II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup

Pengkajian pertama, diulas tentang definisi Grup yang merupakan bentuk dasar dari suatu ring dan modul.

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan G dan operasi biner $*$. G disebut grup yang dinotasikan dengan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$ ($*$ bersifat assosiatif);

(ii) Terdapat elemen e di G, yang disebut identitas di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

(iii) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen a^{-1} disebut invers dari a (Dummit and Foote, 2004).

Berikut contoh dari grup

Contoh 2.1

$(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +)$ dengan $\mathbb{Z}\sqrt{2} = \{m\sqrt{2} | m \in \mathbb{Z}\}$ merupakan grup.

Akan ditunjukan $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +)$ merupakan grup.

i. Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m_1\sqrt{2}$ dan $y = m_2\sqrt{2}$; untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$

$$x + y = m_1\sqrt{2} + m_2\sqrt{2}$$

$$= (m_1 + m_1)\sqrt{2} \quad \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$$

Jadi $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ bersifat tertutup terhadap operasi $+$.

ii. Diberikan sebarang $x, y, w \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m_1\sqrt{2}$, $y = m_2\sqrt{2}$ dan $w = m_3\sqrt{2}$; untuk suatu $m_1, m_2, m_2 \in \mathbb{Z}$.

Sehingga,

$$\begin{aligned} x + (y + w) &= m_1\sqrt{2} + \left(m_2\sqrt{2} + m_3\sqrt{2}\right) \\ &= m_1\sqrt{2} + (m_2 + m_3)\sqrt{2} \\ &= (m_1 + (m_2 + m_3))\sqrt{2} \\ &= \left((m_1 + m_2) + m_3\right)\sqrt{2} \\ &= (m_1 + m_2)\sqrt{2} + m_3\sqrt{2} \\ &= (m_1\sqrt{2} + m_2\sqrt{2}) + m_3\sqrt{2} \\ &= (x + y) + w \end{aligned}$$

Jadi operasi $+$ bersifat asosiatif pada himpunan $\mathbb{Z}\sqrt{2}$.

iii. Akan ditunjukan $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi $+$.

Untuk setiap $m\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, terdapat $0 \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, sehingga untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$

$m\sqrt{2} + 0 = 0 + m\sqrt{2} = 0$

Jadi elemen identitas pada $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ terhadap operasi $+$ adalah 0.

iv. Akan ditunjukkan $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ memiliki invers, untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m\sqrt{2}$, akan ditentukan invers dari x sebagai berikut.

$x + y = 0$

$m\sqrt{2} + y = 0$

$y = 0 + (-m\sqrt{2})$

$y = 0 - m\sqrt{2}$

$y = -m\sqrt{2}$

$y = (-m)\sqrt{2} \quad \in \quad \mathbb{Z}\sqrt{2}$

Jadi invers dari $m\sqrt{2}$ adalah $(-m)\sqrt{2}$. Hal ini berakibat bahwa setiap elemen pada $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ memiliki invers di $\mathbb{Z}\sqrt{2}$.

Definisi 2.1.2

Grup $(G,*)$ dikatakan grup Abel (grup komutatif) jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Dummit and Foote, 2004).

Berikut contoh dari grup Abel.

Contoh 2.2

Diberikan $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +)$ merupakan grup. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +)$ bersifat komutatif

Penyelesaian:

Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$ dengan $x = m_1\sqrt{2}$ dan $y = m_2\sqrt{2}$, untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} x + y &= m_1\sqrt{2} + m_2\sqrt{2} \\ &= (m_1 + m_1)\sqrt{2} \\ &= (m_2 + m_1)\sqrt{2} \\ &= m_2\sqrt{2} + m_1\sqrt{2} \\ &= y + x \end{aligned}$$

Jadi $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ bersifat komutatif terhadap operasi penjumlahan. Hal ini berakibat bahwa $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ disebut grup Abel.

2.2 Ring

Pada bagian ini akan dibahas mengenai salah satu struktur aljabar yang terdiri atas satu himpunan dan dua operasi biner, yaitu ring. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.2.1

Himpunan R dengan dua operasi biner $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian) merupakan ring jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(R, +)$ merupakan grup Abel;

(ii) Operasi perkaliannya bersifat asosiatif, yaitu $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \epsilon R$;

(iii) Hukum distributif terpenuhi di R, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$

$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ dan $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(Dummit and Foote, 2004).

