II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan parsial suatu fungsi (yang diketahui) dengan dua atau lebih peubah bebas dinamakan persamaan diferensial parsial.

Persamaan diferensial parsial memegang peranan penting di dalam penggambaran keadaan fisis, di mana besaran-besaran yang terlibat di dalamnya berubah terhadap ruang dan waktu. Di dalam pembahasan tentang persamaan diferensial biasa, variabel bebas yang terlibat dalam masalah hanya satu, sedangkan untuk persamaan diferensial parsial variabel bebas berjumlah lebih dari satu.

Ordo turunan tertinggi dinamakan ordo persamaan tersebut. Baik persamaan diferensial biasa maupun parsial dapat digolongkan sebagai linier atau taklinier. Sebuah persamaan diferensial disebut linier apabila persamaan itu berderajat satu dalam peubah biasanya dan turunan parsialnya. (hasil kali tidak dibolehkan). Bila tidak memenuhi syarat ini, persamaan tersebut adalah taklinier. Jika setiap suku persamaan demikian ini mengandung peubah tak bebasnya atau salah satu dari turunannya, maka persamaan itu dikatakan

homogen. Dan bila tidak, maka persamaan itu dikatakan tak homogen.

Bentuk umum dari persamaan diferensial parsial ini adalah:

$$\sum_{i=1}^{N} A_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{N} B_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + Cf + D = 0 \tag{2.1}$$

Orde dari persamaan diferensial parsial ini adalah turunan tertinggi yang muncul pada persamaan diferensial parsial tersebut.

- Persamaan diferensial orde 1

$$\frac{\partial C}{\partial x} - a \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \tag{2.2}$$

- Persamaan diferensial orde 2

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + Dc \frac{\partial C}{\partial y} = 0 \tag{2.3}$$

- Persamaan diferensial orde 3

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.4}$$

Selanjutnya, persamaan diferensial parsial juga dibagi menjadi tiga jenis, yaitu persamaan diferensial eliptik, parabolik, dan hiperbolik. Misal, diberikan suatu persamaan diferensial parsial orde dua dalam variable ruang *x* dan waktu *t*,

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0 \tag{2.5}$$

di mana *A*, *B* dan *C* merupakan fungsi dari *x* dan *t*, sedangkan *D* adalah fungsi dari *u* dan derivative $\frac{\partial u}{\partial x}$ dan $\frac{\partial u}{\partial t}$, serta *x* dan *t*. Yang membedakan atas tiga kelas persamaan diferensial parsial tersebut adalah pada nilai diskriminan $B^2 - 4AC$ pada persamaan (2.5) tersebut.

a. Persamaan diferensial parsial dikatakan **persamaan hiperbolik** jika nilai diskriminan $B^2 - 4AC > 0$ (2.6)

   Salah satu contoh persamaan hiperbolik adalah pada persamaan gelombang

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.7)$$

b. Persamaan diferensial parsial dikatakan **persamaan parabolik** jika nilai diskriminan $B^2 - 4AC = 0$ (2.8)

   Salah satu contoh persamaan parabolik adalah pada persamaan difusi dalam bentuk $\frac{\partial u}{\partial t} - k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (2.9)

c. Persamaan diferensial parsial dikatakan **persamaan eliptik** jika nilai diskriminan $B^2 - 4AC < 0$ (2.10)

   Salah satu contoh persamaan eliptik adalah pada persamaan Laplace dalam bentuk $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (2.11)

(Farlow, 1982)

2.2 Persamaan Difusi

Misalkan sebuah tabung atau pipa berisi cairan yang tidak bergerak dan sebuah substansi kimia yang berdifusi di dalam cairan. Substansi kimia tersebut bergerak dari daerah yang memiliki konsentrasi tinggi ke daerah yang memiliki konsentrasi lebih rendah. Kecepatan gerak dari substansi kimia tersebut proporsional terhadap gradien konsentrasi. Misal *u(x,t)* adalah konsentrasi (massa per satuan panjang) dari substansi kimia tersebut pada posisi-*x* dari pipa pada saat-*t*.

