Riemann-Liouville Fractional Derivatives

ABSTRAK

PENYELESAIAN INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL *RIEMANN-LIOUVILLE* PADA FUNGSI PANGKAT TUJUH ORDE $\frac{5}{2}$

Oleh

NURUL FAQIH

Integral fraksional dan turunan fraksional *Riemann-Liouville* adalah definisi yang dapat digunakan untuk memperoleh integral dan turunan dengan orde suatu bilangan pecahan (fraksional). Tujuan dari penelitian ini untuk mendapatkan persamaan umum dari integral fraksional dan turunan fraksional *Riemann-Liouville* pada fungsi pangkat tujuh dengan orde $\frac{5}{2}$. Dari hasil penelitian ini berupa persamaan umum integral fraksional dan turunan fraksional versi *Riemann-Liouville* pada fungsi pangkat tujuh orde $\frac{5}{2}$. Berdasarkan penelitian yang dilakukan dapat disimpulkan bahwa persamaan yang diperoleh memiliki karakteristik yang berbeda dimana orde dari integral berada dalam interval $\alpha > 0$ dan $n - 1 \leq \alpha < n$.

Kata Kunci: Integral Fraksional, Turunan Fraksional, Fungsi Pangkat Tujuh, Integral Fraksional dan Turunan Fraksional *Riemann-Liouville*.

PENYELESAIAN INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL *RIEMANN-LIOUVILLE* PADA FUNGSI PANGKAT TUJUH ORDE $\frac{5}{2}$

Oleh

Nurul Faqih

SKRIPSI

Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL RIEMANN-LIOUVILLE PADA FUNGSI PANGKAT TUJUH ORDE$\frac{5}{2}$**

Nama Mahasiswa : **Nurul Faqih**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1817031055**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dorrah

Dra. Dorrah Azis, M.Si.
NIP. 19610128 198811 2 001

Dr. Muslim Ansori, M.Si.
NIP. 19720227 199802 1 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dra. Dorrah Azis, M.Si.**	Dorrah ....
Sekretaris	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc.**	....

2. Plt. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **10 Februari 2023**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	**Nurul Faqih**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1817031055**
Jurusan	:	**Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi saya yang berjudul **"PENYELESAIAN INTEGRAL FRAKSIONAL DAN TURUNAN FRAKSIONAL *RIEMANN-LIOUVILLE* PADA FUNGSI PANGKAT TUJUH ORDE $\frac{5}{2}$"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 10 Februari 2023
Penulis

Nurul Faqih
NPM. 1817031055

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Nurul Faqih lahir di Pandeglang Banten pada tanggal 25 Desember 2000, sebagai anak kedua dari pasangan Bapak Ade Suhanda dan Ibu Idoh Hamdiah. Penulis menempuh pendidikan formal di sekolah dasar di SDN Pasanggrahan pada tahun 2006-2012, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTSN Munjul pada tahun 2012-2015 dan melanjutkan pendidikan menengah atas di SMAN 07 Pandeglang pada tahun 2015-2018.

Pada tahun 2018. Penulis juga menempuh pendidikan non formal di Pondok Pesantren Miftahul Banin Munjul sejak 2016. Penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur beasiswa AFIRMASI PAPUA dan DAERAH 3T. Selama menjadi Mahasiswa, Penulis aktif dalam organisasi jurusan yaitu HIMATIKA (Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika) FMIPA Universitas Lampung sebagai Anggota Bidang Keilmuan, kemudian aktif organisasi fakultas yaitu ROIS (Rohani Islam) FMIPA Universitas Lampung sebagai anggota Bidang Kaderisasi, aktif sebagai Anggota di komunitas MPQ (Mahasiswa Penghafal Al-Qur’an).

Pada tanggal 09 februari 2021, Penulis melaksanakan Praktik Kerja Lapangan (PKL) di Dinas Kehutanan Bandar Lampung selama 40 hari. Pada bulan Agustus sampai dengan September 2021 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Sawarna, Kecamatan Bayah, Lebak Banten selama 40 hari sebagai bentuk pengabdian mahasiswa dan menjalankan Tri Dharma Perguruan Tinggi.

KATA MUTIARA

"Maka apabila engkau telah selesai (dari suatu urusan) tetaplah bekerja keras (untuk urusan yang lain)".
(Qs. Al-Insyirah: 7)

"Barangsiapa menempuh jalan untuk mendapatkan ilmu, Allah akan mudahkan jalan menuju surga".
(HR. Muslim)

"Merantaulah, orang yang berakal dan beradab tidak akan berdiam diri di kampungnya. Dia berpisah dari rehatnya dan mengasingkan diri dari negerinya. Merantaulah, kelak kau akan dapati pengganti dari teman-temanmu yang hilang. Berlelah-lelahlah, karena manisnya hidup terasa setelah lelah berjuang".
(Abu Abdillah Muhammad ibn Idris Al-Syafi'i)

"Disaat kamu malas mengerjakan Skripsi, ingatlah selalu orangtuamu".
(Nurul Faqih)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillah

Segala puji hanya milik Allah Subhanahu Wata'ala, serta syukur atas nikmat dan hidayah yang diberikan, sholawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu 'Alaihi Wassallam

Ku persembahkan karya kecilku ini untuk:

Keluarga

Ibu, Bapak, dan Saudaraku tercinta yang selalu mencurahkan do'a, tenaga, pikiran dan dukungannya yang tak dapat diungkapkan dengan kata-kata

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Dosen pembimbing dan penguji yang berjasa dan tidak lelah memberikan arahan serta masukan sehingga tersusunlah skripsi ini

Sahabat dan Teman

Sahabat dan teman-temanku, terimakasih atas kebersamaan, pengalaman, do'a dan semangat yang selalu kalian berikan

Semua pihak yang sering bertanya

"Kapan Kompre?, "Kapan Nyusul?", "Kapan Wisuda?", dan lain sejenisnya

Almamaterku Tercinta, Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillah, segala puji syukur hanya milik Allah Subhanahu Wata'ala yang telah melimpahkan rahmat dan karunia-Nya, shalawat dan salam selalu tercurah kepada Nabi Muhammad Shallahu 'Alaihi Wassallam sehingga skripsi ini yang berjudul "**Penyelesaian Integral Fraksional dan Turunan Fraksional *Riemann-Liouville* pada Fungsi Pangkat Tujuh Orde $\frac{5}{2}$**" dapat diselesaikan. Dalam menyelesaikan skripsi ini, Penulis banyak mendapat pelajaran, dukungan motivasi, pengalaman, bantuan berupa bimbingan yang sangat berharga dari berbagai pihak dan disadari bahwa adanya keterbatasan pengetahuan dan kemampuan yang dimiiki. Oleh karena itu, pada kesempatan baik ini Penulis mengucapkan rasa terima kasih kepada:

1. Ibu, Bapak, dan Saudara yang tidak pernah lelah memberikan do'a, dukungan, kasih sayang, pengorbanan dan motivasi.
2. Ibu Dra. Dorrah Azis, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing utama yang senantiasa memberikan arahan, bantuan, bimbingan serta saran sehingga tersusunlah skripsi ini.
3. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembimbing kedua yang telah memberikan saran dan bimbingan dalam penyusunan skripsi ini.

4. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, M.Sc., selaku Dosen Penguji yang telah memberi pengarahan dan masukan serta saran-saran dalam penyelesaian skripsi ini.
5. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku Pembimbing Akademik yang telah memberikan bimbingan dan motivasi selama proses perkuliahan.
6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, S.Si., M.T., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Dosen, staf dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah memberikan bantuan dan panduan dalam penyelesaian administrasi.
9. Ibu Idoh, Bapak Ade, Aa Ubad, Teteh Dini, dan Dedek Fauzi dan Gilman yang selalu menjadi motivasi terbesar untuk menyelesaikan perkuliahan ini.
10. Sahabat terbaik Bangkit, Syahrul, Danu, Wahyu, Dan Robby yang selalu memberikan keceriaan, kebersamaan, dan menjadi tempat berbagi. Serta kakak tingkat Bang Desfan yang selalu membantu dalam menyelesaikan perkuliahan dan skripsi ini.
11. Keluarga Rumah Peradaban Qurani (RPQ), terutama Ustadz Hasan Yang selalu memberikan arahan dan bimbingan selama hidup di Lampung.
12. Keluarga Besar HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung.
13. Mahasiswa Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.
15. Semua pihak yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu yang telah membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.

Semoga Allah Subhanahu Wata'ala memberikan balasan yang berlipat ganda kepada semua pihak yang telah turut membantu Penulis dalam menyelesaikan skripsi ini dan semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Atas kritik dan saran yang diberikan untuk kesempurnaan skripsi dengan tulus diucapkan terima kasih.

Bandar Lampung, 10 Februari 2023
Penulis,

Nurul Faqih

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Kalkulus fraksional merupakan generalisasi dari kalkulus klasik yang muncul berdasarkan perluasan fungsi Gamma dan fungsi Beta. Kalkulus fraksional pertama kali diperkenalkan oleh Leibniz pada tanggal 30 September 1965. Pada saat itu Leibniz mengirimkan surat kepada L'hopital bertanya mengenai bagaimana orde dari suatu turunan pada fungsi apabila diturunkan berbentuk pecahan (α). Kemudian, Leibniz menjawab "itu akan menjadi sebuah paradox, yang mana suatu hari konsekuensinya akan diputuskan" (Kimeu, 2009).

Fungsi yang digunakan dalam integral dan turunan fraksional adalah fungsi faktorial yang menggunakan pendekatan fungsi Gamma dan Beta dengan orde sebarang dan dinyatakan dalam simbol Legendre (Γ). Tidak hanya pada fungsi yang berpangkat, kalkulus fraksional juga dapat dikembangkan pada fungsi lain seperti fungsi eksponensial, trigonometri, laplace, dan fungsi aljabar berpangkat. Selain itu, terdapat beberapa pendekatan untuk mendefinisikan integral dan turunan berorde fraksional antara lain Riemann-Liouville, Grundwald-Letnikov, M. Caputo, Oldham & Spanier, K.S. Miller, B. Ross, dan Kolwankar & Gangal.

Banyak peneliti yang mencoba untuk membahas kalkulus fraksional, yaitu Loverro pada tahun 2004, membahas tentang sejarah, definisi, dan aplikasi integral dan turunan fraksional pada bidang teknik. Kemudian, Magin dan Ovadia pada tahun 2008 membahas mengenai penerapan kalkulus fraksional dalam pemodelan antarmuka jaringan jantung. Kimeu di tahun 2009, membahas mengenai integral dan turunan fraksional serta aplikasinya dalam mengontrol suhu pada sistem aliran panas. Pada tahun 2011, Almusharaf menerapkan kalkulus fraksional dalam model *farmakokinetik*. Johansyah dkk., pada tahun 2017 melakukan penelitian tentang kajian dasar integral dan turunan fraksional versi *Riemann*-Liouville pada fungsi pangkat tiga, dan pada tahun yang sama, Badruzzaman dkk., mengembangkan teori kalkulus fraksional lebih luas lagi, yaitu membahas analisis turunan dan integral fraksional *Riemann-Liouville* fungsi pangkat tiga dan fungsi eksponensial.

Berdasarkan latar belakang di atas, banyak peneliti yang membahas mengenai penerapan dari integral dan turunan fraksional, namun masih sedikit yang membahas mengenai kalkulus fraksional *Riemann-Liouville* dengan orde bilangan pecahan positif. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan berfokus pada aspek teori kalkulus fraksional yaitu mengenai kajian integral fraksional dan turunan fraksional *Riemann-Liouville* pada fungsi pangkat tujuh orde $\frac{5}{2}$.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk mendapatkan bentuk umum dari integral fraksional dan turunan fraksional *Riemann-Liouville* pada fungsi pangkat tujuh orde $\frac{5}{2}$.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yaitu dapat memberikan referensi penelitian yang lebih jauh lagi mengenai masalah pada integral fraksional dan turunan fraksional *Riemann-Liouville* pada fungsi pangkat tujuh, dan sebagai bahan pembelajaran mengenai kalkulus fraksional *Riemann-Liouville*.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini, akan dibahas mengenai definisi-definisi untuk mendukung teori dan pembahasan dalam menyelesaikan penelitian ini.

2.1 Fungsi

Definisi 2.1.1 Diberikan A dan B himpunan, fungsi f dari A ke B dilambangkan

$$f: A \to B$$

merupakan relasi dari A ke B yang memenuhi sifat:

1. $Dom(f) = A$,
2. Jika $(a, b) \in f$ dan $(a, c) \in f$ maka $b = c$ (Roberts, 2015).

Contoh 2.1.1

Diberikan empat hubungan suatu relasi himpunan $A = \{1,2,3,4\}$ ke $B = \{5,6,7,8\}$

$R_1 = \{(1,5)\}$

$R_2 = \{(2,6)\}$

$R_3 = \{(3,7)\}$

$R_4 = \{(4,7)\}$

disebut suatu fungsi karena domain $Dom(f) = A$ dan tidak ada satu anggota $a \in A$ berhubungan dengan dua atau lebih anggota B.

Definisi 2.1.2 Fungsi polinomial adalah fungsi yang memiliki banyak suku (polinom) dalam variabel bebasnya. Bentuk persamaan fungsi polinomial berderajat n pada variabel x ditulis sebagai berikut:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

dimana $a_n \neq 0$. Bilangan a_i disebut koefisien, a_n disebut koefisien utama, dan a_0 merupakan konstanta. Pangkat tertinggi dari variabel bebas suatu fungsi polinomial menunjukkan derajat polinomialnya (Andrew, 2013).

Adapun bentuk fungsi polinomial lainnya sebagai berikut:

Berderajat ke-0	$f(x) = a$	Fungsi konstan
Berderajat ke-1	$f(x) = ax + b$	Fungsi linear
Berderajat ke-2	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Fungsi kuadrat
Berderajat ke-3	$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$	Fungsi kubik
Berderajat ke-4	$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$	Fungsi kuartik
Berderajat ke-5	$f(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex\hat{} + f$	Fungsi quantik

Contoh 2.1.2

1. Diberikan fungsi kubik yaitu $-t^3 + 3t - 17$, mempunyai koefisien utama yaitu -1, bilangan konstanta yaitu -17, koefisien dari t^2 adalah 0, dan koefisien dari t adalah 3.