Berikut merupakan contoh dari ring.

Contoh 2.3

Diberikan $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +)$ merupakan grup abel. Akan ditunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}\sqrt{2}, +, \cdot)$ merupakan ring.

Penyelesaian

i. $\mathbb{Z}\sqrt{2}$ merupakan grup abel (telah diuraikan pada contoh 2.2).

ii. Akan ditunjukkan bahwa operasi $\cdot$ (perkalian) bersifat asosiatif pada himpunan $\mathbb{Z}\sqrt{2}$.

Diberikan sebarang $x, y, w \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m_1\sqrt{2}$, $y = m_2\sqrt{2}$ dan $w = m_3\sqrt{2}$; untuk setiap $m_1, m_2, m_2 \in \mathbb{Z}$

Sehingga,

$$(x \cdot y) \cdot w = \left(m_1\sqrt{2} \cdot m_2\sqrt{2}\right) \cdot m_3\sqrt{2}$$

$$= (m_1 \cdot m_2)\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}$$

$$= ((m_1 \cdot m_2 \cdot m_3)\sqrt{2}$$

$$= \left(m_1 \cdot (m_2 \cdot m_3)\right)\sqrt{2}$$

$$= m_1\sqrt{2} \cdot (m_2 \cdot m_3)\sqrt{2}$$

$$= m_1\sqrt{2} \cdot (m_2\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2})$$

$$= x \cdot (y \cdot w)$$

iii. Akan ditunjukkan hukum distributif terpenuhi di $\mathbb{Z}\sqrt{2}$.

Diberikan sebarang $x, y, w \in \mathbb{Z}\sqrt{2}$, dengan $x = m_1\sqrt{2}$, $y = m_2\sqrt{2}$ dan $w = m_3\sqrt{2}$; untuk setiap $m_1, m_2, m_2 \in \mathbb{Z}$

Sehingga

$$(x + y) \cdot w = \left(m_1\sqrt{2} + m_2\sqrt{2}\right) \cdot m_3\sqrt{2}$$

$$= (m_1 + m_2)\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}$$

$$= (m_1 \cdot m_3 + m_2 \cdot m_3)\sqrt{2}^2$$

$$= \left(m_1 \cdot m_3)\sqrt{2}^2 + (m_2 \cdot m_3\right)\sqrt{2}^2$$

$$= \left(m_1\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}) + (m_2\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}\right)$$

$$= (x \cdot w) + (y \cdot w)$$

$$x + (y \cdot w) = m_1\sqrt{2} \cdot \left(m_2\sqrt{2} + m_3\sqrt{2}\right)$$

$$= m_1\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}(m_2 + m_3)$$

$$= \left(m_1 \cdot (m_2 + m_3)\right)\sqrt{2}^2$$

$$= (m_1 \cdot m_2 + m_1 \cdot m_3)\sqrt{2}^2$$

$$= (m_1 \cdot m_2)\sqrt{2} + (m_1 \cdot m_3)\sqrt{2}$$

$$= \left(m_1\sqrt{2} \cdot m_2\sqrt{2}\right) + \left(m_1\sqrt{2} \cdot m_3\sqrt{2}\right)$$

$$= (x \cdot y) + (x \cdot w)$$

Jadi terbukti bahwa ($\mathbb{Z}\sqrt{2}, +$) merupakan ring

2.3 Modul

Pada bagian ini akan dibahas mengenai modul atas ring R. Berikut diberikan definisi modul atas ring R.

Definisi 2.3.1

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M grup Abel, dengan operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

M disebut modul atas ring R jika M merupakan modul kiri dan kanan.

(i) M disebut modul kiri atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $a(m + n) = am + an$;

b) $(a + b)m = am + bm$;

c) $(ab)m = a(bm)$;

d) $1m = m$.

(ii) M disebut modul kanan atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $(m+n)a = ma + na$;

b) $m(a+b) = ma + mb$;

c) $m(ab) = (ma)b$;

d) $m1 = m$ (Adkinds and Weintraub, 1992).

Berikut ini diberikan contoh - contoh modul.

