II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup

Pengkajian pertama, diulas tentang definisi grup yang merupakan bentuk dasar dari suatu ring dan modul.

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan G dan operasi biner $*$. G disebut grup yang dinotasikan dengan $(G,*)$ jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$ ($*$ bersifat assosiatif);

(ii) Terdapat elemen e di G, yang disebut identitas di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

(iii) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen a^{-1} disebut invers dari a (Dummit and Foote, 2004).

Untuk lebih memahami definisi grup, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.1.2

Diberikan n bilangan bulat positif dan $n\mathbb{Z} = \{nm | m \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $< n\mathbb{Z}, + >$ merupakan grup.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$.

$x + y = nm_1 + nm_2$

$= n(m_1 + m_2) \quad \in n\mathbb{Z}$

Jadi, $n\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi +.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa elemen di $n\mathbb{Z}$ bersifat assosiatif terhadap +.

Diberikan sebarang $x, y, w \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$, $y = nm_2$ dan $w = nm_3$ untuk suatu $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$x + (y + w) = nm_1 + (nm_2 + nm_3)$

$= nm_1 + n(m_2 + m_3)$

$= n\,(m_1 + (m_2 + m_3))$

$= n\,((m_1 + m_2) + m_3)$

$= n(m_1 + m_2) + nm_3$

$= (nm_1 + nm_2) + nm_3$

$= (x + y) + w$

Jadi, terbukti bahwa elemen di $n\mathbb{Z}$ bersifat assosiatif terhadap operasi +.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas.

Untuk setiap $nm \in n\mathbb{Z}$, terdapat $0 \in n\mathbb{Z}$ sehingga untuk suatu $m \in \mathbb{Z}$

$nm + 0 = 0 + nm = nm$.

Jadi, elemen identitas pada $n\mathbb{Z}$ yaitu 0.

(iv) Akan ditunjukkan setiap elemen di $n\mathbb{Z}$ memiliki invers.

Diberikan sebarang $x \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm$, akan ditentukan invers dari x sebagai berikut :

$x + y \quad = 0$ (dengan y adalah invers dari x)

$nm + y = 0$

$y = 0 + (-nm)$

$y = -(nm)$

$y = n(-m) \quad \in n\mathbb{Z}$

Jadi, invers dari nm adalah $n(-m)$. Hal ini berakibat bahwa setiap elemen di $n\mathbb{Z}$ memiliki invers.

Berdasarkan (i)-(iv) terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan grup (Fraleigh, 2000).

Grup Abel (grup komutatif) merupakan salah satu bentuk grup. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.1.3

Grup $(G,*)$ dikatakan grup Abel (grup komutatif) jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Dummit and Foote, 2004).

Dari pendefinisian grup Abel, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.1.4

Diberikan $< n\mathbb{Z}, + >$ merupakan grup dengan $n\mathbb{Z} = \{nm | m \in \mathbb{Z}\}$ untuk n bilangan bulat positif. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ grup Abel.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, maka:

$$\begin{aligned} x + y &= nm_1 + nm_2 \\ &= n(m_1 + m_2) \\ &= n(m_2 + m_1) \\ &= nm_2 + nm_1 \end{aligned}$$

$$= y + x$$

Jadi, terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ grup Abel (Fraleigh, 2000).

Grup memiliki subgrup yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.1.5

Jika himpunan bagian dari H dari grup G tertutup terhadap operasi biner di G dan jika perlakuan yang sama di H sama dengan di G, maka H subgrup di G. H subgrup di G dapat dinotasikan dengan $H \leq G$ atau $H < G$ (Fraleigh, 2000).

2.2 Ring

Pada bagian ini akan dibahas mengenai salah satu struktur aljabar yang terdiri atas satu himpunan dan dua operasi biner, yaitu ring. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.2.1

Himpunan R dengan dua operasi biner $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian) merupakan ring jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(R, +)$ merupakan grup Abel;

(ii) Operasi perkaliannya bersifat asosiatif, yaitu $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \in R$;

(iii) Hukum distributif terpenuhi di $\mathbb{R}$, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$

$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ dan $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(Dummit and Foote, 2004).

Untuk lebih jelasnya, diberikan contoh ring sebagai berikut.

Contoh 2.2.2

Diberikan $< n\mathbb{Z}, + >$ merupakan grup Abel, $n\mathbb{Z} = \{nm | m \in \mathbb{Z}\}$ dan $n \in \mathbb{Z}^+$. Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ ring.