2. Diberikan fungsi kuadrat yaitu $x^2 + 2x + 10$, mempunyai koefisien utama yaitu 1, koefisiein dari x adalah 2, bilangan konstanta yaitu 10.

2.2 Limit

Definisi 2.2.1 Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, c titik kluster himpunan A, dan $f : A \to \mathbb{R}$. Bilangan L disebut sebagai limit fungsi f di c, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Baladram, 2011).

Contoh 2.2.1

Buktikan $\lim_{x \to 3}(4x - 7) = 5$

Misalkan ε bilangan positif sebarang, terdapat suatu $\delta > 0$ sehingga

$$\text{jika } 0 < |x - 3| < \delta \text{ maka } |(4x - 7) - 5| < \varepsilon \qquad (*)$$

dengan menunjukkan $|(4x - 7) - 5| = |x - 3|$, persamaan $(*)$ ekuivalen dengan pernyataan

$$\text{jika } 0 < |x - 3| < \delta \text{ maka } 4|x - 3| < \varepsilon$$

$$\text{jika } 0 < |x - 3| < \delta \text{ maka } |x - 3| < \tfrac{1}{4}\varepsilon. \qquad (**)$$

Persamaan $(**)$ menunjukkan bahwa $\frac{1}{4}\varepsilon$ adalah suatu δ yang memenuhi syarat.

Sehingga diperoleh:

$0 < |x - 3| < \delta$

$4|x - 3| < 4\delta$

$|4x - 12| < 4\delta$

$|(4x - 7) - 5| < 4\delta$

$|(4x - 7) - 5| < \varepsilon$ (karena $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon$).

Dengan demikian, telah menetapkan jika $\delta = \frac{1}{4}\varepsilon$, maka persamaan $(*)$ berlaku.

Jadi, terbukti $\lim_{x \to 3}(4x - 7) = 5$ (Leithold, 1986).

Misalkan n bilangan bulat positif, k suatu konstanta, dan f dan g suatu fungsi yang mempunyai limit di c, maka:

1. $\lim_{x \to c} k = k$
2. $\lim_{x \to c} x = c$
3. $\lim_{x \to c} kf(x) = k \lim_{x \to c} f(x)$
4. $\lim_{x \to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) + \lim_{x \to c} g(x)$
5. $\lim_{x \to c}[f(x)\, g(x)] = \lim_{x \to c} f(x) \lim_{x \to c} g(x)$
6. $\lim_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)}; \quad \lim_{x \to c} g(x) \neq 0$
7. $\lim_{x \to c}[f(x)]^n = \left[\lim_{x \to c} f(x)\right]^n$, $n \in \mathbb{R}$.

2.3 Turunan

Definisi 2.3.1 Turunan fungsi f adalah f' yang nilainya ada pada sebarang bilangan c dengan bentuk sebagai berikut:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \tag{2.1}$$

dengan syarat limit ini ada dan bukan ∞ atau $-\infty$ (Purcell dkk., 2007).

Contoh 2.3.1

Jika x sebarang bilangan di dalam daerah asal f, maka turunan $f(x) = 3x^2 + 12$ yaitu:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{[3(x+h)^2 + 12] - (3x^2 + 12)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 12 - 3x^2 - 12}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (6x + 3h) \\ &= 6x. \end{aligned}$$

Jadi, turunan f adalah fungsi f' yang didefinisikan oleh $f'(x) = 6x$. Daerah asal f' himpunan semua bilangan riil, yang sama dengan daerah asal f.

Aturan pencarian turunan memiliki sifat sebagai berikut:

1. $D_x(k) = 0$ (2.2)
2. $D_x(x) = 1$ (2.3)
3. $D_x(x^n) = nx^{n-1}$ (2.4)
4. $D_x(kf(x)) = kD_x(f(x))$ (2.5)
5. $D_x(f(x) + g(x)) = D_x(f(x)) + D_x(g(x))$ (2.6)
6. $D_x(f(x) - g(x)) = D_x(f(x)) - D_x\big(g(x)\big)$ (2.7)
7. $D_x(f(x)g(x)) = g(x)D_x(f(x)) + f(x)D_x\big(g(x)\big)$ (2.8)

8. $D_x\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_x(f(x)) - f(x)D_x(g(x))}{g^2(x)}$ (2.9)

9. $D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$. (2.10)

Bukti persamaan (2.2)

Berdasarkan persamaan (2.1), diperoleh sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h}$$

$$f'(x) = 0 \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$k =$ konstanta sebarang

$h =$ variabel limit.

Bukti persamaan (2.3)

Berdasarkan persamaan (2.1), diperoleh sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$$f'(x) = 1 \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$h =$ variabel limit.

Bukti persamaan (2.4)

Berdasarkan persamaan (2.1), diperoleh sebagai berikut:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + nxh^{n-2} + h^n\right]}{h}$$

$f'(x) = nx^{n-1}$ ■

keterangan:

$n =$ pangkat dari suatu fungsi

$h =$ variabel limit.

Bukti persamaan (2.5)

Misalkan $F(x) = kf(x)$, berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh sebagai berikut:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{kf(x+h) - kf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} k \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= k \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$F'(x) = kf'(x)$ ■

keterangan:

$k =$ konstanta sebarang

$h =$ variabel limit

$f'(x) =$ turunan pertama fungsi f.

Bukti persamaan (2.6)

Misalkan $F(x) = f(x) + g(x)$, berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh sebagai berikut:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$h =$ variabel limit

$f'(x) =$ turunan pertama fungsi f

$g'(x) =$ turunan pertama fungsi g.

Bukti persamaan (2.7)

Misalkan $F(x) = f(x) - g(x)$, berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh sebagai berikut:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - g(x+h)] - [f(x) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] - [g(x+h) - g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$F'(x) = f'(x) - g'(x) \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$h =$ variabel limit

$f'(x) =$ turunan pertama fungsi f

$g'(x) =$ turunan pertama fungsi g.

Bukti persamaan (2.8)

Misalkan $F(x) = f(x)g(x)$, berdasarkan persamaan (2.1) diperoleh sebagai berikut:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h)] - [f(x)g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)] + [f(x+h) - f(x)g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(x)f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$F'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \qquad \blacksquare$$

keterangan:

h = variabel limit

$f'(x)$ = turunan pertama fungsi f

$g'(x)$ = turunan pertama fungsi g.

Bukti persamaan (2.9)

Misalkan $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, diperoleh sebagai berikut:

$$F'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[f(x+h)g(x)] - [f(x)g(x+h)]}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)f(x+h) - g(x)f(x) + g(x)f(x) - f(x)g(x+h)}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x)[f(x+h) - f(x)] - f(x)[g(x) - g(x+h)]}{h} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$= \left[g(x) \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] \lim_{h \to 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)}$$

$$F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \blacksquare$$

keterangan:

h = variabel limit

$f'(x)$ = turunan pertama fungsi f

$g'(x)$ = turunan pertama fungsi g.

Bukti persamaan (2.10)

Berdasarkan hasil Bukti persamaan (2.9), diperoleh sebagai berikut:

$$D_x(x^{-n}) = D_x\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \frac{x^n.0 - 1.nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$D_x(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$ ■

keterangan:

$n =$ pangkat dari suatu fungsi

$h =$ variabel limit.