Contoh 2.4

Diberikan ring $\mathbb{R}$ dan grup Abel $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$\mathbb{R}^n = \{(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n) \mid x_{1,} x_{2,} \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring R terhadap operasi pergandaan skalar.

Untuk memperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$ haruslah $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri dan modul kanan.

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring R. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dengan $a \cdot (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n) = (a \cdot x_{1,} a \cdot x_{2,} \dots, a \cdot x_n)$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}, (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$a(\bar{x} + \bar{y}) = a\left((x_{1,} x_{2,} \dots, x_n) + (y_{1,} y_{2,} \dots, y_n)\right)$$

$$= a\,(x_1 + y_{1,} x_2 + y_{2,} \dots, x_n + y_n)$$

$$= \left(a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)\right)$$

$$= \left((ax_1 + ay_1), (ax_2 + ay_2), \dots, (ax_n + ay_n)\right)$$

$= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \dots, ay_n)$

$= a\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right) + a\left(y_{1,} y_{2,} \dots, y_n\right)$

$= a\bar{x} + a\bar{y}$

Jadi $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$(a_1 + a_2)(\bar{x}) = (a_1 + a_2)\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)$

$= \left((a_1 + a_2)x_{1,} (a_1 + a_2)x_{2,} \dots, (a_1 + a_2)x_n\right)$

$= (a_1x_1 + a_2x_1, a_1x_2 + a_2x_2, \dots, a_1x_n + a_2x_n)$

$= (a_1x_1, a_1x_2, \dots, a_1x_n) + (a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$

$= a_1\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right) + a_2\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)$

$= a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$

Jadi $(a_1 + a_2)(\bar{x}) = a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$(a_1a_2)(\bar{x}) = (a_1a_2)\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)$

$= (a_1a_2)\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)$

$= ((a_1a_2)x_1, (a_1a_2)x_2, \dots, (a_1a_2)x_n)$

$= (a_1a_2x_1, a_1a_2x_2, \dots, a_1a_2x_n)$

$= a_1 (a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$

$= (a_1)(a_2\bar{x})$

Jadi $(a_1a_2)(\bar{x}) = (a_1)(a_2\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$1(\bar{x}) = 1\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)$$

$$= \left(1x_{1,} 1x_{2,} \dots, 1x_n\right)$$

$$= \left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)$$

$$= \bar{x}$$

Jadi $1(\bar{x}) = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{R}$.

2. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{R}$. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

dengan $\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right) \cdot a = (x_1 \cdot a, x_2 \cdot a, \dots, x_n \cdot a)$, untuk setiap $a \epsilon R$ dan $\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right) \in \mathbb{R}^n$.

i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$(\bar{x} + \bar{y})a = \left(\left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right) + \left(y_{1,} y_{2,} \dots, y_n\right)\right) a$$

$$= \left((x_{1,} x_{2,} \dots, x_n) + (y_{1,} y_{2,} \dots, y_n)\right)a$$

$$= \left(\left((x_1 + y_1)a, (x_2 + y_2)a, \dots, (x_n + y_n)a\right)\right)$$

$$= \left((x_1 a + y_1 a), (x_2 a + y_2 a), \dots, (x_n a + y_n a)\right)$$

$$= (x_1 a, x_2 a, \dots, x_n a) + (y_1 a, y_2 a, \dots, y_n a)$$

$$= \left(x_{1,} x_{2,} \dots, x_n\right)a + \left(y_{1,} y_{2,} \dots, y_n\right)a$$

$$= \bar{x}a + \bar{y}a$$

Jadi $(\bar{x} + \bar{y})a = \bar{x}a + \bar{y}a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(\overline{x})(a_1 + a_2) = (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)(a_1 + a_2)$$

$$= (x_1(a_1 + a_2), x_2 (a_1 + a_2), \dots, x_n(a_1 + a_2))$$

$$= (x_1 a_1 + x_1 a_2, x_2 a_1 + x_2 a_2, \dots, x_n a_1 + x_n a_2)$$

$$= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1) + (x_1 a_2, x_2 a_2, \dots, x_n a_2)$$

$$= (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)a_1 + (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)a_2$$

