II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Grup

Pada bahasan ini, akan diulas tentang definisi Grup yang merupakan bentuk dasar dari suatu ring dan modul.

Definisi 2.1.1

Diberikan himpunan G dan operasi biner $*$. G disebut grup yang dinotasikan dengan (G,*) jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(a * b) * c = a * (b * c)$, untuk setiap $a, b, c \in G$ (* bersifat assosiatif);

(ii) Terdapat elemen e di G, yang disebut identitas di G, sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$, untuk setiap $a \in G$;

(iii) Untuk setiap $a \in G$ terdapat $a^{-1} \in G$, sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$, elemen a^{-1} disebut invers dari a (Dummit and Foote , 2004).

Berikut ini akan diberikan contoh dari grup.

Contoh 2.1.1

Diberikan $\mathbb{Z}$ bilangan bulat. Himpunan $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z})$. Akan ditunjukkan bahwa $< 2\mathbb{Z}, +>$ merupakan grup.

(i) Akan ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

Diberikan sebarang $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $x = 2a$ dan $y = 2b$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$

$$x + y = 2a + 2b$$

$$= 2(a + b) \quad \in 2\mathbb{Z}$$

Jadi, $2\mathbb{Z}$ bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan.

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi penjumlahan bersifat assosiatif di $2\mathbb{Z}$.

Diberikan sebarang $x, y, z \in 2\mathbb{Z}$ dengan $x = 2a$,$y = 2b$ dan $z = 2c$ untuk suatu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$$x + (y + z) = 2a + (2b + 2c)$$

$$= 2a + 2(b + c)$$

$$= 2\ (a + (b + c))$$

$$= 2\ ((a + b) + c)$$

$$= 2(a + b) + 2c$$

$$= (2a + 2b) + 2c$$

$$= (x + y) + z$$

Jadi, terbukti bahwa operasi penjumlahan bersifat assosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ memiliki elemen identitas terhadap operasi penjumlahan.

Untuk setiap $2a \in 2\mathbb{Z}$ terdapat $0 \in 2\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $2a + 0 = 0 + 2a = 2a$.

Jadi, elemen identitas terhadap operasi penjumlahan pada $2\mathbb{Z}$ yaitu 0.

(iv) Akan ditunjukkan setiap elemen di $2\mathbb{Z}$ memiliki invers terhadap operasi penjumlahan.

Untuk setiap $x \in 2\mathbb{Z}$ terdapat $-x \in 2\mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$x + (-x) = 0$.

Jadi, invers dari x adalah $(-x) \in 2\mathbb{Z}$. Hal ini berakibat bahwa setiap elemen pada $2\mathbb{Z}$ memiliki invers di $2\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan.

Berdasarkan (i)-(iv) terbukti bahwa $(2\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup.

Grup Abel (grup komutatif) merupakan salah satu bentuk grup. Berikut diberikan definisinya.

Definisi 2.1.2

Grup $(G,*)$ dikatakan grup Abel (grup komutatif) jika $a * b = b * a$, untuk setiap $a, b \in G$ (Dummit and Foote , 2004).

Berikut ini akan diberikan contoh dari grup Abel.

Contoh 2.1.2

Diberikan $< 2\mathbb{Z}, + >$ merupakan grup dengan $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ grup Abelian.

Diberikan sebarang $x, y \in 2\mathbb{Z}$ dengan $x = 2a$ dan $y = 2b$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{Z}$, maka:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 2a + 2b \\
&= 2(a + b) \\
&= 2(b + a) \\
&= 2b + 2a
\end{aligned}
$$

$= y + x$

Jadi, terbukti bahwa $\langle 2\mathbb{Z}, +\rangle$ grup Abel.

2.2 Ring

Pada bagian ini akan dibahas mengenai salah satu struktur aljabar yang terdiri atas satu himpunan dan dua operasi biner, yaitu ring.

Definisi 2.2

Himpunan R dengan dua operasi biner $+$ (penjumlahan) dan $\cdot$ (perkalian) merupakan ring jika memenuhi aksioma berikut :

(i) $(R, +)$ merupakan grup Abel ;

(ii) Operasi perkaliannya bersifat asosiatif, yaitu $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ untuk setiap $a, b, c \epsilon R$;

(iii) Hukum distributif terpenuhi di R, yaitu untuk setiap $a, b, c \in R$

$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ dan $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

(Dummit and Foote , 2004).