2.4 Integral

Definisi 2.4.1 Fungsi F dikatakan anti turunan (integral) dari f pada suatu interval I jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua x dalam I (Saparwadi, 2015).

Bentuk umum integral dapat dituliskan sebagi berikut:

$$\int f(x)\ dx = F(x) + C$$

atau

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)$$

simbol $\int$ menyatakan operasi anti-turunan. Jika $F(x)$ adalah fungsi dengan turunannya adalah $F'(x) = f(x)$ ekuivalen dengan $d[F(x)] = f(x)\ dx$. Pada interval tertentu disumbu x disebut integral tak tentu dengan hasil integral $f(x)$ adalah $F(x) + C$, untuk C sebarang konstanta yang disebut sebagai konstanta integral. Sedangkan pada interval $[a, b]$ disumbu x disebut integral tentu. Istilah integral tak tentu adalah sebagai ganti anti-turunan. Notasi $\int$ disebut tanda integral, $f(x)$ disebut integran dan dx disebut variabel integral (Purcell, *et al.*, 2007).

Berikut diberikan contoh integral.

Contoh 2.4.1

Anti turunan dari $f(x) = x + 2$ adalah $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$.

Selanjutnya, diberikan sifat-sifat integral.

Teorema 2.4.2 Diberikan fungsi f, g mempunyai anti-turunan (integral tak tentu) dan misalkan k suatu konstanta, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

1. $\int kf(x)\ dx = k \int f(x)\ dx$ (2.11)
2. $\int [f(x) + g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx + \int g(x)\ dx$ (2.12)
3. $\int [f(x) - g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx - \int g(x)\ dx.$ (21.3)

(Purcell, *et all.*, 2007).

Bukti persamaan (2.11)

Berdasarkan hasil diferensiasi ruas kanan, diperoleh sebagai berikut:

$$D_x[kf(x)dx] = kD_x \int f(x)dx$$
$$= kf(x) \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$k =$ koefisien sebarang

$f(x) =$ integran.

Bukti persamaan (2.12)

Berdasarkan hasil diferensiasi ruas kanan, diperoleh sebagai berikut:

$$D_x\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = D_x \int f(x)dx + D_x \int g(x)dx$$
$$= f(x) + g(x) \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$f(x) =$ integran

$g(x) =$ integran.

Bukti persamaan (2.13)

Berdasarkan hasil diferensiasi ruas kanan, diperoleh sebagai berikut:

$$D_x\left[\int f(x)dx - \int g(x)dx\right] = D_x\int f(x)dx - D_x\int g(x)dx$$
$$= f(x) - g(x) \qquad \blacksquare$$

keterangan:

$f(x) =$ integran

$g(x) =$ integran.

2.5 Fungsi Gamma

Definisi 2.5.1 Fungsi Gamma merupakan fungsi yang berasal dari perluasan fungsi faktorial untuk semua bilangan real. Fungsi Gamma ditulis sebagai berikut:

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}dx \tag{2.14}$$

yang konvergen untuk $m > 0$ (Kimeu, 2009).

Fungsi Gamma memiliki sifat-sifat istimewa, bentuk keistimewaan fungsi Gamma akan ditinjau dari beberapa nilai m sebagai berikut:

2.5.2 Nilai m bilangan bulat positif

Kasus khusus untuk nilai m bilangan bulat positif, akan ditinjau beberapa nilai sebagai berikut (Prayudi, 2009):

Pertama jika nilai $m = 1$.

Menggunakan metode integral parsial dihasilkan sebagai berikut:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-x}dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-x} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{1}{e^x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[1 - \frac{1}{e^b}\right]$$

$$= 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{1}{e^b}$$

$$= 1 \qquad \blacksquare$$

jadi, diperoleh hasil bahwa $\Gamma(1) = 1$.

Selanjutnya untuk $m = 2$ dihasilkan sebagai berikut:

$$\Gamma(2) = \int_0^\infty x^{2-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty x e^{-x} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b x e^{-x} dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{x+1}{e^x}\right]_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left[1 - \frac{b+1}{e^b}\right]$$

$$= 1 - \lim_{b\to\infty} \frac{b+1}{e^b}$$

$$= 1 \qquad \blacksquare$$

jadi, diperoleh hasil bahwa $\Gamma(2) = 1$.

Dengan demikian, untuk $m > 2$ menggunakan metode integral parsial diperoleh sebagai berikut:

$$\Gamma(m+1) = \Gamma(m)$$

$$= m(m-1)\Gamma(m-1)$$

$$= m(m-1)(m-2)\Gamma(m-2)$$

$$= m(m-1)(m-2)(-3) \dots 2\ 1\Gamma(1)$$

$$= m!. \qquad (2.15) \blacksquare$$

Bukti persamaan (2.15)

Menggunakan metode integral parsial,

misalkan:

$$u = x^m \to du = mx^{m-1}dx$$

$$dv = e^{-x}dx \to v = -e^{-x}$$

sehingga diperoleh sebagai berikut:

$$\Gamma(m+1) = uv - \int_0^\infty vdu$$

$$= \lim_{b\to\infty} \int_0^b x^m(-e^{-x}) - \int_0^\infty (-e^{-x})\ mx^{m-1}dx$$

$$= 0 + m\int_0^\infty x^{m-1}e^{-x}\ dx$$

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m). \qquad \blacksquare$$

Kasus khusus, untuk $m > 2$ akan dihasilkan nilai fungsi Gamma yaitu:

$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2! = 2$

$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3! = 6$

$\Gamma(5) = \Gamma(4+1) = 4! = 24$

dan seterusnya.

Selanjutnya, diberikan sifat fungsi Gamma untuk bilangan $m = \frac{1}{2}$.

2.5.3 Nilai $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$

Kasus khusus, untuk nilai $m = \frac{1}{2}$, maka dari persamaan (2.14) diperoleh sebagai berikut:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\left(\frac{1}{2}\right)-1}e^{-x}dx$$

$$= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx$$

$$= \sqrt{\pi}. \qquad (2.16)\blacksquare$$

Bukti persamaan (2.16)

Berdasarkan persamaan (2.14), maka diperoleh sebagai berikut:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{\left(\frac{1}{2}\right)-1} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx$$

misalkan:

$$x = p^2 \rightarrow \frac{dx}{dp} = 2p$$

batasan:

$$x = 0 \rightarrow p = 0$$

$$x = \infty \rightarrow p = \infty$$

sehingga diperoleh

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty (p^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-p^2} 2p dp$$

$$= 2\int_0^\infty e^{-p^2} dp$$

persamaan ini ekuivalen dengan

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-q^2} dq$$

maka dengan mengalikan kedua persaman diperoleh

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(p^2+q^2)} dp dq$$

misalkan:

$p = r\cos(\theta)$

$q = r\sin(\theta)$

$p^2 + q^2 = r^2$

menggunakan matriks Jacobian diperoleh

$$dpdq = \begin{vmatrix} \frac{dp}{dr} & \frac{dp}{d\theta} \\ \frac{dq}{dr} & \frac{dq}{d\theta} \end{vmatrix} dr d\theta = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} dr d\theta = r dr d\theta$$

oleh karena itu,

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta$$

kemudian misalkan:

$$u = r^2$$

$$du = 2rdr \rightarrow \frac{1}{2}du = rdr$$

diperoleh

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2 = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-u} du d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_{b\to\infty} (-e^{u})_0^b \, d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lim_{b\to\infty} (- e^{b}) - (\lim_{b\to\infty} (-e^{0}))d\theta$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta$$

$$= 2(\theta)_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \pi$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$ ■

Kasus khusus, untuk nilai $m > \frac{1}{2}$ dengan kelipatannya akan dihasilkan nilai fungsi Gamma yaitu:

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \Gamma\left(1 + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} \times \frac{3}{4}\sqrt{\pi} = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$$

dan seterusnya.