$$= (\overline{x})a_1 + (\overline{x})\, a_2$$

Jadi, $(\overline{x})\,(a_1 + a_2) = (\overline{x})a_1 + (\overline{x})a_2$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(\overline{x})(a_1 a_2) = (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)(a_1 a_2)$$

$$= (x_1 (a_1 a_2), x_2 (a_1 a_2), \dots, x_n(a_1 a_2))$$

$$= (x_1 a_1 a_2, x_2 a_1 a_2, \dots, x_n a_1 a_2)$$

$$= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1)a_2$$

$$= (\overline{x}\, a_1)(a_2)$$

Jadi $(\overline{x})(a_1 a_2) = (\overline{x}\, a_1)(a_2)$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$(\overline{x})1 = (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)1$$

$$= (x_1 1, x_2 1 \dots, x_n 1)$$

$$= (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)$$

$$= \overline{x}$$

Jadi $(\bar{x})1 = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$.

Berikut diberikan contoh modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Contoh 2.5

Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan sebarang grup abel $(G, +)$. Akan ditunjukan $(G, +)$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Untuk memperlihatkan bahwa G merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ haruslah G merupakan modul kiri dan modul kanan.

a) Akan ditunjukkan G adalah modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

   Didefinisikan

$$\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G$$

   dengan

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}_{\text{sebanyak } |n| \text{ kali}} & ; n < 0 \end{cases}$$

   Diberikan sebarang $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, g, g_1, g_2 \in G$.

   i. $n(g_1 + g_2) = ng_1 + ng_2$, untuk setiap $g_1, g_2 \in G, n \in \mathbb{Z}$

   ii. $(n_1 + n_2)g = n_1 g + n_2 g$, untuk setiap $g \in G\ dan\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

   iii. $(n_1 n_2)g = n_1 n_2 g = n_1(n_2 g)$, untuk setiap $g \in G\ dan\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

   iv. $1g = g$, untuk setiap $g \in G$

   Dari (i), (ii), (iii), dan (iv) terbukti bahwa G merupakan modul kiri.

b) Akan ditunjukkan G adalah modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Didefinisikan

$$\cdot : G \times \mathbb{Z} \to G$$

dengan

$$gn = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak } n \text{ kali}} & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}_{\text{sebanyak } |n| \text{ kali}} & ; n < 0 \end{cases}$$

Diberikan sebarang $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, g, g_1, g_2 \in G$.

i. $(g_1 + g_2)n = g_1n + g_2n$, untuk setiap $g_1, g_2 \in G, n \in \mathbb{Z}$

ii. $g(n_1 + n_2) = gn_1 + gn_2$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

iii. $g(n_1n_2) = gn_1n_2 = (gn_1)n_2$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

iv. $g1 = g$, untuk setiap $g \in G$

Dari (i),(ii),(iii), dan (iv) terbukti bahwa G merupakan modul kanan.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa G merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Dimisalkan G grup dan $S \subseteq G$. Seperti yang telah diketahui, S merupakan subgrup G jika $S \neq \emptyset$ dan untuk setiap $a, b \in S$, berlaku $a - b \in S$.

Begitu pula dengan modul, modul akan memiliki submodul yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.2

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M merupakan modul atas R. $N \subseteq M$ disebut submodul (R-submodul) dari M jika N merupakan subgrup dari M yang merupakan modul atas R dengan operasi yang sama di M (Adkinds and Weintraub, 1992).

Berdasarkan definisi ini, dapat disimpulkan bahwa N submodul M jika dan hanya jika :

1) N subgrup M
2) N tertutup terhadap operasi pergandaan skalar

   yaitu $rn \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$.

Berikut diberikan contoh dari submodul.

Contoh 2.6

Diberikan modul $\mathbb{R}^3$ atas ring $\mathbb{R}$. Akan ditunjukan Himpunan $S \subset \mathbb{R}^3$ dengan

$S = \{a, b, 0)|a, b \in \mathbb{R}\}$ merupakan submodul di $\mathbb{R}^3$.

Penyelesaian

(i) Akan ditunjukan bahwa S merupakan submodul $\mathbb{R}^3$.

(a) Akan ditunjukan $S \neq \emptyset$

Ambil $a = 0$ dan $b = 0$ sehingga $(0,0,0) \in S$ karena $0 \in \mathbb{R}$.

