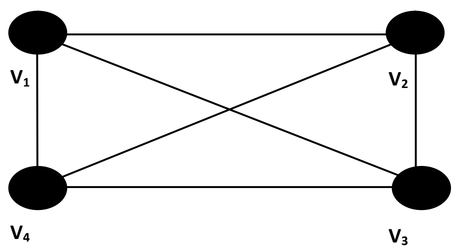
II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar dalam teori graf dan teknik pencacahan dalam bentuk definisi dan teorema yang berhubungan dengan penelitian yang akan dilakukan.

2.1 Konsep Dasar Teori Graf

2.1.1 Graf

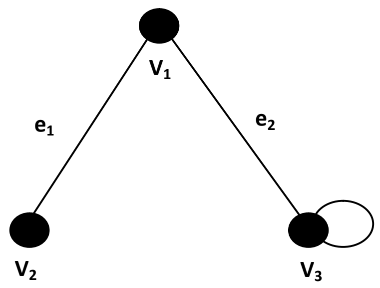
Graf G didefinisikan sebagai pasangan himpunan ($V(G)$,$E(G)$) dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$ menyatakan himpunan titik, dengan $V(G) \neq \emptyset$, sedangkan $E(G) = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ menyatakan himpunan garis yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$ (Deo, 1989).



Gambar 2. Contoh graf dengan 4 titik dan 6 garis

2.1.2 *Adjacent* (Bertetangga) dan *Incident* (Menempel)

Dua titik dikatakan *adjacent* (bertetangga) jika ada garis yang menghubungkan keduanya. Suatu garis dikatakan *incident* (menempel) dengan suatu titik jika titik tersebut merupakan salah satu ujung dari garis tersebut (Deo, 1989).



Gambar 3. Contoh graf dengan 3 titik dan 2 garis

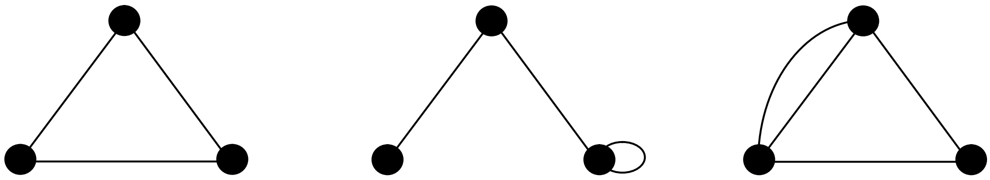
Pada Gambar 3, titik v_2 bertetangga dengan titik v_1 dan titik v_1 bertetangga dengan titik v_3. Tetapi, titik v_2 tidak bertetangga dengan v_3 karena tidak ada garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Garis e_1 menempel pada titik v_1 dan v_2, sedangkan garis e_2 menempel pada titik v_1 dan v_3.

2.1.3 Derajat Suatu Titik dan Titik *Pendant* (Daun)

Misalkan v adalah titik dalam suatu graf G. Derajat titik v pada graf G adalah banyaknya garis yang menempel pada titik v. Derajat suatu titik v dinotasikan dengan $d(v)$. Pada Gambar 3, $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 1$ dan $d(v_3) = 2$. Sedangkan, titik *pendant* (daun) adalah titik yang berderajat satu (Siang, 2006).

2.1.4 *Loop,* Garis Paralel dan Graf sederhana

Loop adalah garis yang titik awal dan ujungnya sama. Sedangkan, garis paralel adalah dua garis atau lebih yang memiliki titik ujung yang sama. Graf sederhana adalah suatu graf tanpa *loop* atau garis paralel (Deo, 1989).



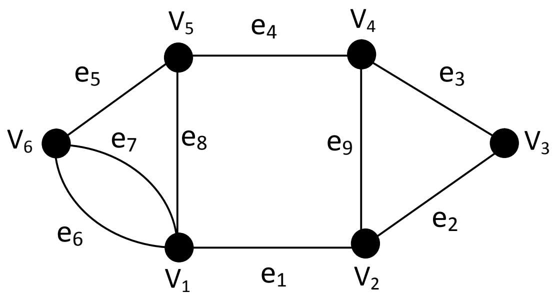
a b c

Gambar 4. Contoh graf sederhana dan graf bukan graf sederhana

Perhatikan bahwa Gambar a adalah contoh dari graf sederhana. Sedangkan Gambar b dan Gambar c adalah graf yang bukan graf sederhana.

2.1.5 *Walk***,** *Path* dan *Cycle*

Walk adalah barisan berhingga dari titik dan garis yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap garis menempel pada titik sebelum dan sesudahnya. *Walk* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *closed walk.* Sedangkan *path* adalah *walk* yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda. *Path* yang berawal dan berakhir pada titik yang sama disebut *cycle* (Deo, 1989).

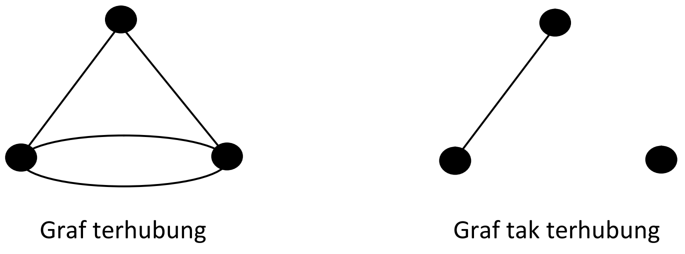


Gambar 5. Contoh graf dengan 6 titik dan 9 garis

Berdasarkan Gambar 5, salah satu contoh dari *walk* yaitu $v_6e_5v_5e_4v_4e_9v_2e_1v_1e_6v_6e_7v_1e_1v_2e_2v_3$. Pada *walk,* garis dan titik boleh dilewati lebih dari satu kali. Sedangkan pada *path*, titik maupun garis tidak boleh dilewati lebih dari satu kali. Salah satu contoh *path* berdasarkan Gambar 5 adalah $v_1e_1v_2e_2v_3e_3v_4e_4v_5e_5v_6$.