(i) $n\mathbb{Z}$ merupakan grup Abel (Contoh 2.1.4).

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di $n\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x, y, w \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$, $y = nm_2$ dan $w = nm_3$ untuk suatu $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$$(x \,.\, y).w = (nm_1 \,.\, nm_2) \,.\, nm_3$$
$$= n^2(m_1 m_2) \,.\, nm_3$$
$$= n^3((m_1 m_2) \,.\, m_3)$$
$$= n^3(m_1(m_2 m_3))$$
$$= nm_1 \,.\, n^2(m_2 m_3)$$
$$= nm_1 \,.\, (nm_2 \,.\, nm_3)$$
$$= x \,.\, (y \,.\, w)$$

Jadi, terbukti bahwa operasi $\cdot$ bersifat assosiatif di $n\mathbb{Z}$.

(iii) Diberikan sebarang $x, y, w \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$, $y = nm_2$ dan $w = nm_3$ untuk suatu $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$$(x + y).w = (nm_1 + nm_2) \,.\, nm_3$$
$$= n(m_1 + m_2) \,.\, nm_3$$
$$= n^2((m_1 + m_2) \,.\, m_3)$$
$$= n^2(m_1 m_3 + m_2 m_3)$$
$$= n^2(m_1 m_3) + n^2(m_2 m_3)$$
$$= (nm_1 \,.\, nm_3) + (nm_2 \,.\, nm_3)$$
$$= (x \,.\, w) + (y \,.\, w)$$

Jadi, terbukti bahwa sifat distributif kiri terpenuhi.

$$x.(y + w) = nm_1.(nm_2 + nm_3)$$
$$= nm_1 \,.\, n(m_2 + m_3)$$

$$= n^2\ (m_1.(m_2 + m_3))$$

$$= n^2(m_1m_2 + m_1m_3)$$

$$= \ n^2(m_1m_2) + \ \ n^2(m_1m_3)$$

$$= (nm_1\ .\ nm_2) + \ \ (nm_1\ .nm_3)$$

$$= (x\ .y) + \ (x\ .w)$$

Jadi, terbukti bahwa sifat distributif kanan terpenuhi.

∴ terbukti sifat distributif kiri dan distributif kanan terpenuhi.

Berdasarkan (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan ring (Fraleigh, 2000).

Pada ring, terdapat elemen idempoten yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.2.3

Suatu elemen a dan ring R disebut idempoten jika $a^2 = a$. Setiap elemen idempoten $a \in R$ merupakan elemen reguler jika terdapat $b \in R$ maka $aba = a$ (Wisbauer, 1991).

Berikut diberikan beberapa contoh elemen idempoten pada suatu ring.

Contoh 2.2.4

Jika $a \in R$ merupakan reguler dan untuk suatu $b \in R$ maka a dapat dinyatakan sebagai $a = aba$. Akan ditunjukkan bahwa ab dan ba merupakan elemen idempoten.

Untuk setiap $a \in R$, terdapat $b \in R$ sehingga

$$(ab)^2 = (ab)(ab)$$

$$= (aba)b$$

$$= ab$$

Jadi, terbukti bahwa ab merupakan elemen idempoten.

$(ba)^2 = (ba)(ba)$

$= (bab)a$

$= ba$

Jadi, terbukti bahwa ba merupakan elemen idempoten.

Contoh 2.2.5

$\mathbb{Z}_2$ memiliki elemen idempoten 0 dan 1.

2.3 Modul

Pada bagian ini akan dibahas mengenai modul atas ring R. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.3.1

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M grup Abel, dengan operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times M \rightarrow M$$

M disebut modul atas ring R jika M merupakan modul kiri dan kanan.

(i) M disebut modul kiri atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $a(m+n) = am + an$;

b) $(a+b)m = am + bm$;

c) $(ab)m = a(bm)$;

d) $1m = m$.

(ii) M disebut modul kanan atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $(m+n)a = ma + na$;

b) $m(a+b) = ma + mb$;

c) $m(ab) = (ma)b$;

d) $m1 = m$ (Adkinds and Weintraub, 1992).

Berikut ini diberikan contoh - contoh modul.

Contoh 2.3.2

Diberikan ring $\mathbb{R}$ dan grup Abel $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring R terhadap operasi pergandaan skalar.

Untuk memperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$ haruslah $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri dan modul kanan.