Jadi terbukti bahwa $S \neq \emptyset$.

(b) Akan ditunjukan S tertutup terhadap operasi $+$.

Diberikan sebarang $(a, b, 0), (x, y, 0) \in S$ untuk suatu

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$

Oleh karena itu, $(a, b, 0) + (x, y, 0) = (a + x,\ b + y, 0) \in S$

Jadi terbukti bahwa S tertutup terhadap operasi $+$.

(c) Akan ditunjukan bahwa untuk setiap $x, y \in S$, $xy^{-1} \in S$

dengan $x = (a, b, 0)$ dan $y = (c, d, 0)$, untuk setiap $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

$$y^{-1} \quad = (-c, -d, 0) \in S$$

$$xy^{-1} = (a, b, 0) + (-c, -d, 0)$$

$$= (a - c, b - d, 0) \in S$$

Jadi, terbukti bahwa $xy^{-1} \in S$ untuk setiap $x, y \in S$.

Dari (a), (b) dan (c) terbukti bahwa S merupakan subgrup dari $\mathbb{R}^3$.

(ii) Akan ditunjukan S tertutup terhadap operasi pergandaan skalar.

Diberikan sebarang $(a, b, 0) \in S$ untuk setiap $a, b \in R$.

$r(a, b, 0) = (ra, rb, 0) \in S$.

Jadi terbukti bahwa S tertutup terhadap operasi pergandaan skalar.

Dari (i) dan (ii) terbukti bahwa S merupakan submodul dari $\mathbb{R}^3$.

Berikut diberikan Lemma yang menyatakan bahwa submodul M tertutup terhadap operasi penjumlahan dan irisan.

Lemma 2.1

Misal M modul atas R dan N_1, N_2 submodul, maka:

1. $N_1 \cap N_2$ merupakan submodul di M
2. $N_1 + N_2$ merupakan submodul di M

Bukti :

1. Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Akibatnya $0 \in N_1 \cap N_2$. Sehingga, $N_1 \cap N_2$ bukan merupakan himpunan kosong.

   Diberikan sebarang $r \in R$ dan $a, b \in N_1 \cap N_2$ maka $a, b \in N_1$ dan $a, b \in N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M maka memenuhi $a - b \in N_1$ dan $a - b \in N_2$. Akibatnya, $a - b \in N_1 \cap N_2$

Karena N_1 dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M maka $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot a \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot a \in N_1 \cap N_2$.

Jadi, terbukti bahwa $N_1 \cap N_2$ merupakan submodul di M.

2. Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Akibatnya $0 \in N_1 + N_2$. Sehingga, $N_1 + N_2$ bukan merupakan himpunan kosong.

   Diberikan sebarang $r \in R$ dan $a + b, c + d \in N_1 + N_2$, dengan $a, c \in N_1$ dan $b, d \in N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M maka memenuhi $a - c \in N_1$ dan $b - d \in N_2$. Akibatnya, $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \in N_1 + N_2$

   Selanjutnya, karena N_1 dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M maka memenuhi operasi pergandaan skalar yaitu $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot b \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot (a + b) = ra + rb \in N_1 + N_2$.

   Jadi, terbukti bahwa $N_1 + N_2$ merupakan submodul di M.

Submodul merupakan perluasan dari modul, dan submodul juga memiliki pembangun. Berikut diberikan definisi tentang submodul yang dibangun oleh suatu himpunan.

Definisi 2.3.3

Misalkan M adalah suatu R-modul dan $N_1, \ldots, N_n$ adalah submodul dari M.

1) Penjumlahan di $N_1, \ldots, N_n$ merupakan himpunan dari semua penjumlahan berhingga oleh elemen dari himpunan N_i yaitu:

   $N_1 + N_2 + \cdots + N_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \mid a_i \in N_i\}$ untuk setiap i.