Berikut ini akan diberikan contoh dari ring.

Contoh 2.2.1

Diberikan $< 2\mathbb{Z}, + >$ merupakan grup Abelian, $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. Akan ditunjukkan bahwa $< 2\mathbb{Z}, +, . >$ ring.

(i) $< 2\mathbb{Z}, + >$ merupakan grup Abelian (telah dibuktikan sebelumnya).

(ii) Akan ditunjukkan bahwa operasi perkalian bersifat assosiatif.

Diberikan $x, y, z \in 2\mathbb{Z}$ dengan $x = 2a$, $y = 2b$ dan $z = 2c$ untuk suatu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$(x\,.\,y).\,z \;= (2a\,.\,2b)\,.\,2c$

$= 2^2(ab)\,.\,2c$

$= 2^3((ab)\,.\,c)$

$= 2^3(a(bc))$

$= \; 2a\,.\,2^2(bc)$

$= \; 2a\,.\,(2b\,.\,2c)$

$= x\,.\,(y\,.\,z)$

Jadi, terbukti bahwa operasi perkalian bersifat assosiatif.

(iii) Akan ditunjukkan bahwa $2\mathbb{Z}$ bersifat distributif kiri dan distributif kanan.

Diberikan sebarang $x, y, z \in \; 2\mathbb{Z}$ dengan $x = 2a$, $y = 2b$ dan $z = 2c$

untuk suatu $a, b, c \in \mathbb{Z}$, sehingga:

$(x + y).\,z = \; (2a + \; 2b)\;.2c$

$= 2(a + b)\,.\,2c$

$= 2^2((a + b)\,.\,c)$

$= 2^2(ac + bc)$

$= \; 2^2(ac) + \;\; 2^2(bc)$

$= \;\; (2a\,. \;\, 2c) + \;\; (2b\;.2c)$

$= (x.\,z) + \; (y.\,z)$

Jadi, terbukti bahwa $2\mathbb{Z}$ bersifat distributif kiri.

$x.\,(y + z) \;= \; 2a.\,(2b + 2c)$

$= 2a\;.2(b + c)$

$= 2^2\;(a.\,(b + c))$

$= 2^2(ab + ac)$

$= \; 2^2(ab) + \;\; 2^2(ac)$

$= (2a\ .\ 2b) +\ (2a\ .2c)$

$= (x\ .\ y) +\ (x\ .\ z)$

Jadi, terbukti bahwa $2\mathbb{Z}$ bersifat distributif kanan.

$\therefore$ terbukti bahwa sifat distributif kiri dan kanan terpenuhi.

Dari (i) – (iii), terbukti bahwa $< 2\mathbb{Z}, +, . >$ merupakan ring.

2.3 Modul

Pada bagian ini akan dibahas mengenai modul atas ring R. Berikut diberikan definisi modul atas ring R.

Definisi 2.3.1

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M grup Abelian, dengan operasi pergandaan skalar

$$\cdot : R \times M \to M$$

M disebut modul atas ring R jika M merupakan modul kiri dan kanan.

(i) M disebut modul kiri atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $a(m + n) = am + an$;

b) $(a + b)m = am + bm$;

c) $(ab)m = a(bm)$;

d) $1m = m$.

(ii) M disebut modul kanan atas ring R, jika untuk setiap $m, n \in M$ dan $a, b \in R$ memenuhi aksioma berikut ini :

a) $(m+n)a = ma + na$;

b) $m(a+b) = ma + mb$;

c) $m(ab) = (ma)b$;

d) $m1 = m$ (Adkinds and Weintraub , 1992).

Berikut ini diberikan contoh - contoh modul.

Contoh 2.3.1

Diberikan ring $\mathbb{R}$ dan grup abel $\mathbb{R}^n$ sebagai berikut

$$\mathbb{R}^n = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \middle| \, x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$$

Akan ditunjukkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring R terhadap operasi pergandaan skalar.

Untuk memperlihatkan bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$ haruslah $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri dan modul kanan.

1. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring R. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dengan $a \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \dots, a \cdot x_n)$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$$a(\bar{x} + \bar{y}) = a\left((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\right)$$

$$= a\,(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$= \left(a(x_1 + y_1), a(x_2 + y_2), \dots, a(x_n + y_n)\right)$$

$= \big((ax_1 + ay_1), (ax_2 + ay_2), \ldots, (ax_n + ay_n)\big)$

$= (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n) + (ay_1, ay_2, \ldots, ay_n)$

$= a\big(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\big) + a\big(y_{1,} y_{2,} \ldots, y_n\big)$

$= a\bar{x} + a\bar{y}.$

Jadi $a(\overline{x} + \overline{y}) = a\bar{x} + a\overline{y}$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, maka diperoleh :

$(a_1 + a_2)(\overline{x}) = (a_1 + a_2)\big(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\big)$

$= \big((a_1 + a_2)x_{1,} (a_1 + a_2)x_{2,} \ldots, (a_1 + a_2)x_n\big)$

$= (a_1x_1 + a_2x_1, a_1x_2 + a_2x_2, \ldots, a_1x_n + a_2x_n)$

$= (a_1x_1, a_1x_2, \ldots, a_1x_n) + (a_2x_1, a_2x_2, \ldots, a_2x_n)$

$= a_1\big(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\big) + a_2\big(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\big)$

$= a_1(\overline{x}) + a_2(\overline{x}).$

Jadi $(a_1 + a_2)(\overline{x}) = a_1(\overline{x}) + a_2(\overline{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, maka diperoleh :

$(a_1a_2)(\overline{x}) = (a_1a_2)\big(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\big)$

$= (a_1a_2)\big(x_{1,} x_{2,} \ldots, x_n\big)$

$= ((a_1a_2)x_1, (a_1a_2)x_2, \ldots, (a_1a_2)x_n)$

$= (a_1a_2x_1, a_1a_2x_2, \ldots, a_1a_2x_n)$

$= a_1\,(a_2x_1, a_2x_2, \ldots, a_2x_n)$

$= a_1(a_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$= (a_1)(a_2\bar{x}).$

Jadi $(a_1 a_2)(\bar{x}) = (a_1)(a_2\bar{x})$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Diberikan sebarang , $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$1(\bar{x}) = 1(x_{1\,,} x_{2\,,} \dots, x_n)$$

$$= (1x_{1\,,} 1x_{2\,,} \dots, 1x_n)$$

$$= (x_{1\,,} x_{2\,,} \dots, x_n)$$

$$= \bar{x}.$$

Jadi $1(\bar{x}) = \bar{x}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kiri atas ring $\mathbb{R}$.

2. Akan ditunjukkan $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{R}$. Didefinisikan operasi pergandaan skalar sebagai berikut :

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

dengan $(x_{1\,,} x_{2\,,} \dots, x_n) \cdot a = (x_1 \cdot a, x_2 \cdot a, \dots, x_n \cdot a)$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$ dan $(x_{1\,,} x_{2\,,} \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(i) Diberikan sebarang $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

$$(\bar{x} + \bar{y})a = \left((x_{1\,,} x_{2\,,} \dots, x_n) + (y_{1\,,} y_{2\,,} \dots, y_n)\right)$$

$$= ((x_{1\,,} x_{2\,,} \dots, x_n) + (y_{1\,,} y_{2\,,} \dots, y_n))a$$

$$= \left(((x_1 + y_1)a, (x_2 + y_2)a, \dots, (x_n + y_n)a)\right)$$

$$= ((x_1\,a + y_1\,a), (x_2\,a + y_2\,a), \dots, (x_n\,a + y_n\,a))$$

$$= (x_1 a, x_2 a, \dots, x_n a) + (y_1 a, y_2 a, \dots, y_n a)$$

$= (x_1, x_2, \dots, x_n)a + (y_1, y_2, \dots, y_n)a$

$= \bar{x}a + \bar{y}a.$

Jadi $(\bar{x} + \bar{y})a = \bar{x}a + \bar{y}a$, untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$\overline{x}(a_1 + a_2) = (x_1, x_2, \dots, x_n)(a_1 + a_2)$

$= (x_1(a_1 + a_2), x_2(a_1 + a_2), \dots, x_n(a_1 + a_2))$

$= (x_1 a_1 + x_1 a_2, x_2 a_1 + x_2 a_2, \dots, x_n a_1 + x_n a_2)$

$= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1) + (x_1 a_2, x_2 a_2, \dots, x_n a_2)$