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring R. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

   $$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

   dengan $a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n)$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

   i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

   dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, maka diperoleh

   $$\begin{aligned} a(\bar{x} + \bar{y}) &= a\left((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\right) \\ &= a(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \\ &= (a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)) \\ &= ((ax_1 + ay_1), (ax_2 + ay_2), \dots, (ax_n + ay_n)) \\ &= (ax_1, ax_2, \dots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \dots, ay_n) \\ &= a(x_1, x_2, \dots, x_n) + a(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned}$$

$$= a\bar{x} + a\bar{y}$$

Jadi $a(\bar{x} + \bar{y}) = a\bar{x} + a\bar{y}$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$(a_1 + a_2)(\bar{x}) = (a_1 + a_2)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= ((a_1 + a_2)x_1, (a_1 + a_2)x_2, \dots, (a_1 + a_2)x_n)$$

$$= (a_1x_1 + a_2x_1, a_1x_2 + a_2x_2, \dots, a_1x_n + a_2x_n)$$

$$= (a_1x_1, a_1x_2, \dots, a_1x_n) + (a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$$

$$= a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$$

Jadi $(a_1 + a_2)(\bar{x}) = a_1(\bar{x}) + a_2(\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$(a_1a_2)(\bar{x}) = (a_1a_2)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= (a_1a_2)(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$= ((a_1a_2)x_1, (a_1a_2)x_2, \dots, (a_1a_2)x_n)$$

$$= (a_1a_2x_1, a_1a_2x_2, \dots, a_1a_2x_n)$$

$$= a_1(a_2x_1, a_2x_2, \dots, a_2x_n)$$

$$= (a_1)(a_2\bar{x})$$

Jadi $(a_1a_2)(\bar{x}) = (a_1)(a_2\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$1(\bar{x}) = 1(x_{1,}x_{2,}\dots,x_n)$$
$$= (1x_{1,}1x_{2,}\dots,1x_n)$$
$$= (x_{1,}x_{2,}\dots,x_n)$$
$$= \bar{x}$$

Jadi $1(\bar{x}) = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{R}$.

2. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{R}$. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

dengan $(x_{1,}x_{2,}\dots,x_n) \cdot a = (x_1 \cdot a, x_2 \cdot a, \dots, x_n \cdot a)$, untuk setiap $a \in R$ dan $(x_{1,}x_{2,}\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

i. Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, maka diperoleh

$$(\bar{x} + \bar{y})a = \left((x_{1,}x_{2,}\dots,x_n) + (y_{1,}y_{2,}\dots,y_n)\right)a$$
$$= \left((x_{1,}x_{2,}\dots,x_n) + (y_{1,}y_{2,}\dots,y_n)\right)a$$
$$= \left((x_1 + y_1)a, (x_2 + y_2)a, \dots, (x_n + y_n)a\right)$$
$$= \left((x_1\, a + y_1\, a), (x_2\, a + y_2\, a), \dots, (x_n\, a + y_n\, a)\right)$$
$$= (x_1 a, x_2 a, \dots, x_n a) + (y_1 a, y_2 a, \dots, y_n a)$$
$$= (x_{1,}x_{2,}\dots,x_n)a + (y_{1,}y_{2,}\dots,y_n)a$$
$$= \bar{x}a + \bar{y}a$$

Jadi $(\bar{x} + \bar{y})a = \bar{x}a + \bar{y}a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

ii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$(\bar{x})(a_1 + a_2) = (x_1, x_2, \dots, x_n)(a_1 + a_2)$$
$$= (x_1(a_1 + a_2), x_2(a_1 + a_2), \dots, x_n(a_1 + a_2))$$
$$= (x_1 a_1 + x_1 a_2, x_2 a_1 + x_2 a_2, \dots, x_n a_1 + x_n a_2)$$
$$= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1) + (x_1 a_2, x_2 a_2, \dots, x_n a_2)$$
$$= (x_1, x_2, \dots, x_n)a_1 + (x_1, x_2, \dots, x_n)a_2$$
$$= (\bar{x})a_1 + (\bar{x})a_2$$

Jadi, $(\bar{x})(a_1 + a_2) = (\bar{x})a_1 + (\bar{x})a_2$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii. Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh

$$(\bar{x})(a_1 a_2) = (x_1, x_2, \dots, x_n)(a_1 a_2)$$
$$= (x_1(a_1 a_2), x_2(a_1 a_2), \dots, x_n(a_1 a_2))$$
$$= (x_1 a_1 a_2, x_2 a_1 a_2, \dots, x_n a_1 a_2)$$
$$= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1)a_2$$
$$= (\bar{x} a_1)(a_2)$$

Jadi $(\bar{x})(a_1 a_2) = (\bar{x} a_1)(a_2)$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

iv. Diberikan sebarang $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ maka diperoleh

$$(\bar{x})1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)1$$
$$= (x_1 1, x_2 1 \dots, x_n 1)$$
$$= (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$= \bar{x}$

Jadi $(\bar{x})1 = \bar{x}$, untuk setiap $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{R}$ dan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$.