2) Untuk sebarang $A \subseteq M$ didefinisikan :

$RA = \{r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ma_m | r_1, \dots, r_m \in R\ ,\ a_1, \dots,\ a_m \in A, m\ \in \mathbb{Z}^+\}$

(dengan aturan $RA = \{0\}$ jika $A = \phi$) jika A himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dapat ditulis sebagai $Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$ untuk RA. RA dikatakan submodul dari M yang di bagun oleh A. Jika N submodul dari M (diperbolehkan $N = M$) dan $N = RA$, untuk suatu $A \subseteq M$ disebut A sebagai himpunan pembangun atau membangun himpunan untuk N, dan dapat dikatakan N dibangun oleh A.

3) N submodul dari M (diperbolehkan $N = M$) dibangun secara berhingga jika terdapat himpunan bagian berhingga A di M sedemikian sehingga $N = RA$, yaitu jika N dibangun oleh suatu himpunan berhingga

4) Suatu submodul N di M (diperbolehkan $N = M$) adalah siklik jika terdapat $a \in M$ sedemikian sehingga $N = Ra$, jika N dibangun oleh satu elemen yaitu :

$N = Ra = \{ra \mid r \in R\}$.

Definisi ini tidak mengharuskan ring R memuat elemen satuan. Namun, kondisi ini menjamin bahwa A termuat di dalam RA. Dapat dilihat bahwa kriteria submodul pada himpunan bagian A di M, RA merupakan submodul M dan submodul terkecil dari M yang memuat A. Secara khusus, untuk submodul $N_1, \dots, N_n$ dari $M, N_1 +\ \dots + N_n$ adalah submodul yang dibangun oleh himpunan $N_1 \cup \dots \cup N_n$ dan merupakan submodul terkecil dari M yang mengandung N_i, untuk semua i. Jika $N_1, \dots, N_n$ yang dibangun oleh himpunan $A_1, \dots, A_n$, maka $N_1 +\ \dots + N_n$ juga dibangun oleh $A_1 \cup\ \dots \cup A_n$ (Dummit dan Foote, 2004).

Berikut contoh dari submodul yang dibangun oleh suatu himpunan.

Contoh 2.7

Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul dan himpunan bagian $X = \{3,6,9\}$ di $\mathbb{Z}$. Karena submodul di $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, maka submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ yang memuat himpunan X adalah submodul $3\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$ sendiri. Akibatnya diperoleh submodul yang dibangun oleh X adalah submodul $3\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$.

Misalkan G grup, dan H merupakan subgrup dari G. H dikatakan subgrup normal jika koset kiri dari H di G sama dengan koset kanan dari H di G yaitu

$aH = Ha, \forall a \in G.$

Suatu grup G akan memiliki grup faktor dengan syarat tertentu. Berikut definisi dari grup faktor.

Definisi 2.3.4

Jika $N \trianglelefteq G$, maka G/N disebut grup faktor dari G atas N (Adkinds and Weintraub, 1992).

Begitupula dengan modul, modul juga memiliki modul faktor, berikut merupakan pendefinisian dari modul faktor.

Definisi 2.3.5

Jika N adalah submodul dari modul M atas ring R, maka modul faktor adalah grup faktor M/N (ingat bahwa M adalah abel dan N subgrup normal) tertutup terhadap perkalian skalar

$r(m + N) = rm + N$ (Rotman, 2007).

Berikut merupakan contoh dari modul faktor.

Contoh 2.8

Ring R dengan ideal I dapat dibentuk menjadi ring faktor R/I. Karena ring dapat dilihat sebagai modul atas dirinya sendiri, dengan demikian R/I adalah modul faktor.

Berikut definisi submodul kecil.

Definisi 2.3.6

Submodul $K \subseteq M$ disebut submodul kecil atau *superfluous* dalam *M*, ditulis $K \ll M$, jika untuk setiap submodul $L \subset M$, jika $K + L = M$ maka $L = M$.

(Clark, 2006).

Berikut ini merupakan sifat-sifat dari submodul kecil.

Misal *K*, *L*, *N* dan *M* merupakan *R-modul*.

(1) Jika $K \subset L \subset M$, maka $L \ll M$ jika dan hanya jika $K \ll M$ dan $L/K \ll M/K$.

(2) Jika $K_1, \dots, K_n$ adalah submodul kecil dari *M*, maka $K_1 + \dots + K_n$ juga merupakan submodul kecil di *M*.

(3) Jika $K \subset L \subset M$ dan *L* merupakan penjumlahan langsung di *M*, maka $K \ll M$ jika dan hanya jika $K \ll L$.