2.1.6 Graf Terhubung dan Graf Tidak Terhubung

Suatu graf dikatakan graf terhubung jika untuk setiap dua titik yang berbeda pada graf tersebut terdapat *path* yang menghubungkannya. Jika tidak ada *path* yang menghubungkan, maka *G* dikatakan graf tak terhubung (Deo,1989).



Gambar 6. Contoh graf terhubung dan graf tak terhubung

2.1.7 Graf berlabel

Graf berlabel adalah graf yang setiap titiknya diberi sebuah nilai atau label. Label pada tiap titik dapat berbeda–beda bergantung pada masalah yang dimodelkan dengan graf (Munir, 2005).

2.2 Barisan Aritmatika Orde Tinggi

Definisi 1: Diberikan barisan bilangan $\{a_n\}$ sebagai berikut:

$a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m$ ....(2.2.1)

Beda pertama dari barisan (2.2.1) yaitu:

$D_0^1, D_1^1, D_2^1, \ldots, D_m^1$

dengan

$D_m^1 = a_{m+1} - a_m$

Secara rekurensi, definisikan beda orde ke k dari barisan (2.2.1) dengan orde k-1 sebagai beda sebelumnya yaitu:

$D_0^k, D_1^k, D_2^k, \ldots, D_m^k$

dengan

$D_m^k = D_{m+1}^{k-1} - D_m^{k-1}$ .... (2.2.2)

Perhatikan bahwa (2.2.2) valid untuk k = 1 jika ditulis $a_m = D_m^0$ (Alonso, 2000).

Proposisi 1 : Diberikan barisan (2.2.1). Jika terdapat polinomial $p(x)$ berderajat k dengan koefisien A sehingga $a_m = p(m)$ untuk $m=1,2,3,$ ... maka barisan (2.2.1) adalah barisan aritmatika orde k dengan beda adalah $k!c$ (Alonso,2000).

Bukti:

Misalkan $p(x)=Ax^k+Bx^{k-1}+Cx^{k-2}+\ldots$

maka $a_m=Am^k+Bm^{k-1}+C^{k-2}+\ldots$

Sehingga,

$$D_m^1 = a_{m+1} - a_m = A[(m+1)^k - m^k] + B[(m+1)^{k-1} - m^{k-1}] + \ldots$$

$$= Akm^{k-1} + \ldots$$

Maka untuk beda pertama dapat dibentuk $p_{1(x)} = Akx^{k-1} + \ldots$ yang berderajat k-1 dengan koefisien pertama Ak sehingga $D_m^1 = p_{1(x)}$.

Dengan melakukan perulangan proses yang sama sebanyak k kali dapat disimpulkan bahwa:

$D_m^k = p_{k(m)}$ untuk suatu polinomial $p_{k(m)}$ berderajat nol dengan koefisien pertama Ak. Sehingga $D_m^k = k!c$ untuk n=0,1,2,3, ... ∎

Berdasarkan Proposisi 1, dari barisan (2.2.1), terdapat polinomial $p(x)$ dengan derajat k, $p(x)=Ax^k+Bx^{k-1}+Cx^{k-2}+\ldots$ dengan $a_m = p(m)$ untuk $m=1,2,3,$ ... maka barisan (2.2.1) yaitu $a_m=Am^k+Bm^{k-1}+C^{k-2}+\ldots$ adalah barisan aritmatika orde k dengan beda pada orde k adalah sama.

2.3 Konsep Dasar Teknik Pencacahan

2.3.1 Faktorial

Misalkan *n* adalah bilangan bulat positif. Besaran *n*! (dibaca "*n* faktorial") didefinisikan sebagai hasil kali semua bilangan bulat antara *n* hingga 1.

$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 1$ (Ayres dan Schmidt, 2004).

2.3.2 Permutasi

Permutasi adalah sebarang pengaturan dari sekumpulan objek dalam suatu urutan tertentu. Banyak permutasi dari *n* objek dengan menggunakan *r* objek dalam tiap-tiap pengaturan dinotasikan P_r^n dengan $r \leq n$. Secara umum, permutasi *r* objek dari *n* buah objek dapat dihitung dengan persamaan:

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Dalam permutasi, perulangan tidak diperbolehkan. Artinya, objek yang sudah dipilih tidak bisa dipilih kembali (Ayres dan Schmidt, 2004).

2.3.3 Kombinasi

Kombinasi dari *n* objek dengan pengambilan sebanyak *r* objek dalam tiap-tiap pengambilan terdiri dari semua kumpulan *r* objek yang mungkin, tanpa memandang urutan pengaturannya. Banyaknya kombinasi *n* objek dengan pengambilan sebanyak *r* objek dinyatakan dengan C_r^n dengan $r \leq n$. Banyaknya kombinasi dari *n* objek berbeda yang diambil sebanyak *r* objek adalah

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$ (Ayres dan Schmidt, 2004).