Pada bagian pipa dari x_0 sampai x_1 (lihat gambar 1), massa dari substansi kimia tersebut adalah

$M\ (t) = \int_{x_0}^{x_1} u\ (x,t)\ dx$, sehingga $\frac{dM}{dt} = \int_{x_0}^{x_1} u_t\ (x,t)\ dx.$ (2.12)

x_0 x_1

Gambar 1. Difusi substansi kimia dalam pipa

Massa pada bagian ini tidak dapat berubah kecuali oleh adanya perubahan pada aliran masuk (*flowing in*) atau aliran keluar (*flowing out*). Dengan menggunakan Fick's Law,

$\frac{dM}{dt}$ = aliran masuk – aliran keluar = $-ku_x\ (x_0,t) - [-ku_x\ (x_1,t)]$. (2.13)

dengan *k* adalah konstan. Dengan demikian persamaan (2.12) dan persamaan (2.13) sama dengan :

$\int_{x_0}^{x_1} u_t\ (x,t)\ dx = ku_x\ (x_1,t) - ku_x\ (x_0,t).$ (2.14)

ruas kanan pada persamaan (2.14) sama dengan $k \int_{x_0}^{x_1} u_{xx}\ (x,t)\ dx$ sehingga persamaan (2.14) dapat ditulis menjadi

$u_t = ku_{xx}$ (2.15)

Persamaan di atas merupakan persamaan difusi untuk kasus ruang dimensi 1. Persamaan difusi atau bisa disebut juga dengan persamaan panas adalah contoh lain dari persamaan diferensial parsial.

Konduksi panas diilustrasikan dalam persamaan difusi dengan $u(x,t)$ didefinisikan sebagai temperatur pada posisi-*x* dan waktu-*t* (Riancelona, 2007).

2.3 Persamaan Konveksi Difusi

Misalkan pada reservoir dengan panjang *x* dan ketebalan *y* kemudian dilakukan injeksi uap dengan temperatur tertentu dan kecepatan *V*. Pada saat injeksi uap dilakukan, terjadi konveksi di dalam reservoir sehingga panas yang dihasilkan oleh uap tersebut akan berpindah ke minyak. Panas tersebut akan mengurangi viskositas dari minyak tersebut agar mudah terangkat. Bersamaan dengan itu, uap tersebut akan kehilangan panas yang disebut dengan konduksi. Dengan demikian, temperatur dari uap yang diinjeksikan tersebut akan semakin menurun hingga pada nantinya akan sama dengan temperatur reservoir.

Pada reservoir ini, konduksi panas yang bisa diilustrasikan dalam persamaan difusi yang dijelaskan sebelumnya sedangkan konveksi yang merupakan perpindahan dari minyak, air dan uap dari reservoir ke arah sumur produksi diilustrasikan dengan persamaan $V\frac{\partial u}{\partial x}$ sehingga persamaan konveksi dan konduksi panas yang terjadi saat injeksi uap tersebut dapat diilustrasikan dalam persamaan

$$\frac{\partial u}{\partial t} + V\frac{\partial u}{\partial x} = D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ,\ 0 < x < \infty \qquad (2.16)$$

dengan $u\ (x,t)$ mendefinisikan temperatur pada posisi-*x* dan waktu-*t*.

Persamaan di atas adalah persamaan konveksi difusi (*Convection Difusion Equation – CD Equation)* atau bisa juga disebut *advection difusion equation*

atau *transport equation.* Persamaan konveksi difusi ini juga merupakan salah satu contoh persamaan difensial parsial yang memiliki banyak aplikasi. Persamaan diferensial parsial adalah suatu bentuk persamaan matematika yang mengandung satu atau lebih operator diferensial parsial pada variable bebas dari suatu fungsi peubah banyak (Riancelona, 2007).

2.4 Metode Analisis Homotopi (HAM)

Metode analisis homotopi (HAM) pertama kali dirancang pada tahun 1992 merupakan teknik semianalitis untuk memecahkan masalah taklinear biasa atau persamaan diferensial parsial.

Metode analisis homotopi (HAM) didasarkan pada konsep topologi dan diferensial geometri untuk menghasilkan kekonvergenan deret dari sistem taklinear. Homotopi menjelaskan semacam variasi deformasi dalam matematika. Sebagai contoh, sebuah lingkaran dapat dideformasikan secara kontinu menjadi elips dan bentuk dari cangkir kopi dapat dideformasikan secara kontinu menjadi bentuk donat. Pada intinya, homotopi didefinisikan sebagai penghubung antara benda yang berbeda dalam matematika yang memiliki karakteristik yang sama di berbagai aspek.

Akan ditunjukkan konsep dasar dari HAM, dengan menggunakan persamaan diferensial :

$N[u(x,t)] = 0$

di mana N merupakan operator taklinear, $\boldsymbol{x}$ dan $\boldsymbol{t}$ dinotasikan sebagai variable bebas dan $\boldsymbol{u}$ adalah suatu fungsi yang tidak diketahui.