Contoh 2.3.3

Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan sebarang grup Abel $(G, +)$. Akan ditunjukan $(G, +)$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Untuk memperlihatkan bahwa G merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ haruslah G merupakan modul kiri dan modul kanan.

a) Akan ditunjukkan G adalah modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Didefinisikan operasi

$$\cdot : \mathbb{Z} \times G \rightarrow G$$

dengan operasi $n \cdot g \in G$ sebagai berikut :

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak n kali}} & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}_{\text{sebanyak } |n| \text{ kali}} & ; n < 0 \end{cases}$$

Diberikan sebarang $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, g, g_1, g_2 \in G$, maka diperoleh:

i. $n(g_1 + g_2) = ng_1 + ng_2$, untuk setiap $g_1, g_2 \in G, n \in \mathbb{Z}$;

ii. $(n_1 + n_2)g = n_1 g + n_2 g$, untuk setiap $g \in G \; dan \; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$;

iii. $(n_1 n_2)g = n_1 n_2 g = n_1(n_2 g)$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$;

iv. $1g = g$, untuk setiap $g \in G$.

Dari i,ii,iii, dan iv terbukti bahwa G merupakan modul kiri.

b) Akan ditunjukkan G adalah modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$.

Didefinisikan

$$\cdot : G \times \mathbb{Z} \to G$$

dengan operasi $n \cdot g \in G$ sebagai berikut :

$$gn = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak n kali}} & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}_{\text{sebanyak } |n| \text{ kali}} & ; n < 0 \end{cases}$$

Diberikan sebarang $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, g, g_1, g_2 \in G$, maka diperoleh:

i. $(g_1 + g_2)n = g_1 n + g_2 n$, untuk setiap $g_1, g_2 \in G, n \in \mathbb{Z}$;

ii. $g(n_1 + n_2) = gn_1 + gn_2$, untuk setiap $g \in G \; dan \; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$;

iii. $g(n_1 n_2) = gn_1 n_2 = (gn_1)n_2$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$;

iv. $g1 = g$, untuk setiap $g \in G$.

Dari i,ii,iii, dan iv terbukti bahwa G merupakan modul kanan.

Berdasarkan a) dan b) dapat terlihat bahwa G merupakan modul atas suatu ring $\mathbb{Z}$.

Dimisalkan R ring dan $S \subseteq R$. Seperti yang telah diketahui, S subring R jika :

1) $S \neq \emptyset$
2) $x - y \in S$, untuk setiap $x, y \in S$
3) $xy \in S$, untuk setiap $x, y \in S$.

Begitu pula dengan modul, modul akan memiliki submodul yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.4

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M merupakan modul atas R. $N \subseteq M$ disebut submodul (R-submodul) dari M jika N merupakan subgrup dari M yang juga merupakan modul atas R dengan operasi yang sama di M (Adkinds and Weintraub, 1992).

Berdasarkan definisi ini, dapat disimpulkan bahwa N submodul M jika dan hanya jika :

1) N subgrup M
2) N tertutup terhadap operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times N \rightarrow N$$

yaitu $rn \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$.

Berikut contoh dari submodul atas suatu ring R.

Contoh 2.3.5

Diberikan $\mathbb{Z}$ merupakan modul atas ring R. Akan ditunjukkan bahwa himpunan $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

(a) Akan ditunjukkan bahwa operasi + bersifat tertutup di $n\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ dan $n \in \mathbb{N}$, sehingga:

$$x + y = nm_1 + nm_2$$
$$= n(m_1 + m_2) \in n\mathbb{Z}$$

Jadi, terbukti bahwa operasi + bersifat tertutup di $n\mathbb{Z}$.

(b) Akan ditunjukkan bahwa $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

Untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$, ambil $m = 0$, sehingga

$nm = n(0) = 0 \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti bahwa $n\mathbb{Z} \neq \emptyset$.

