II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial (Bronson dan Costa, 2007)

Persamaan differensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas *(independent variables*) Berdasarkan jumlah variabel bebasnya persamaan differensial dibagi dalam dua kelas, yaitu persamaan differensial biasa (PDB) dan persamaan differensial parsial (PDP). Jika turunan fungsi itu hanya tergantung pada satu variabel bebas, maka disebut persamaan differensial biasa (*ordinary differential equation*). Bila tergantung pada lebih dari satu variabel bebas disebut persamaan differensial parsial.

2.2 Gambaran Dasar Metode Analisis Homotopi (HAM) (Gupta dan Summit, 2011)

Metode Analisis Homotopi (HAM) adalah suatu pendekatan analitik secara umum yang digunakan untuk mendapatkan solusi dari beberapa permasalahan yaitu persamaan linear dan nonlinear, persamaan aljabar, persamaan diferensial biasa, persamaan diferensial parsial.

Pada tahun 1992 Shijun Liao dalam disertasi Phd-nya dari Shanghai Jiaotong University merancang pertama kali Metode Analisis Homotopi (HAM) dan dimodifikasi lebih lanjut pada tahun 1997 untuk memperkenalkan parameter tambahan tak nol atau disebut parameter konvergensi-kontrol yang dilambangkan dengan $\boldsymbol{c_0}$ dengan membangun homotopi pada sistem diferensial dalam bentuk umum.

untuk menunjukan gambaran dasar HAM dengan mengikuti persamaan diferensial

$$N[u(x,t)]=0 \tag{2.1}$$

dimana N adalah operator nonlinear, x dan t menunjukan variabel bebas dan u adalah fungsi yang tidak diketahui. Untuk penyederhanaannya, kita tidak perlu memperhatikan batas atau kondisi awal.

2.3 Persamaan Kolmogorov Petrovsky Piskunov (Boris dan Olga, 2005)

Kita ingat bahwa batas dimensi untuk persamaan kolmogorov petrovsky piskunov klasik (atau persamaan reaksi-difusi taklinear)

$$\boldsymbol{Ut = Uxx + f(u)} \tag{2.2}$$

di mana terlihat pada konteks dengan model turunan atas penyebaran sebuah populasi. Dalam prakteknya berlaku pada biologi dan model kimia. Pada umumnya sesuatu memerlukan bentuk khusus untuk ketaklinearan : $f(0)=f(1)=0$, $f(u)>0$ untuk $0<u<1$ (dan saat kondisi $f''(u)<0$). Ada perbedaan pembatas pada tipe lain untuk persamaan reaksi-difusi. Kita tidak akan membatasi bentuk khusus dari *f(u)*, tetapi memperhatikan bahwa kondisi diatas memenuhi jarak yang pasti dari parameter-parameternya.

Teorema 1 Dimensi orde pertama $g(p_{0,}p_1)$ untuk persamaan kolmogorov petrovsky piskunov adalah untuk suatu $g(p_{0,}p_1) = p_{0,}$ dengan $f(p_{0,})$ sebarang

atau

$$g(p_{0,}p_1) = p_1 - a(p_{0,}) dengan\ f(p_{0,}) = ka(p_{0,}) - a'\,(p_{0,})a(p_{0,})$$

dimana $a(p_{0,})$ adalah sebarang fungsi dan $k \in \mathbb{R}$.

Teorema 2 Orde kedua untuk bentuk $g = p_2 + a\left(p_{0,}\right)p_1 + b\left(p_{0,}\right)$ salah satunya adalah :

$$g = p_2 - (\alpha p_0 + \beta)p_1 - \frac{1}{2}f(p_{0,})$$

Dengan $f(p_{0,}) = \frac{\alpha^2}{9}p_0^3 + \frac{\alpha\beta}{3}p_0^2 + \gamma p_0 + \delta$ dan $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ sebarang, atau

$$g = p_2 - \beta p_1 + \gamma f(p_{0,})$$

Dengan $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sebarang jika $f(p_{0,})$ adalah linear dan $\gamma = 1$ jika $f(p_{0,})$ adalah sebarang.

Teorema 3 Orde ketiga dari KPP untuk bentuk

$g(p_{0,}p_{1,}p_{2,}p_3) = p_3 + p_2 \mathrm{A}(p_0, p_1) + \mathrm{B}(p_0, p_1)$ salah satunya adalah :

$$g(p_{0,}p_{1,}p_{2,}p_3) = p_3 - \frac{p_2\, p_1}{p_0} + a\frac{(p_1^2 - p_2\, p_0)}{p_0} - bp_1$$

Dengan $f(p_{0,}) = cp_0 - bp_0\, log p_{0,}$ atau

$$g(p_{0,}p_{1,}p_{2,}p_3) = p_3 - 3\frac{p_2\, p_1}{p_0} + 2\frac{p_1^3}{p_0^2} + ap_1$$

Dengan $f(p_{0,}) = cp_0 - bp_0\, log\, p_0 + ap_0\, (\log p_0)^2$ atau

$$g(p_{0,}p_{1,}p_{2,}p_3) = p_3 - \frac{p_2\, p_1}{p_0} + a\frac{(p_1^2 - p_2\, p_0)}{p_0} + b\frac{p_1}{p_0}$$

Dengan $f(p_{0,}) = 0.$ disini $a, b, c \in \mathbb{R}$ adalah sebarang.