$= (x_1, x_2, \dots, x_n)a_1 + (x_1, x_2, \dots, x_n)a_2$

$= \bar{x} a_1 + \bar{x} a_2.$

Jadi $\bar{x} (a_1 + a_2) = \bar{x} a_1 + \bar{x} a_2$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Diberikan sebarang $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka diperoleh :

$\bar{x} (a_1 a_2) = (x_1, x_2, \dots, x_n)(a_1 a_2)$

$= (x_1 (a_1 a_2), x_2 (a_1 a_2), \dots, x_n(a_1 a_2))$

$= (x_1 a_1 a_2, x_2 a_1 a_2, \dots, x_n a_1 a_2)$

$= (x_1 a_1, x_2 a_1, \dots, x_n a_1)a_2$

$= (\bar{x} a_1)(a_2).$

Jadi $\bar{x} (a_1 a_2) = (\bar{x} a_1)(a_2)$, untuk setiap $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$,

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

(iv) Diberikan sebarang $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$,

dengan $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$(\overline{x})1 = (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n)1$$
$$= (x_1 1, x_2 1 \dots, x_n 1)$$
$$= (x_{1,} x_{2,} \dots, x_n).$$

Jadi $(\overline{x})1 = \overline{x}$, untuk setiap $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dari i – iv, terbukti bahwa $\mathbb{R}^n$ merupakan modul kanan atas ring $\mathbb{R}$.

Jadi, $\mathbb{R}^n$ merupakan modul atas ring $\mathbb{R}$.

Contoh 2.3.2

Diberikan ring $\mathbb{Z}$ dan sebarang grup abel $(G, +)$. Akan ditunjukan $(G, +)$ merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Untuk memperlihatkan bahwa G merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$ haruslah G merupakan modul kiri dan modul kanan.

a) Akan ditunjukkan G adalah modul kiri atas ring $\mathbb{Z}$.

Didefinisikan

$$\cdot : \mathbb{Z} \times G \to G$$

dengan operasi $n \cdot g \in G$ sebagai berikut :

$$ng = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak n kali}} & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}_{\text{sebanyak |n| kali}} & ; n < 0 \end{cases}$$

Diberikan sebarang $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, g, g_1, g_2 \in G$.

i. $n(g_1 + g_2) = ng_1 + ng_2$, untuk setiap $g_1, g_2 \in G, n \in \mathbb{Z}$

ii. $(n_1 + n_2)g = n_1g + n_2g$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

iii. $(n_1n_2)g = n_1n_2g = n_1(n_2g)$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

iv. $1.g = g$, untuk setiap $g \in G$

Dari i,ii,iii dan iv terbukti bahwa G merupakan modul kiri.

b) Akan ditunjukkan G adalah modul kanan atas ring $\mathbb{Z}$.

Didefinisikan

$$\cdot : G \times \mathbb{Z} \to G$$

dengan operasi $g \cdot n \in G$ sebagai berikut :

$$gn = \begin{cases} \underbrace{g + g + \cdots + g}_{\text{sebanyak n kali}} & ; n > 0 \\ 0 & ; n = 0 \\ \underbrace{-g + (-g) + \cdots + (-g)}_{\text{sebanyak } |n| \text{ kali}} & ; n < 0 \end{cases}$$

Diberikan sebarang $n, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}, g, g_1, g_2 \in G$.

i. $(g_1 + g_2)n = g_1n + g_2n$, untuk setiap $g_1, g_2 \in G, n \in \mathbb{Z}$

ii. $g(n_1 + n_2) = gn_1 + gn_2$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

iii. $g(n_1n_2) = gn_1n_2 = (gn_1)n_2$, untuk setiap $g \in G$ dan $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$

iv. $g.1 = g$, untuk setiap $g \in G$

Dari i,ii,iii dan iv terbukti bahwa G merupakan modul kanan.

Jadi dapat disimpulkan bahwa G merupakan modul atas ring $\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari submodul. Terlebih dahulu diberikan penjelasan mengenai subgrup.