(c) Akan ditunjukkan untuk setiap $x, y \in n\mathbb{Z}$, $xy^{-1} \in n\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x, y \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm_1$ dan $y = nm_2$ untuk suatu $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

$y^{-1} = n(-m_2) \in n\mathbb{Z}$ (karena $(-m_2) \in \mathbb{Z}$)

$xy^{-1} = nm_1 + n(-m_2)$

$= n(m_1 - m_2) \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti bahwa $xy^{-1} \in n\mathbb{Z}$, untuk setiap $x, y \in n\mathbb{Z}$.

Dari (a), (b) dan (c) terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi pergandaan skalar tertutup di $n\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x \in n\mathbb{Z}$ dengan $x = nm$ untuk setiap $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ dan $r \in R$, maka:

$rx = r(nm) = n(rm) \in n\mathbb{Z}$

Jadi, terbukti bahwa operasi pergandaan skalar tertutup di $n\mathbb{Z}$.

Berdasarkan (i) dan (ii) terbukti bahwa $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

Seperti halnya pada grup, dapat ditunjukkan bahwa irisan dan jumlahan dari dua submodul juga membentuk submodul, seperti yang diberikan dalam lemma berikut ini.

Lemma 2.3.6

Misal M modul atas R dan N_1, N_2 submodul, maka:

1. $N_1 \cap N_2$ merupakan submodul di M
2. $N_1 + N_2$ merupakan submodul di M

Bukti

1. Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Akibatnya $0 \in N_1 \cap N_2$. Sehingga, $N_1 \cap N_2$ bukan merupakan himpunan kosong.

   Diberikan sebarang $r \in R$ dan $a, b \in N_1 \cap N_2$ maka $a, b \in N_1$ dan $a, b \in N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M maka memenuhi $a - b \in N_1$ dan $a - b \in N_2$. Akibatnya, $a - b \in N_1 \cap N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M maka memenuhi operasi pergandaan skalar yaitu $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot a \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot a \in N_1 \cap N_2$.

   Jadi, terbukti bahwa $N_1 \cap N_2$ merupakan submodul di M.

2. Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Akibatnya $0 \in N_1 + N_2$. Sehingga, $N_1 + N_2$ bukan merupakan himpunan kosong.

   Diberikan sebarang $r \in R$ dan $a + b, c + d \in N_1 + N_2$.

   Karena N_1 dan N_2 merupakan submodul di M maka memenuhi $a - c \in N_1$ dan $b - d \in N_2$. Akibatnya, $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \in N_1 + N_2$.

Selanjutnya, karena N_1 dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M maka memenuhi operasi pergandaan skalar yaitu $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot b \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot (a + b) = ra + rb \in N_1 + N_2$.

Jadi, terbukti bahwa $N_1 + N_2$ merupakan submodul di M. ■

Diberikan ring R dengan elemen satuan, pada bagian sebelumnya telah dijelaskan tentang modul yang merupakan modul kiri. Suatu submodul dapat dibangun oleh suatu himpunan yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.7

Misalkan M adalah suatu R-modul dan $N_1, \dots, N_n$ adalah submodul dari M.

1) Penjumlahan di $N_1, \dots, N_n$ merupakan himpunan dari semua penjumlahan berhingga oleh elemen dari himpunan N_i yaitu $N_1 + N_2 + \cdots + N_n = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,|a_i \in N_i\}$ untuk setiap i.
2) Untuk sebarang $A \subseteq M$ dimisalkan :

   $RA = \{r_1a_1 + r_2a_2 + \cdots + r_ma_m | r_1, \dots, r_m \in R,\ a_1, \dots,\ a_m \in A, m \in \mathbb{Z}^+\}$

   (Jika $A = \emptyset$, maka ditentukan $RA = \{0\}$). Jika A himpunan berhingga $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dapat ditulis sebagai $Ra_1 + Ra_2 + \cdots + Ra_n$ untuk RA. RA dikatakan submodul dari M yang dibangun oleh A. Jika N submodul dari M dan $N = RA$, untuk suatu $A \subseteq M$ disebut A sebagai himpunan pembangun atau membangun himpunan untuk N, dan disebut N dibangun oleh A.

3) N submodul dari M adalah pembangun berhingga jika terdapat himpunan bagian berhingga A di M sedemikian sehingga $N = RA$, bahwa jika N dibangun oleh suatu himpunan berhingga.

4) Suatu submodul N di M adalah siklik jika terdapat sebuah elemen $a \in M$ sedemikian sehingga $N = Ra$, jika N dibangun oleh satu elemen, yaitu: $N = Ra = \{ra \mid r \in R\}$.