Teorema 4 Misalkan $g = p_n + p_{n-1}\, R(p_{0,} \dots, p_{n-2}) + S(p_{0,} \dots, p_{n-2})$ adlah dinamika untuk persamaan KPP (1). Maka R adalah kuadrat dan S adalah kubik di dalam p_{n-2} .

2.4 Gambaran Tentang Homotopi (Liao, 2012)

Homotopi dideskripsikan sebagai variasi kontinu atau deformasi di matematika. Mendeformasikan lingkaran dapat dilakuakan secara kontinu menjadi elips , dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat. Homotopi dapat didefinisikan sebagai suatu penghubung antara benda yang berbeda di matematika yang memiliki karakteristik yang sama di beberapa aspek.

C[a,b] di notasikan sebagai himpunan fungsi real kontinu dalam interval *a*≤*x*≤*b*. secara umum, jika suatu fungsi $f \in C$[a,b] dapat dideformasikan secara kontinu ke fungsi kontinu $g \in C$[a,b] lain maka dapat terbentuk suatu homotopi

$$\mathcal{H} : f(x) \sim g(x)$$

$$\mathcal{H}(x;q) = (1-q)[g(x) - f(x)] - q[g(x)]\,, q \in [0,1]. \qquad (2.3)$$

Definisi 1

Suatu homotopi dua fungsi yang kontinu *f(x)* dan *g(x)* dari suatu ruang topologi X ke ruang topologi Y dinotasikan sebagai fungsi kontinu $\mathcal{H}: X \times [0,1] \to Y$ dari produk ruang X dengan interval [0,1] ke Y sedemikian sehingga jika $x \in X$ maka $\mathcal{H}(x,0) = f(x)$ dan $\mathcal{H}(x,1) = g(x)$.

Definisi 2

Parameter *benaman* $q \in [0,1]$ di dalam suatu fungsi atau persamaan homotopi disebut parameter homotopi.

Definisi 3

Diberikan suatu persamaan $\mathcal{E}_1$, yang mempunyai paling sedikit satu solusi *u*. ambil $\mathcal{E}_0$ sebagai persamaan awal yang solusinya diketahui u_0. Jika itu dapat dikonstruksikan ke dalam bentuk persamaan homotopi $\mathcal{E}(q):\mathcal{E}_0 \sim \mathcal{E}_1$ sedemikian sehingga parameter homotopi $q \in [0,1]$ naik dari 0 menuju 1,$\mathcal{E}(q)$ dideformasikan secara kontinu dari persamaan awal $\mathcal{E}_0$ ke persamaan asli $\mathcal{E}_1$ dimana solusinya berubah secara kontinu dari solusi yang diketahui u_0 dari $\mathcal{E}_0$ ke solusi yang tidak diketahui *u* dari $\mathcal{E}_1$ jenis dari persamaan homotopi ini disebut *persamaan deformasi orde-nol.*

Definisi 4

Diberikan suatu persamaan taklinear dinotasikan dengan $\mathcal{E}_1$ yang mempunyai paling sedikit satu solusi *u(x,t)* dimana *x* dan *t* merupakan variable bebas. Ambil parameter homotopi $q \in [0,1]$ dan $\mathcal{E}(q)$ persamaan deformasi orde-nol yang menghubungkan persamaan asli ke persamaan awal $\mathcal{E}_0$ dengan aproksimasi awal yang diketahui $u_0\,(x,t)$. Asumsikan bahwa persamaan deformasi orde-nol $\mathcal{E}(q)$ memiliki solusi dan analitik di *q=1*, sehingga diperoleh *homotopi deret Maclaurin* :

$$\phi(x,t;q) \sim U_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} U_m\,(x,t)q^m, q \in [0,1] \qquad (2.4)$$

dan deret homotopi:

$$\phi(x,t;1) \sim U_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} U_m\,(x,t) \tag{2.5}$$

persamaan yang berhubungan dengan $U_m(x,t)$ yang nilainya tidak diketahui disebut *persamaan deformasi orde ke-m*.

Definisi 5

Jika solusi $\phi(x,t;q)$ dari persamaan deformasi orde-nol $\mathcal{E}(q)$:$\mathcal{E}_0 \sim \mathcal{E}_1$ ada dan analitik di dalam $q \in [0,1]$, maka diperoleh solusi deret homotopi dari persamaan asli $\mathcal{E}_1$:

$$u(x,t) = U_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} U_m\,(x,t) \tag{2.6}$$

Dan *aproksimasi homotopi orde ke-m*

$$u(x,t) \approx U_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} U_m\,(x,t) \tag{2.7}$$

2.5 Parameter Kontrol Kekonvergenan (Liao, 2012)

Karena pada deret Maclaurin tidak ada jaminan bahwa deret konvergen pada $q = 1$ melainkan hanya asumsi, sehingga Liao memodifikasi konsep homotopi dengan memperkenalkan $\hbar$ sebagai parameter kontrol kekonvergenan yang membangun persamaan deformasi orde-nol sebagai berikut :

$$\mathcal{H}(x;q) = (1-q)[\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_0] - q\hbar[\mathcal{E}_1]$$

dengan $\hbar \neq 0$