Dimisalkan G grup dan $S \subseteq G$. Seperti yang telah diketahui, S merupakan subgrup G jika :

1) $S \neq \emptyset$
2) $a - b \in S$; $a, b \in S$

Begitu pula dengan modul, modul juga memiliki submodul yang akan didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 2.3.2

Diberikan ring R dengan elemen satuan dan M merupakan modul atas ring R. $N \subseteq M$ disebut submodul (R-submodul) dari M jika N merupakan subgrup dari M yang merupakan modul atas R dengan operasi yang sama di M (Adkinds and Weintraub , 1992).

Berdasarkan definisi submodul, dapat disimpulkan bahwa N submodul M jika dan hanya jika :

1) N subgrup M
2) N tertutup terhadap operasi pergandaan skalar yaitu $rn \in N$, untuk setiap $r \in R$ dan $n \in N$.

Berikut ini akan diberikan contoh dari submodul.

Contoh 2.3.3

Pada $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z} -$ modul, himpunan $n\mathbb{Z}$ dengan $n \in \mathbb{N}$ merupakan submodul dari $\mathbb{Z}$.

Pada lemma berikut, akan diuraikan bahwa submodul M tertutup terhadap operasi irisan dan jumlahan sebagai berikut.

Lemma 2.3

Misal M modul atas R dan N_1, N_2 submodul , maka:

1. $N_1 \cap N_2$ merupakan submodul di M.
2. $N_1 + N_2$ merupakan submodul di M.

Bukti :

1. Karena N_1dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Sehingga, $0 \in N_1 \cap N_2$. Terbukti bahwa $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$.

   Diberikan sebarang $r \in R$ dan $a, b \in N_1 \cap N_2$ maka $a, b \in N_1$ dan $a, b \in N_2$.

   Karena N_1dan N_2 merupakan submodul di M maka memenuhi $a - b \in N_1$ dan $a - b \in N_2$. Akibatnya, $a - b \in N_1 \cap N_2$.

   Karena N_1dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M maka $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot a \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot a \in N_1 \cap N_2$.

   Jadi, terbukti bahwa $N_1 \cap N_2$merupakan submodul di M.
2. Karena N_1dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M, maka $0 \in N_1$ dan $0 \in N_2$. Sehingga, $0 \in N_1 + N_2$. Terbukti bahwa $N_1 + N_2 \neq \emptyset$.

   Diberikan sebarang $r \in R$ dan $a + b, c + d \in N_1 + N_2$.

   Karena N_1dan N_2 merupakan submodul di M maka memenuhi $a - c \in N_1$ dan $b - d \in N_2$.

   Akibatnya, $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d) \in N_1 + N_2$.

Selanjutnya, karena N_1dan N_2 masing-masing merupakan submodul di M maka memenuhi operasi pergandaan skalar yaitu $r \cdot a \in N_1$ dan $r \cdot b \in N_2$ yang mengakibatkan $r \cdot (a + b) = ra + rb \in N_1 + N_2$.

Jadi, terbukti bahwa $N_1 + N_2$ merupakan submodul di M. ■

Selanjutnya, akan diberikan definisi mengenai grup faktor dan modul faktor.

Telah diketahui bahwa N merupakan subgrup normal di G, dinotasikan $N \trianglelefteq G$ jika koset kiri sama dengan koset kanan dari N di G yaitu $aN = Na$, untuk setiap $a \in G$.

Suatu grup G akan memiliki grup faktor dengan syarat tertentu. Begitu pula dengan modul, berikut akan dijelaskan tentang modul faktor.

Definisi 2.3.3

Jika $N \trianglelefteq G$, maka G/N disebut grup faktor dari G ke N (Adkinds and Weintraub , 1992).

Berikut ini akan diberikan contoh dari grup faktor.

Contoh 2.3.4

Grup $\mathbb{Z}$ terhadap operasi penjumlahan bilangan biasa merupakan grup Abel. Oleh karena itu, $n\mathbb{Z}$ merupakan subgrup normal dari $\mathbb{Z}$. Sehingga, dapat dibentuk grup faktor $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari modul faktor suatu submodul di R-modul.

Definisi 2.3.4

Jika N adalah submodul dari modul M atas ring R, maka modul faktor adalah grup faktor M/N (ingat bahwa M adalah grup abel dan N subgrup normal) tertutup terhadap perkalian skalar

$r(m + N) = rm + N$ (Rotman,2003).

Berikut ini akan diberikan contoh dari modul faktor.