Definisi ini tidak mengharuskan ring R memuat elemen satuan. Namun, kondisi ini menjamin bahwa A termuat di dalam RA. Dapat dilihat bahwa kriteria submodul pada himpunan bagian A di M, RA merupakan submodul M dan submodul terkecil dari M yang memuat A. Secara khusus, untuk submodul $N_1, \dots, N_n$ dari $M, N_1 + \dots + N_n$ adalah submodul yang dibangun oleh himpunan $N_1 \cup \dots \cup N_n$ dan merupakan submodul terkecil dari M yang memuat N_i, untuk semua i. Jika $N_1, \dots, N_n$ yang dibangun oleh himpunan $A_1, \dots, A_n$, maka $N_1 + \dots + N_n$ juga dibangun oleh $A_1 \cup \dots \cup A_n$ (Dummit dan Foote, 2004).

M disebut pembangun berhingga atau *countably generated* jika memiliki pembangun himpunan A dengan $card(A) \leq card(\mathbb{N})$. Jika M dibangun dengan satu elemen, M disebut siklik (Wisbauer, 1991).

Dari pendefinisian submodul yang dibangun oleh suatu himpunan, diberikan contoh berikut.

Contoh 2.3.8

Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai modul atas ring R dan himpunan bagian $X = \{2,4,6\}$ di $\mathbb{Z}$.

Karena, submodul di $\mathbb{Z}$ berbentuk $n\mathbb{Z}$ untuk suatu $n \in \mathbb{N}$, maka submodul-submodul dari $\mathbb{Z}$ yang memuat himpunan X adalah submodul $2\mathbb{Z}$ dan $\mathbb{Z}$.

Akibatnya, diperoleh submodul yang dibangun oleh X adalah $2\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$.

2.4. Homomorfisma Modul

Modul merupakan generalisasi dari ruang vektor dan suatu transformasi linear pada ruang vektor juga dapat digeneralisasi pada modul, yang disebut dengan homomorfisma modul. Homomorfisma modul dapat dibentuk jika ada dua modul atas ring yang sama dan ada fungsi yang memetakan dua modul tersebut. Untuk lebih jelasnya berikut diberikan definisi mengenai homomorfisma modul.

Definisi 2.4.1

Misal R ring dan M, N modul atas ring R

1. Pemetaan φ: $M \to N$ merupakan homomorfisma modul jika memenuhi aksioma berikut :
   (a) $\varphi\ (x + y) = \varphi(x) + (y),\ \ \forall x, y \in M$
   (b) $\varphi\ (rx) = r\varphi(x)\ ,\ \forall\, r \in R, x \in M.$
2. Homomorfisma modul dikatakan isomorfisma jika fungsi φ bersifat bijektif yaitu injektif dan surjektif. Modul M dan N dikatakan isomorfik, dinotasikan $M \cong N$, jika terdapat isomorfis modul dengan pemetaan φ: $M \to N$ (Dummit dan Foote, 2004).

Himpunan homomorfisma dari M ke N dinotasikan sebagai $Hom_R(M, N)$ atau $Hom\,(M, N)$. Untuk $f \in Hom_R(M, N)$ didefinisikan *kernel* dan *image* dari f, yaitu

Ker $f = \{m \in M | f(m) = 0\}$

$Im\, f = \{f(m) \in N | m \in M\}$

Ker f merupakan submodul dari M dan $Im\, f$ merupakan submodul dari N (Wisbauer, 1991).

Untuk memperjelas definisi homomorfisma modul atas suatu ring, berikut diberikan contoh homomorfisma modul.

Contoh 2.4.2

Diberikan G grup Abel dan $g \in G$. Jika $n \in Z$ maka didefinisikan perkalian skalar ng:

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{\text{n kali}} & ; jika\ n > 0 \\ 0 & ; jika\ n = 0 \\ \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{|\text{n}| \text{ kali}} & ; jika\ n < 0 \end{cases}$$

dengan menggunakan perkalian skalar dari modul G atas ring Z. Selanjutnya, jika G dan H merupakan grup Abel dan pemetaan $f: G \to H$ merupakan homomorfisma grup, maka f juga merupakan homomorfisma Z modul (jika $n > 0$).

$$f(ng) = f(g + \cdots + g)$$
$$= f(g) + \cdots + f(g)$$
$$= nf(g)$$ (Adkinds and Weintraub, 1992).