2.5.4 Nilai $m < 0$

Berdasarkan pendekatan dari hubungan rumus rekursi seperti pada persamaan (2.15) dapat juga dikembangkan untuk nilai $m < 0$. Dari hubungan $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ diperoleh rumus sebagai berikut:

$$\Gamma(m) = \frac{\Gamma(m+1)}{m}. \tag{2.17}$$

Bukti persamaan (2.17)

Berdasarkan persamaan (2.15), diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Gamma(m+2) &= (m+1)\Gamma(m+1)\\ &= (m+1)m\Gamma(m)\\ &= \cdots\\ \Gamma(m) &= \frac{\Gamma(m+2)}{m(m+1)}\end{aligned}$$

demikian pula dari persamaan di bawah ini

$$\begin{aligned}\Gamma(m+3) &= (m+2)(m+1)\Gamma(m+1)\\ &= (m+2)(m+1)m\Gamma(m)\\ &= \cdots\\ \Gamma(m) &= \frac{\Gamma(m+3)}{m(m+1)(m+2)}\end{aligned}$$

jadi diperoleh rumus umum sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\Gamma(m) &= \frac{\Gamma(m+1)}{m}\\ &= \frac{\Gamma(m+2)}{m(m+1)}\\ &= \frac{\Gamma(m+3)}{m(m+1)(m+2)}\\ &= \cdots\\ &= \frac{\Gamma(m+k+1)}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}\end{aligned}$$

dengan $m \neq 0$ dan $m \neq -1, -2, -3, \ldots$ bilangan bulat negatif. Dengan demikian, diperoleh rumus sebagai berikut:

$$\Gamma(m) = \frac{\Gamma(m+k+1)}{m(m+1)(m+2)\ldots(m+k)} \qquad \blacksquare$$

dengan k adalah bilangan bulat terkecil sedemikian sehingga $(m+k+1) > 0$.

Sebagai ilustrasi, untuk $m < 0$ dengan kelipatan $\frac{1}{2}$ akan dihasilkan nilai fungsi Gamma yaitu:

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left(-2\sqrt{\pi}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{5}{2}+1\right)}{-\frac{5}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)}{-\frac{5}{2}} = \left(-\frac{2}{5}\right) \times \frac{4}{3}\sqrt{\pi} = -\frac{8}{15}\sqrt{\pi}$$

dan seterusnya.

2.6 Fungsi Beta

Definisi 2.6.1 Fungsi Beta didefinisikan oleh integral tentu. Definisi fungsi Beta ditulis sebagai berikut:

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad (2.18)$$

dengan $m \geq 1$, $n \geq 1$ yang konvergen untuk m dan $n > 0$ (Kimeu,2009).

Fungsi Beta dapat didefinisikan dalam bentuk fungsi Gamma:

1. $B(m,n) = B(n,m)$ (2.19)
2. $B(m,n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$. (2.20)

Bukti persamaan (2.19)

Berdasarkan definisi persamaan (2.18)

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx$$

menggunakan transformasi $x = 1 - y$, maka diperoleh sebagai berikut:

$$B(m,n) = \int_0^1 (1-y)^{m-1}(y)^{n-1}dy$$

$$= \int_0^1 (y)^{n-1}\,(1-y)^{m-1}dy$$

$B(m,n) = B(n,m).$ ■

Bukti persamaan (2.20)

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^{m-1}e^{-z}dz$$

misalkan:

$$z = x^2 \rightarrow dz = 2xdx$$

diperoleh

$$\Gamma(m) = \int_0^\infty z^{m-1}e^{-z}dz$$

$$= 2\int_0^\infty x^{2m-1}\,e^{-x^2}dx$$

ekuivalen dengan

$$\Gamma(n) = 2\int_0^\infty y^{2n-1}\,e^{-y^2}dy$$

dengan mengalikan kedua fungsi Gamma, diperoleh:

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \left(2\int_0^\infty x^{2m-1}\,e^{-x^2}dx\right)\left(2\int_0^\infty y^{2n-1}\,e^{-y^2}dy\right)$$

$$= 4\int_0^\infty\int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

menggunakan transformasi koordinat kutub yaitu:

$a).\, x = r\sin(t)\,, y = r\cos(t)\,, x^2 + y^2 = r^2, \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

$b).\, dxdy = rdrdt$

c). Batas $0 < x < \infty, 0 < y < \infty, 0 < r < \infty$, menjadi $0 < r < \frac{2}{\pi}$

dengan substitusi dihasilkan

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = 4\int_0^\infty \int_0^\infty x^{2m-1}y^{2n-1}e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty r\cos(\theta)^{2m-1}\, r\sin\,(\theta)^{2n-1} r dr d\theta$$

$$= 4\left(\int_0^\infty r^{2(m+n)-1}\, e^{-r^2}\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2m-1}(\theta)sin^{2n-1}(\theta)d\theta\right)$$

$$= \Gamma(m+n)B(n,m)$$

karena fungsi Beta memiliki sifat simetri seperti pada persamaan (2.19), maka

$$\Gamma(m)\Gamma(n) = \Gamma(m+n)B(m,n)$$

$$B(m,n) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}. \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.6.1

Hasil dari integral

$$\int_0^1 x^8(1-x)^4 dx = B(9{,}5)$$

$$= \frac{\Gamma(9)\Gamma(5)}{\Gamma(9+5)}$$

$$= \frac{\Gamma(9)\Gamma(5)}{\Gamma(14)}$$

$$= \frac{8!\,5!}{13!}$$

$$= \frac{1}{6435}.$$

2.7 Persamaan Diferensial

Definisi 2.7.1 Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan yang melibatkan satu atau lebih dari suatu turunan fungsi yang mengandung satu atau beberapa turunan dari satu variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas (Prayudi, 2006).

Definisi 2.7.2 Persamaan diferensial biasa merupakan suatu persamaan diferensial yang melibatkan satu variabel bebas, jika diambil $y(x)$ sebagai suatu fungsi satu variabel, maka x dinamakan variabel bebas dan y dinamakan variabel tak bebas. persamaan diferensial biasa dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$f(x, y, y', y'', y''', \cdots y^{(n)}) = 0.$$

Persamaan ini menyatakan bahwa terdapat hubungan antara variabel bebas x dan variabel tak bebas y beserta turunannya dalam bentuk himpunan persamaan yang secara identik sama dengan nol (Budi., 2010).

Persamaan diferensial dikatakan mempunyai orde-n jika orde turunan tertinggi yang terlibat adalah n, sedangkan jika turunan dengan orde tertinggi itu berderajat k maka persamaan tersebut disebut persamaan diferensial berderajat k.