Contoh 2.3.5

Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z} -$ modul dan submodul $6\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$. Dapat dibentuk grup faktor $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}} = \{0 + 6\mathbb{Z}, 1 + 6\mathbb{Z}, 2 + 6\mathbb{Z}, 3 + 6\mathbb{Z}, 4 + 6\mathbb{Z}, 5 + 6\mathbb{Z}\}$. Karena $6\mathbb{Z}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}$ maka $(6\mathbb{Z}, +)$ merupakan subgrup di dalam grup Abel $(\mathbb{Z}, +)$. Artinya $6\mathbb{Z}$ merupakan subgrup normal di $\mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ merupakan grup Abel. Dapat ditunjukkan bahwa grup Abel $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ merupakan modul atas $\mathbb{Z}$ terhadap operasi pergandaan skalar $r(a + 6\mathbb{Z}) = (ra) + 6\mathbb{Z}$, untuk setiap $r \in \mathbb{Z}$ dan $a \in \mathbb{Z}$. Lebih lanjut, grup Abel $\mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ disebut modul faktor dari submodul $6\mathbb{Z}$ di $\mathbb{Z}$.

2.4 Suplemen

Sebelumnya, akan diberikan definisi yang berkaitan dengan suplemen.

Berikut ini akan diberikan definisi dari submodul kecil.

Definisi 2.4.1

Suatu submodul $K \subseteq M$ dikatakan submodul kecil *(superfluous)* di M, dinotasikan $K \ll M$, jika $K + L = M$ maka $L = M$, untuk setiap submodul $L \subset M$ (Clark dkk, 2006).

Berikut ini akan diberikan contoh dari submodul kecil.

Contoh 2.4.1

Diberikan $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai $\mathbb{Z}$ −modul yaitu

$\mathbb{Z}_{14} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. $N_1 = \{0\}$, $N_2 = \{0, 7\}$,

$N_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dan $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

merupakan submodul di $\mathbb{Z}_{14}$. Karena jika $N_1 + X = \mathbb{Z}_{14}$ berakibat $X = \mathbb{Z}_{14}$, maka $N_1 \ll \mathbb{Z}_{14}$.

Selanjutnya, akan dijelaskan mengenai suplemen dari suatu modul. Berikut ini diberikan definisi suplemen dari modul.

Proposisi 2.4.1

Diberikan R-modul M. Untuk submodul $N. L \subset M$, pernyataan berikut ekuivalen :

(a) N merupakan elemen minimal pada himpunan submodul $\{ K \subset M | L + K = M\}$;

(b) $L + N = M$ dan $L \cap N \ll N$.

Jika ini terpenuhi, maka N dikatakan suplemen dari L di M.

Bukti :

(a)⟹(b) Diberikan sebarang $K \subseteq N$ dengan $(L \cap N) + K = N$. Oleh karena itu,

$M = L + N$

Karena $N = (L \cap N) + K$, maka :

$M = L + (L \cap N) + K$

$= L + K$

Karena N minimal pada himpunan $\{ K \subset M | L + K = M\}$ dan berdasarkan hipotesis $K \subseteq N$, maka diperoleh $K = N$. Oleh karena itu, terbukti bahwa $L \cap N \ll N$.

(b)⟹(a) Misal $L + N = M$ dan $L \cap N \ll N$. Akan ditunjukkan bahwa N minimal pada himpunan $\{ K \subset M | L + K = M\}$.

Untuk submodul $K \subseteq N$ dengan $L + K = M$, berlaku :

$$N = M \cap N$$

Karena N submodul dari M, jika $L + K = M$ diiriskan dengan N maka :

$$(L \cap N) + (K \cap N) = M \cap N$$

$$(L \cap N) + K = N$$

Karena $L \cap N \ll N$, maka diperoleh $K = N$(Clark dkk, 2006). ■

Berikut ini akan diberikan contoh dari suplemen.

Contoh 2.4.2

Diberikan $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai $\mathbb{Z}$ −modul yaitu

$\mathbb{Z}_{14} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. $N_1 = \{0\}$, $N_2 = \{0, 7\}$,

$N_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dan $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}_{14}$.

Karena $N_2 + N_3 = \mathbb{Z}_{14}$ dan $N_2 \cap N_3 \ll N_2$, maka N_2 merupakan suplemen dari N_3 di $\mathbb{Z}_{14}$.