Suatu fungsi disebut homomorfisma modul jika memenuhi beberapa aksioma.

Berikut diberikan proposisi suatu fungsi yang merupakan homomorfisma modul.

Proposisi 2.4.3

Diberikan M, N dan L modul atas ring R.

(1) Pemetaan $\varphi : M \to N$ adalah homomorfisma modul atas ring R jika dan hanya jika

$$\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y), \text{ untuk setiap } x, y \in M \text{ dan } r \in R.$$

(2) Diberikan φ, ψ dan didefinisikan $\varphi + \psi$ oleh $(\varphi + \psi)(m) = \varphi(m) + \psi(m)$, untuk setiap $m \in M$.

Selanjutnya, $\varphi + \psi \in \text{Hom}_R(M, N)$ dan dengan operasi ini $\text{Hom}_R(M, N)$ disebut grup Abel. Jika R ring komutatif maka $r \in R$ didefinisikan $r\varphi$ oleh

$(r\varphi)(m) = r(\varphi(m))$, untuk setiap $m \in M$.

Kemudian, $r\varphi \in \text{Hom}_R(M, N)$ dan dengan perlakuan ini $\text{Hom}_R(M, N)$ yang merupakan grup Abel dengan R ring komutatif merupakan R-modul.

(3) Jika $\varphi \in \text{Hom}_R(L, M)$ dan $\psi \in \text{Hom}_R(M, N)$ maka $\psi \circ \varphi \in \text{Hom}_R(L, N)$.

Bukti

(1) Jika φ adalah homomorfisma R-modul, maka $\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$. Sebaliknya, jika $\varphi(rx + y) = r\varphi(x) + \varphi(y)$, maka dengan mengambil $r = 1$ diperoleh $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$. Selanjutnya, dengan mengambil $y = 0$, diperoleh $\varphi(rx) = r\varphi(x)$. Jadi, φ merupakan homomorfisma R-modul.

(2) Mengulas lagi, untuk memperlihatkan bahwa semua grup Abel dan aksioma R-modul yaitu dengan menggunakan definisi. Ring komutatif R digunakan untuk menunjukkan $r\varphi$ memenuhi aksioma kedua dari homomorfisma R-modul, yaitu :

$(r_1\varphi)(r_2 m) = r_1\varphi(r_2 m)$ (dengan definisi $r_1\varphi$)

$= r_1 r_2(\varphi m)$ (karena φ homomorfisma)

$= r_2 r_1 \varphi(m)$ (karena R komutatif)

$= r_2(r_1\varphi)(m)$.

(3) Diberikan sebarang $\varphi \in \text{Hom}_R(L, M)$ dan $\psi \in \text{Hom}_R(M, N)$ dan $r \in R$, $x, y \in L$, maka:

$$(\psi \circ \varphi)(rx + y) = \psi\big(\varphi(rx + y)\big)$$

$$= \psi(r\varphi(x) + \varphi(y)) \qquad \text{(sifat (1))}$$

$$= r\psi(\varphi(x)) + \psi(\varphi(y)) \qquad \text{(sifat (1))}$$

$$= r(\psi \circ \varphi)(x) + (\psi \circ \varphi)(y)$$

Jadi, dari (1) $\psi \circ \varphi$ adalah homomorfisma modul atas ring R (Dummit dan Foote, 2004).

Homomorfisma modul yang memetakan M ke M disebut dengan endomorfisma dari modul M, berikut definisinya.

Definisi 2.4.4

Ring $\text{Hom}_R(M, M)$ disebut endomorfisma ring dari M dan dinotasikan dengan $\text{End}_R(M)$ atau $\text{End}(M)$. Elemen di $\text{End}(M)$ disebut endomorfisma (Dummit dan Foote, 2004).

Untuk lebih memahami endomorfisma modul, berikut diberikan contohnya.

Contoh 2.4.5

Didefinisikan $\mathbb{R}^n = \{(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$; $i = 1,2, \dots, n$, dengan $\mathbb{R}^n$ modul atas ring $\mathbb{R}$ terhadap operasi pergandaan skalar. Pemetaan f dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$ yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = (a\bar{x})$, maka:

$$f(\bar{x} + \bar{y}) = f\left((x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) + (y_{1,}y_{2,} \dots, y_n)\right)$$

$$= f(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n) + f(y_{1,}y_{2,} \dots, y_n)$$

$$= (ax_{1,}ax_{2,} \dots, ax_n) + (ay_{1,}ay_{2,} \dots, ay_n)$$

$$= f(\bar{x}) + f(\bar{y})$$

dan untuk setiap $r \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, maka:

$$f(r\bar{x}) = f\left(r(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n)\right)$$

$$= f(rx_{1,}rx_{2,} \dots, rx_n)$$

$$= (arx_{1,}arx_{2,} \dots, arx_n)$$

$$= ar(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n)$$

$$= ra(x_{1,}x_{2,} \dots, x_n)$$

$$= rf(\bar{x})$$

Jadi, f merupakan endomorfisma.