Contoh 2.7.1

1. $xy' + y = 6$
2. $y''' + 2(y'') + y' = \cos(x)$.

Pada contoh 1 dan 2 di atas, lambang y', y'', dan y''' berturut-turut menyatakan turunan pertama, turunan kedua, serta turunan ketiga dari fungsi $y(x)$ terhadap y. Dengan kata lain $y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, dan $y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$.

Contoh 2.7.2

Diketahui $y = A\sin(x) + B\cos(x)$, dimana A dan B adalah konstanta sembarang. Jika diturunkan diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = A\cos(x) - B\sin(x)$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -A\sin(x) - B\cos(x)$$

jika identik dengan persamaan semula, tapi tandanya berlawanan, artinya

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Karena pangkat tertinggi turunannya adalah dua maka merupakan persamaan diferensial orde dua.

2.8 Rumus Dirichlet

Definisi 2.8.1 Diberikan suatu fungsi kontinu $h(x,y)$ dan bilangan real positif α dan β, rumus Dirichlet didefinisikan:

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1}\, h(x,y) dy$$

$$= \int_0^t dy \int_y^t (t-x)^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1} h(x,y) dx \qquad (2.21)$$

jika $h(x,y) = g(x)f(y)$ dan $g(x) = 1$, maka

$$\int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \int_0^x (x-y)^{\beta-1}\, f(y) dy$$

$$= B(\alpha,\beta) \int_y^t (t-y)^{\alpha+\beta-1} f(y) dy \qquad (2.22)$$

dengan $B(\alpha,\beta)$ adalah fungsi Beta (Whittaker,1927).

2.9 Integral Fraksional

Integral fraksional didefinisikan sebagai berikut:

$$D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_c^x (x-t)^{\alpha-1}\, f(t) dt \qquad \alpha > 0. \qquad (2.23)$$

Persamaan (2.23) merupakan integral fraksional Riemann, dengan $D_x^{-\alpha}$ menotasikan integral fraksional dari sebuah fungsi dengan sebarang orde α, dengan syarat $\alpha = \frac{n}{m}$ dimana n adalah bilangan prima, m adalah bilangan bulat positif dan α adalah bilangan rasional tak negatif. Dalam notasi ini, c dan x merupakan batas dari integral. Selain itu, metode lain dari integral fraksional adalah metode Liouville yang didefinisikan oleh

$$D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad \alpha > 0 \qquad (2.24)$$

jika $c = 0$ pada persamaan (2.23), maka diperoleh integral fraksional *Riemann-Liouville* yang didefinisikan sebagai berikut:

$$D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad \alpha > 0. \qquad (2.25)$$

(Herrmann, 2011).

Definisi 2.9.1 Diberikan sebuah bilangan real α dan fungsi f kontinu pada $(0, \infty)$ yang terintegral disetiap subinterval $[0, \infty)$ dengan $x > 0$

$$J^{\alpha} f(x) = D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \qquad \alpha > 0 \qquad (2.26)$$

disebut integral fraksional Riemann-Liouville. Notasi integral fraksional berorde α dengan $c = 0$, dari fungsi $f(x)$ ditulis sebagai $J^{\alpha} f(x)$. Integral fraksional berorde α adalah anti turunan fraksional berorde $(-\alpha)$ untuk fungsi $f(x)$ ditulis sebagai $D^{-\alpha} f(x)$, sehingga berlaku $J^{\alpha} f(x) = D^{-\alpha} f(x)$ (Johansyah, *et al.*, 2017).

Bukti persamaan (2.26)

Menggunakan teori persamaan diferensial, diberikan persamaan diferensial dengan nilai awal

$$y^{n}(x) = f(x) \qquad (2.27)$$

dan

$$y(c) = 0, y'(c) = 0, \dots, y^{n-1}(c) = 0.$$

Persamaan (2.27) mempunyai penyelesaian tunggal yaitu

$$y(x) = \int_{c}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

akan dibuktikan dengan induksi matematika.

Basis induksi:

Untuk $n = 1$ diperoleh

$$y(c) = 0, y'(c) = 0$$

diperoleh penyelesaian tunggal yaitu

$$\int_c^x y'(t)dt = \int_c^x \frac{(x-t)^{1-1}}{(1-1)!} f(t)dt$$

$$y(x) - y(c) = \int_c^x f(t)dt$$

karena $y(c) = 0$, maka diperoleh

$$y(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Hipotesa induksi:

Untuk $n = k$ diperoleh

$$y^k(x) = f(x)$$

dan

$$y(c) = 0, y'(c) = 0, \dots, y^{k-1}(c) = 0$$

penyelesaian tunggalnya

$$y(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt.$$

Langkah induksi:

Selanjutnya, untuk $n = k + 1$, diperoleh

$$y^{k+1}(x) = f(x)$$

dan

$$y(c) = 0, y'(c) = 0, \dots, y^k(c) = 0$$

karena $y^{k+1}(x) = (y')^k(x)$, misalkan $u(x) = y'(x)$ diperoleh

$$u^k(x) = f(x)$$

$$u(c) = 0, u'(c) = 0, \dots, u^{k-1}(c) = 0$$

menggunakan hipotesa induksi diperoleh

$$u(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt$$

dan

$$y'(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dt$$

dengan mengambil integral tentu batas bawah c dan batas atas x, menggunakan rumus Dirichlet diperoleh

$$\int_c^x y'(t)dt = y(x) - y(c)$$

$$= \int_{z=c}^{x} \int_{t=c}^{z} \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} f(t)dtdz$$

$$= \int_{t=c}^{x} f(t)dt \int_{z=t}^{x} \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} dz$$

$$= \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{k!} f(t)dt.$$

Jadi, menurut Prinsip Induksi Matematika

$$y(x) = \int_c^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt$$

benar untuk setiap bilangan asli n, karena $f(x)$ pada persamaan (2.27) merupakan turunan ke $-n$ dari $y(x)$, maka $y(x)$ dapat diartikan sebagai integral ke $-n$ dari $f(x)$ yaitu:

$$D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-1)!} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)dt, \qquad (2.28)$$

kemudian dengan mensubstitusikan bilangan bulat n dengan sebarang bilangan real positif α dan $(n-1)!$ dengan fungsi Gamma dan $c = 0$, persamaan (2.28) menjadi Persamaan (2.27) maka diperoleh integral fraksional Riemann-Liouville

$$D_x^{-n} f(x) = D^{-\alpha} f(x)$$

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-1)!} \int_c^x (x-t)^{n-1} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt. \qquad (2.29) \blacksquare$$

Contoh 2.9.1

Diberikan fungsi $f(x) = x^m$ dengan $m = 0$, sehingga $x^m = x^0 = 1$. Menurut Definisi 2.9.1 integral fraksional orde α dari fungsi konstan k adalah

$$D^{-\alpha} k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha}.$$

Secara khusus, jika $\alpha = \frac{1}{2}$, maka

$$D^{-\frac{1}{2}} x^0 = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Teorema 2.9.2 Diberikan fungsi f kontinu pada diselang $[0, \infty)$ dan bilangan real positif α dan β. Untuk setiap $x > 0$ berlaku

$$D^{-\alpha}\left[D^{-\beta}\ f(x)\right] = D^{-(\alpha+\beta)} f(x). \qquad (2.30)$$

(Kimeu, 2009).