(4) Jika $K \ll M$, maka *M* dibangun secara berhingga jika dan hanya jika M/K dibangun secara berhingga.

(Clark, 2006).

Berikut ini merupakan contoh dari submodul kecil.

Contoh 2.9

$\{0\}$ merupakan submodul kecil dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}$- modul.

$\mathbb{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Submodul- submodul dari $\mathbb{Z}_6$ yaitu $\{0\}, \{0,2,4\}, \{0,3\}$

$\{0\}$ merupakan submodul kecil karena untuk setiap X submodul di $\mathbb{Z}_6$,

jika $\{0\} + X \neq \mathbb{Z}_6$, maka $X \neq \mathbb{Z}_6$ yaitu

$\{0\} + \{0,2,4\} \neq \mathbb{Z}_6$ dan $\{0\} + \{0,3\} \neq \mathbb{Z}_6$. Jika $\{0\} + L = \mathbb{Z}_6$ maka $L = \mathbb{Z}_6$.

Akibatnya $\{0\} \ll \mathbb{Z}_6$.

Berikut ini merupakan definisi dari submodul maksimal.

Definisi 2.3.7

Sebuah submodul $N \subset M$ dikatakan maksimal jika $N \neq M$ dan tidak termuat dalam submodul sejati di M. N merupakan submodul maksimal jika dan hanya jika M/N merupakan modul sederhana (Wisbauer,1991).

Berikut merupakan contoh dari submodul maksimal.

Contoh 2.10

$p\mathbb{Z}$ merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}$, sebagai $\mathbb{Z}$-modul, dengan p adalah bilangan prima.

Sebagai contoh, $3\mathbb{Z}$ adalah submodul maksimal di $\mathbb{Z}$.

$\mathbb{Z} = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,5, 6 \ldots\}$,

$3\mathbb{Z} = \{\ldots -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$.

$3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ dan $3\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ serta $3\mathbb{Z}$ tidak termuat pada submodul sejati di $\mathbb{Z}$ maka $3\mathbb{Z}$ merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}$.

Berikut merupakan definisi dari modul *hollow*.

Definisi 2.3.8

Diberikan M adalah R-modul. Modul M dikatakan *hollow* jika setiap submodul sejati dari M merupakan submodul kecil di M (Wisbauer,1991).

Berikut merupakan contoh dari modul *hollow*

Contoh 2.11

Diberikan $\mathbb{Z}$- modul $\mathbb{Z}_4$. Karena submodul-submodul sejati dari $\mathbb{Z}_4$ yaitu $\{0\}, \{0,2\}$ merupakan submodul kecil di $\mathbb{Z}_4$, maka $\mathbb{Z}_4$ sebagai $\mathbb{Z}$- modul merupakan modul *hollow*.

Berikut ini merupakan definisi dari modul lokal yang akan digunakan dalam membuktikan sifat dari modul bersuplemen yang dibangun secara berhingga.

Definisi 2.3.9

Diberikan M merupakan R-modul, M dikatakan modul lokal jika M mempunyai submodul sejati yang memuat semua submodul sejati yang lain di M (Wisbauer, 1991).

Proposisi 2.1

Suplemen dari submodul maksimal pada modul merupakan modul lokal. Akibatnya, modul lokal adalah modul bersuplemen (Wisbauer,1991).

Contoh 2.12

$\mathbb{Z}_8$ merupakan modul lokal.

Diberikan $\mathbb{Z}$- modul $\mathbb{Z}_8$. Submodul-submodul sejati dari $\mathbb{Z}_8$ yaitu

$\{0\}, \{0,2,4,6\}, \{0,4\}$.

$\{0,2,4,6\}$ merupakan submodul terbesar karena $\{0\}$ dan $\{0,4\}$ termuat di $\{0,2,4,6\}$, maka $\mathbb{Z}_8$ merupakan modul lokal.

Berikut merupakan hubungan antara modul *hollow* dan modul lokal.

Proposisi 2.2

Untuk setiap modul yang dibangun secara behingga adalah *hollow* jika dan hanya jika merupakan modul lokal. Dengan kata lain, ring R sebagai modul kanan atau modul kiri adalah modul *hollow* jika dan hanya jika merupakan modul lokal.