2.5 Jumlah Langsung (*Direct Sum*)

Suatu modul dapat dioperasikan dengan pergandaan skalar dan juga dapat dioperasikan dengan jumlah langsung atau *direct sum* yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.5.1

Diberikan M_1, M_2 submodul dari modul M atas suatu ring R. Jika $M = M_1 + M_2$ dan $M_1 \cap M_2 = 0$ maka M disebut jumlah langsung dari M_1 dan M_2, dinotasikan dengan $M = M_1 \oplus M_2$ dan M_1, M_2 disebut dekomposisi dari M.

Pada kasus ini, setiap $m \in M$ dapat dinyatakan secara tunggal sebagai $m = m_1 + m_2$ dengan $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ dan M_1, M_2 disebut hasil jumlah langsung dari M. Jika M_1 adalah hasil jumlah langsung, maka terdapat submodul di M_2 dengan $M = M_1 \oplus M_2$ (Wisbauer, 1991).

Hasil jumlah langsung dari modul M adalah submodul A dari M sedemikian sehingga $A \oplus B = M$ untuk suatu submodul B dari M (Grillet,1999).

Untuk lebih jelasnya, akan diberikan contoh jumlah langsung dari suatu ring.

Contoh 2.5.2

Diberikan $\mathbb{Z}$-modul $\mathbb{Z}_6$, maka {0}, {0,3}, {0,2,4}, $\mathbb{Z}_6$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}_6$ sebagai $\mathbb{Z}$-modul. Perhatikan bahwa {0,3} + {0,2,4} = $\mathbb{Z}_6$ dan {0,3} ∩ {0,2,4} = {0}. Dengan demikian submodul {0,3} merupakan hasil jumlah langsung dari modul $\mathbb{Z}_6$.

Dalam teorema berikut diberikan sifat jumlah langsung dari modul atas suatu ring.

Teorema 2.5.3

Jika M modul atas ring R dan $M_1, M_2, \dots, M_n$ submodul dari M sedemikian sehingga

(1) $M = M_1 + M_2 + \dots + M_n$

(2) $M_i \cap (M_1 + M_2 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + \cdots + M_n) = 0$, untuk $1 \leq i \leq n$

maka $M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$.

Bukti

Diberikan $f_i : M_i \to M$ dengan $f_i(x) = x$ untuk semua $x \in M_i$ dan didefinisikan

$$f : M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n \to M$$

dengan operasi

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

f adalah homomorfisma modul atas ring R dan dengan mengikuti kondisi (1) maka f surjektif. Diberikan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in ker(f)$. Maka, $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0$ sehingga untuk $1 \leq i \leq n$ diperoleh

$x_i = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_{i-1} + x_{i+1} + \cdots + x_n)$.

Oleh karena itu,

$$x_i \in M_i \cap (M_1 + M_2 + \cdots + M_{i-1} + M_{i+1} + \cdots + M_n) = 0$$

maka $(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ dan f adalah isomorfisma (Adkinds and Weintraub, 1992).

Dari pendefinisian jumlah langsung suatu modul atas ring, berikut diberikan definisi dari submodul komplemen.

Definisi 2.5.4

Jika M adalah R-modul dan $M_1 \subseteq M$ merupakan submodul, katakan bahwa M_1 yaitu jumlah langsung dari M, atau komplemen di M, jika terdapat submodul $M_2 \subseteq M$ maka $M = M_1 \oplus M_2$.

Untuk lebih jelasnya, berikut diberikan contoh submodul komplemen dari suatu modul atas ring.

Contoh 2.5.5

Diberikan $R = Z$ dan $M = Z_{p^2}$. Jika $M_1 = \langle p \rangle$ maka M_1 tidak memiliki komplemen karena M_1 hanyalah subgrup dari M yang berorder p, jadi kondisi ini tidak memungkinkan Teorema 2.5.3 bagian (2) terpenuhi (Adkinds and Weintraub, 1992).