Bukti

Berdasarkan Definisi (2.9.1), diperoleh

$$\begin{aligned}
D^{-\alpha}\left[D^{-\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \left[D^{-\beta} f(x)\right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-y)^{\beta-1} f(y) dy dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\, dt \int_0^t (t-y)^{\beta-1} f(y) dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha,\beta) \int_0^x (x-y)^{\alpha+\beta-1}\, f(y) dy \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-y)^{\alpha+\beta-1}\, f(y) dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_0^x (x-y)^{\alpha+\beta-1}\, f(y) dy
\end{aligned}$$

$D^{-\alpha}\left[D^{-\beta} f(x)\right] = D^{-(\alpha+\beta)} f(x).$ ■

Diberikan $\alpha \geq 0$ dan $\beta \geq 0$, integral fraksional yang dikemukakan oleh Riemann-Liouiville memiliki sifat sebagai berikut:

1. $J^{\alpha} k f(x) = k\, J^{\alpha} f(x)$ (2.31)
2. $J^{\alpha} J^{\beta} f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x)$ (2.32)
3. $J^{\alpha} J^{\beta} f(x) = J^{\beta} J^{\alpha} f(x).$ (2.33)

(Badruzzaman, *et al.*, 2017).

Bukti persamaan (2.31)

Berdasarkan persamaan (2.29), misalkan $\alpha > 0$ dan k adalah suatu koefisien sebarang maka berlaku

$$J^\alpha kf(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{kf(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

$$= k\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

$$= k\,J^\alpha f(x)$$

untuk $x \in [a,b]$, $\alpha > 0$ dan k sebarang koefisien diperoleh

$J^\alpha kf(x) = k\,J^\alpha f(x)$ ■

(Kilbas, *et al*., 2006).

Bukti persamaan (2.32)

Berdasarkan persamaan (2.29), misalkan sebarang $\alpha, \beta > 0$ berlaku

$$J^\alpha J^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{J_a^\beta f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}\left[\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du\right]dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du \tag{2.34}$$

selanjutnya menggunakan rumus Dirichlet sebagai berikut:

$$\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\int_a^t \frac{1}{(t-u)^{1-\beta}}\; q(t,u)du$$

$$= \int_a^x du\int_t^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}q(t,u)du \tag{2.35}$$

untuk setiap $q(t,u) = f(u)$ maka dari persamaan (2.35) diperoleh

$$\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\int_a^t \frac{1}{(t-u)^{1-\beta}}\; f(u)du$$

$$= \int_a^x f(u)du\int_t^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}dt \tag{2.36}$$

substitusi persamaan (2.36) ke persamaan (2.34)

$$J^\alpha J^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}dt\int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}}du \tag{2.37}$$

$$J^{\alpha}J^{\beta}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_{a}^{x} f(u)du \int_{t}^{x} \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}dt \qquad (2.38)$$

dalam menyelesaikan persamaan (2.38), substitusikan variabel s ke dalam variabel t pada integral kedua dengan

$$s = \frac{t-u}{x-u}$$

$$t = u + s(x-u) \rightarrow dt = (x-u)ds$$

diperoleh

$$\int_{t}^{x} \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}dt$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{(x-u)}{\left(x-\left(u+s(x-u)\right)\right)^{1-\alpha}\left(\left(u+s(x-u)\right)-u\right)^{1-\beta}}ds$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{\left(x-\left(u+s(x-u)\right)\right)^{1-\alpha}(s(x-u))^{1-\beta}}(x-u)ds$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{\left((x-u)(1-s)\right)^{1-\alpha}(s(x-u))^{1-\beta}}(x-u)ds$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-u)^{1-\alpha+1-\beta}(1-s)^{1-\alpha}s^{1-\beta}}(x-u)ds$$

$$= \int_{0}^{1} \frac{1}{(x-u)^{1-\alpha+1-\beta-1}(1-s)^{1-\alpha}s^{1-\beta}}ds$$

$$= \frac{1}{(x-u)^{1-\alpha+1-\beta-1}}\int_{0}^{1} \frac{1}{(1-s)^{1-\alpha}s^{1-\beta}}ds$$

$$= \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}}\int_{0}^{1} (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds \qquad (2.39)$$

menggunakan definisi fungsi Beta, maka persamaan (2.39) diperoleh

$$\int_{t}^{x} \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}dt = \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}}\int_{0}^{1} (1-s)^{\alpha-1}s^{\beta-1}ds$$

$$= \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \qquad (2.40)$$

substitusi persamaan (2.40) ke dalam persamaan (2.39) diperoleh

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x f(u)\, du \int_t^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}(t-u)^{1-\beta}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} f(u)du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}} f(u)du$$

$$= J_a^{\alpha+\beta} f(x)$$

untuk sebarang $\alpha, \beta > 0$ berlaku

$$J_a^\alpha J_a^\beta f(x) = J_a^{\alpha+\beta} f(x)$$

hasil dari pembuktian di atas ekuivalen dengan

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^{\alpha+\beta} f(x) \qquad \blacksquare$$

(Kilbas, *et al*., 2006).

Bukti persamaan (2.33)

$$J^\alpha J^\beta f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{J_a^\beta f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\beta}}\, du \right] dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}} f(u)du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_a^x \frac{1}{(x-u)^{1-(\alpha+\beta)}} f(u)du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\boldsymbol{\alpha}}^{\boldsymbol{x}} \frac{1}{(x-t)^{1-\beta}} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{1-\alpha}}\, du \right] dt$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{\boldsymbol{x}} \frac{J^\alpha f(t)}{(x-t)^{1-\beta}}\, dt$$

$$= J^\beta J^\alpha f(x)$$

$$J^\alpha J^\beta f(x) = J^\beta J^\alpha f(x)$$

hasil dari pembuktian di atas ekuivalen dengan

$J^{\alpha}J^{\beta}f(x) = J^{\beta}J^{\alpha}f(x)$ ■

(Kilbas, *et al*., 2006).

2.10 Turunan Fraksional

Definisi 2.10.1 Turunan fraksional Riemann-Liouville didefinisikan sebagai berikut:

$$D^{\alpha}f(x) = \frac{d^n(D^{-u}f(x))}{dx^n} \tag{2.40}$$

atau

$$D^{\alpha}\, f(x) = \frac{1}{\Gamma(u)} \frac{d^n(\int_{x_0}^{x}(x-t)^{u-1}f(t)dt)}{dx^n} \tag{2.41}$$

diasumsikan bahwa $u = n - \alpha$, dengan $0 < u < 1$ dan n adalah bilangan bulat terkecil yang lebih besar dari u, ini mengartikan bahwa n adalah kelipatan orde dari turunan tersebut, dengan α orde sebarang, $u = n - \alpha$, $n - 1 \leq \alpha < n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_0 < x$, $x > 0$ dan D^{α} operator turunan fraksional berorde α (Samko, *et al*., 1993).