Berikut ini merupakan definisi dari jumlah *irredundant.*

Definisi 2.3.10

Jika $M = \Sigma_{\Lambda}\mathrm{M}_{\lambda}$, maka jumlah ini dikatakan *irredundant*, jika untuk setiap $\lambda_0 \in \Lambda$, $\Sigma_{\lambda\neq\lambda_0}\mathrm{M}_{\lambda} \neq M$ (Wisbauer,1991).

2.4 Suplemen

Berikut ini merupakan proposisi dari suplemen.

Proposisi 2.4.3

Untuk submodul $N, L \subset M$, pernyataan berikut ekuivalen:

a. N merupakan himpunan minimal dari submodul $\{K \subset M | L + K = M\}$

b. $L + N = M$ dan $L \cap N \ll M$

Jika terpenuhi, maka N dikatakan sebagai suplemen dari L di M (Clark dkk, 2006).

Berikut diberikan contoh dari suplemen.

Contoh 2.13

$\{0,5\}$ merupakan suplemen pada $\mathbb{Z}_{10}$.

Diberikan $\mathbb{Z}$- modul $\mathbb{Z}_{10}$.

Submodul dari $\mathbb{Z}_{10}$ yaitu $\{0\}, \{0,5\}, \{0,2,4,6,8\}$.

Misal

$N = \{0,5\}$,

$L = \{0,2,4,6,8\}$, maka $N + L = \{n + l | n \in N, l \in L\} = \mathbb{Z}_{10}$

$N \cap L = \{0\}$ merupakan submodul kecil di N, yaitu $N \cap L \ll N$. Oleh karena itu, N merupakan suplemen dari L di $\mathbb{Z}_{10}$.

Berikut ini merupakan definisi dari suplemen lemah.

Definisi 2.4.2

Sebuah submodul $N \subset M$ dikatakan suplemen lemah pada submodul L dari M jika $N + L = M$ dan $N \cap L \ll M$. Modul M dikatakan bersuplemen lemah jika setiap submodul N dari M mempunyai suplemen lemah (Clark dkk, 2006).

Dapat dikatakan bahwa sebuah submodul $N \subset M$ adalah sebuah suplemen dari suatu submodul $L \subset M$. Jelas bahwa setiap submodul suplemen adalah suplemen lemah (untuk submodul yang sama) (Clark dkk, 2006).

Berikut ini merupakan contoh suplemen lemah.

Contoh 2.14

Diberikan $\mathbb{Z}$- modul $\mathbb{Z}_6$. Submodul-submodul dari $\mathbb{Z}_6$ adalah $\{0\}, \{0,2,4\}$ dan $\{0,3\}$.

Untuk submodul $\{0,2,4\}$ terdapat submodul $\{0,3\}$ sehingga $\{0,2,4\} + \{0,3\} = \mathbb{Z}_6$.

$\{0,2,4\} \cap \{0,3\} = \{0\} \ll \mathbb{Z}_6$.

Jadi $\{0,2,4\}$ merupakan suplemen lemah dari $\mathbb{Z}_6$.

2.5 Pemetaan Inklusi Cosmall dan Submodul Coclosed

Berikut ini merupakan definisi dari pemetaan inklusi *cosmall*.

Definisi 2.5.1

Diberikan submodul $K \subset L \subset M$, pemetaan inklusi $K \subset L$ dikatakan *cosmall* di M jika $L\ /\ K \ll M\ /\ K$, dinotasikan dengan $K \underset{M}{\overset{cs}{\rightarrow}} L$.

Berikut ini adalah definisi dari submodul *coclosed.*

Definisi 2.5.2

Sebuah submodul $L \subset M$ dikatakan *coclosed* di M jika L tidak mempunyai submodul sejati K, yaitu jika $K \subset L$ *cosmall* di M, maka $K = L$. Dengan demikian L *coclosed* di M jika dan hanya jika untuk setiap submodul sejati $K \subset L$, ada submodul N dari M sedemikian sehingga $L + N = M$ tetapi $K + N \neq M$. dinotasikan dengan $L \overset{cc}{\rightarrow} M$ (Clark dkk, 2006).