2.5 Suplemen Lemah

Berikut ini akan diberikan definisi dari suplemen lemah.

Definisi 2.5.1

Suatu submodul $N \subset M$ dikatakan suplemen lemah pada submodul L dari M jika $N + L = M$ dan $N \cap L \ll M$. Modul M dikatakan bersuplemen lemah jika setiap submodul N dari M mempunyai suplemen lemah (Clark dkk, 2006).

Berikut ini akan diberikan contoh dari suplemen lemah

Contoh 2.5.1

Diberikan $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai $\mathbb{Z}$ $-$modul yaitu

$\mathbb{Z}_{14} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,11, 12, 13\}$. $N_1 = \{0\}$, $N_2 = \{0, 7\}$, $N_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dan $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ,11, 12, 13\}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}_{14}$.

Karena $N_2 + N_3 = \mathbb{Z}_{14}$ dan $(N_2 \cap N_3) + X = \mathbb{Z}_{14}$ berakibat $X = \mathbb{Z}_{14}$ maka $(N_2 \cap N_3) \ll \mathbb{Z}_{14}$. Jadi N_2 merupakan suplemen lemah di $\mathbb{Z}_{14}$

2.6 Submodul *Cosmall* dan Submodul *Coclosed*

Berikut ini akan diberikan definisi dari submodul *cosmall*.

Definisi 2.6.1 Diberikan submodul $K \subset L \subset M$, inklusi $L \subset M$ dikatakan *cosmall* di *M* jika $L/K \ll M/K$, dinotasikan dengan $K \overset{cs}{\underset{M}{\to}} L$ (Clark dkk, 2006).

Selanjutnya pada bagian ini akan diberikan definisi dari submodul *coclosed*.

Definisi 2.6.2 Submodul $L \subset M$ dikatakan *coclosed* di M, dinotasikan $L \overset{cc}{\rightarrow} M$, jika L tidak memiliki submodul sejati K di mana $K \subset L$ merupakan *cosmall* di M, maka $K_M^{\overset{cs}{\rightarrow}} L$, berakibat $K = L$. Jadi, L merupakan *coclosed* di M jika dan hanya jika untuk setiap submodul sejati $K \subset L$, terdapat submodul N dari M sedemikian sehingga $L + N = M$ tetapi $K + N \neq M$ (Clark dkk, 2006).

2.7 Radikal

Sebelumnya akan diberikan definisi dari submodul maksimal.

Definisi 2.7.1

Submodul $N \subset M$ dikatakan maksimal jika $N \neq M$ dan tidak termuat dalam submodul sejati di M (Wisbauer, 1991).

Berikut ini akan diberikan contoh dari submodul maksimal.

Contoh 2.7.1

Diberikan $\mathbb{Z}_{14}$ sebagai $\mathbb{Z}$ −modul yaitu

$\mathbb{Z}_{14} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$. $N_1 = \{0\}$, $N_2 = \{0, 7\}$,

$N_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ dan $N_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ merupakan submodul di $\mathbb{Z}_{14}$.

N_3 merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}_{14}$ karena tidak terdapat submodul sejati.

Selanjutnya akan diberikan definisi dari radikal suatu modul.

Definisi 2.7.2 Radikal dari R-modul M, dinotasikan $Rad\ M$ atau $Rad(M)$, merupakan irisan dari semua submodul maksimal di M, jika M tidak mempunyai submodul maksimal maka dapat ditentukan $Rad(M) = M$ (Clark dkk, 2006).

Berikut ini akan diberikan contoh dari radikal.

Contoh 2.7.2

Diberikan $\mathbb{Z}$ sebagai $\mathbb{Z}$ $-$modul. $2\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z}$, $7\mathbb{Z}$, ... merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}$. Jadi $Rad(\mathbb{Z}) =\ 2\mathbb{Z} \cap 3\mathbb{Z} \cap 5\mathbb{Z} \cap 7\mathbb{Z} \cap$ ... . Sehingga,

$$Rad(\mathbb{Z}) = \bigcap_{p\in P} p\mathbb{Z}$$

dengan p merupakan bilangan prima. Secara umum, $p\mathbb{Z}$ merupakan submodul maksimal di $\mathbb{Z}$.