Lemma 2.10.2 Diberikan fungsi f bernilai real, untuk setiap bilangan real positif α berlaku

$$D^{\alpha}D^{-\alpha}f(x) = f(x). \tag{2.42}$$

Lemma 2.10.3 Diberikan fungsi f kontinu pada interval $[0, \infty)$ berlaku

$$D^{-\frac{5}{2}}D^{\frac{5}{2}}f(x) = f(x). \tag{2.43}$$

Sifat -sifat turunan fraksional sebagai berikut:

1. $D^{\alpha}\big(kf(x)\big) = kD^{\alpha}\big(f(x)\big)$ (2.44)
2. $D^{\alpha}\big(kf(x) + jf(x)\big) = akf(x) + jD^{\alpha}f(x).$ (2.45)

(Johansyah, *et al*,. 2017).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2021/2022 dan bertempat di Program Studi Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Studi literatur buku, jurnal dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Mempelajari definisi dan teorema yang relevan dengan kasus atau permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Secara umum, langkah-langkah dalam penelitian ini dinyatakan sebagai berikut:

1 Mendefinisikan bentuk umum integral fraksional fungsi polinomial orde α.

2 Mendefinisikan bentuk umum turunan fraksional fungsi polinomial orde α.

3 Memperoleh hasil integral fraksional dari fungsi polinomial pangkat tujuh dengan orde $\alpha = \frac{5}{2}$.

4 Memperoleh turunan fraksional dari fungsi polinomial pangkat tujuh dengan orde $\alpha = \frac{5}{2}$.

5 Memberikan contoh persamaan integral fraksional dan turunan fraksional.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Integral fraksional dan turunan fraksional merupakan bentuk perhitungan yang merupakan perluasan dari kalkulus klasik. Dalam kalkulus fraksional tak sedikit menggunakan fungsi yang menjadi dasar dalam pengerjaannya, ini terlihat dari adanya keterlibatan beberapa fungsi seperti fungsi Gamma, fungsi Beta dan beberapa fungsi yang terlibat sebagai fungsi utama. Kalkulus fraksional menjawab bahwa orde integral dan turunan tidak hanya terbatas pada bilangan bulat saja, tetapi dapat diperluas sampai orde bilangan real. Beberapa fungsi dapat dikaji untuk melihat definisi, karakteristik dan sifatnya, seperti integral dan turunan fraksional Riemann-Liouville pada fungsi polinomial pangkat tujuh.

Pada fungsi polinomial pangkat tujuh diperoleh bahwa integral dan turunannya dapat dioperasikan sampai orde bilangan real dengan $\alpha > 0$ dengan masing-masing bentuk umum sebagai berikut:

a. Integral Fraksional Fungsi Pangkat Tujuh Orde α

Memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$D^{-\alpha}x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)}x^{\alpha+m}$$

untuk $\alpha > 0, m > -1$ dan $x > 0$.

Bentuk umum di atas memiliki karakteristik yaitu orde dari integral tersebut berada dalam interval $\alpha > 0$, sebab orde tersebut akan menentukan nilai n pada turunan fraksionalnya. Pada skripsi ini, orde yang dikaji adalah $\frac{5}{2}$, sehingga bentuk umum di atas memenuhi, hasil perhitungannya memiliki sifat cenderung naik dari pangkat terkecil sampai terbesar untuk setiap sukunya dan nilai n yang dibutuhkan yaitu $n = 3$.

b. Turunan Fraksional Fungsi Pangkat Tujuh

Memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$D^{\alpha}x^{m} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)}x^{m-\alpha}.$$

untuk $m \geq 0$, $2 \leq \alpha < 3$ dan $x > 0$.

Bentuk umum ini memiliki karakteristik yaitu orde dari integral tersebut berada dalam interval $2 \leq \alpha < 3$ dengan nilai $n = 3$. Nilai n tergantung dari orde turunan, sebab orde tersebut yang menentukan berapa nilai n yang akan dipilih sesuai dengan interval pada turunan Riemann-Liouville yaitu $n - 1 \leq \alpha < n$. Apabila memilih $n = 1$, maka orde dari turunannya adalah $0 \leq \alpha < 1$. Apabila memilih $n = 2$, maka orde dari turunannya adalah $1 \leq \alpha < 2$.

5.2 Saran

Terdapat beberapa teori dan masalah yang belum dikaji secara luas pada skripsi ini, seperti integral fraksional dan turunan fraksional yang lebih dinaikkan lagi ordenya, kombinasi beberapa fungsi dalam pengoperasiannya, dan perluasan masalah dalam dunia nyata ataupun pada bidang ilmu lain secara terapan. Kemudian, untuk skripsi ini dilanjutkan lebih dalam lagi sehingga diharapkan dapat digunakan dan berkontribusi secara mendasar pada bidang ilmu matematika dan dapat digunakan lebih luas pada bidang ilmu lain baik secara teori maupun terapan.

DAFTAR PUSTAKA

Almusharaf, Amera. 2011. *Development of Fractional Calculus to Pharmacokinetic Model* (Master Thesis). Kentucky: Western Kentucky University.

Andrew, P. 2013. *MathsTrack.* Course Notes. The University of Adelaide. Australia.

Badruzzaman, F. H., Nahar, J., dan Johansyah, M. D. 2017. Analisis Turunan dan Integral Fraksional Fungsi Pangkat Tiga dan Fungsi Eksponensial. *Jurnal Matematika*. **16**(2): 1-9.

Baladram, M. S. 2011. *Kalkulus I: Soal dan Pembahasan.* Bandung. MATHCO Publishing.

Budi, N. D. 2010. *Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

Herrmann, R. 2011. *Fractional Calculus an Introduction for Physicists*. World Scientific, New Jersey.

Johansyah, M. D., Nahar, J., Supriatna, A. K., dan Supian, S. 2017. Kajian Dasar Integral dan Turunan Fraksional. *IRONS*. **16**(2): 204-209.

Kilbas, A.A., Marichev, O.I., and Samko, S.G. 2006. *Theory and Aplications of Fractional Differential Equations.* Elsevier, Amsterdam.

Kimeu, J. M. 2009. *Fractional Calculus: Definitions and Applications* (Master Thesis). Kentucky: Western Kentucky University.

Leithold, L. 1986. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik.* Edisi Kelima. Terjemahan Drs. E. Hutahaean. Jakarta: Erlangga.

Loverro, A. 2004. *Fractional Calculus: History, Definitions, and Applications for the Engineer.* Notre Dame. University of Notre Dame.

Magin, R. L. dan Ovadia, M. 2008. Modeling the Cardiac Tissue Electrode Interface Using Fractional Calculus. *Journal of Vibrations and Control*. **14**(9-10): 1431-1442.

Prayudi. 2006. *Matematika Teknik Persamaan Diferensial, Transformasi Laplace, Deret Fourier*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Prayudi. 2009. Kalkulus Lanjut Fungsi Banyak Variabel dan Penerapannya. Edisi Kesatu. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Purcell ,E.J., Varberg, E., dan Rigdon, S.E. 2007. *Kalkulus.* Edisi Kesembilan. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga, Jakarta.

Roberts, C. E. 2015. *Introduction to Mathematical Proofs: A Transition to Advanced Mathematics.* Second Edition. New York: CRC Press.

Samko, S.G., Kilbas, A.A., and Marichev, O.I. 1993. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Aplications*. Gordon and Breach Science Publisher, Amsterdam.

Saparwadi, L. 2015. *Kalkulus Integral.* Kotagede Yogyakarta: Parama Publishing.

Whittaker, E. T. 1927. *A Course of Modern Analysis.* Cambridge University Press. London.