$C[a,b]$ dinotasikan sebagai himpunan fungsi real kontinu dalam interval $a \leq x \leq b$. Secara umum, jika suatu fungsi $f \in C[a,b]$ dapat dideformasikan secara kontinu ke fungsi kontinu $g \in C[a,b]$ lain, maka dapat terbentuk suatu homotopi

$H : f(x) \sim g(x)$

$$H\ (x;q)\ : (1-q)\ [\ g(x) - \ f(x)] - q[g(x)], q \in [0,1] \qquad (2.17)$$

Definisi 1 :

Suatu homotopi dua fungsi yang kontinu $f(x)$ dan $g(x)$ dari suatu ruang topologi X ke ruang topologi Y dinotasikan sebagai fungsi $H : X \times [0,1] \to Y$ dari produk ruang X dengan interval [0,1] ke Y sedemikian sehingga jika $x \in X$ maka $H\ (x;0) = f(x)\ \ dan\ \ H\ (x;1) = g(x)$.

Definisi 2 :

Parameter pelengkap $q \in [0,1]$ di dalam suatu fungsi atau persamaan homotopi disebut parameter homotopi.

Definisi 3 :

Diberikan suatu persamaan ε_1 , yang mempunyai paling sedikit satu solusi u. Ambil ε_0 sebagai persamaaan awal yang solusinya diketahui u_0. Persamaan homotopi $\varepsilon\ (q) :\ \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ dengan parameter homotopi $q \in [0,1]$ naik dari 0 menuju 1, $\varepsilon\ (q)$ dideformasikan secara kontinu dari solusi yang diketahui u_0

dari ε_0 ke solusi yang tidak diketahui u dari ε_1. Jenis dari persamaan homotopi ini disebut persamaan deformasi orde nol.

Definisi 4 :

Diberikan sebuah persamaan taklinear dinotasikan oleh ε, yang paling tidak memiliki satu solusi $u(x,t)$, di mana *x* dan *t* merupakan variable bebas.

$q \in [0,1]$ menunjukkan parameter homotopi dan $\varepsilon\,(q)$ menunjukkan persamaan deformasi orde nol, yang menghubungkan persamaan asli ε, dan persamaan awal ε_0 dengan kondisi awal yang diketahui $u_0(x,t)$.

Asumsikan bahwa persamaan orde nol $\varepsilon\,(q)$ memiliki solusi analitik di q = 1, sehingga diperoleh homotopi deret Maclaurin :

$$\varphi(x,t;q) \sim u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m\,(x,t)q^m\,, q \in [0,1] \qquad (2.18)$$

dan deret homotopi

$$\varphi(x,t;1) \sim u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m\,(x,t) \qquad (2.19)$$

Persamaan yang berhubungan dengan $u_m(x,t)$ yang nilainya tidak diketahui disebut persamaan deformasi orde ke-*m.*

Definisi 5 :

Jika solusi $\varphi(x,t;q)$ dari persamaan deformasi orde nol $\varepsilon(q)$: $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_1$ ada dan analitik di $q \in [0,1]$, maka diperoleh solusi deret homotopi dari persamaan asli ε_1 :

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{+\infty} u_m\,(x,t) \qquad (2.20)$$

dan aproksimasi homotopi orde ke-*m* :

$$u(x,t) \approx u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{M} u_m(x,t) \tag{2.21}$$

(Liao, 2012)

Berdasarkan definisi dari HAM, dapat dibentuk suatu persamaan yang disebut dengan persamaan deformasi orde-nol

$$H(x,t) = (1-q)L[\phi(x,t\,;q) - u_0(x,t)] - qhN[\phi(x,t\,;q)] \tag{2.22}$$

di mana $q \in [0,1]$ merupakan parameter pelengkap, $h \neq 0$ merupakan parameter kontrol kekonvergenan, $\boldsymbol{L}$ adalah operator linear pelengkap, $\phi(x,t\,;q)$ adalah fungsi yang tidak diketahui, $u_0(x,t)$ adalah kondisi awal dari $u\,(x,t)$ dan $H\,(x,t)$ dinotasikan sebagai fungsi pelengkap yang taknol. Hal ini jelas bahwa ketika parameter pelengkap $q = 0$ dan $q = 1$ pada persamaan (2.22) menjadi :

$$\phi(x,t\,;0) = u_0(x,t),$$

$$\phi(x,t\,;1) = u(x,t). \tag{2.23}$$

Jadi saat q naik dari 0 ke 1, solusi $\phi(x,t\,;q)$ bervariasi dari penduga awal $u_0(x,t)$ ke solusi $u(x,t)$. Dengan menjabarkan $\phi(x,t\,;q)$ dalam deret Taylor dengan memperhatikan q, maka terdapat

$$\phi(x,t\,;q) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t)q^m \tag{2.24}$$

di mana

$$u_m(x,t) = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m \phi(x,t\,;q)}{\partial q^m}\bigg|_{q=0} \tag{2.25}$$

kekonvergenan dari deret pada persamaan (2.24) tergantung pada parameter pelengkap h. Jika ini konvergen saat $q = 1$, maka terdapat :

$$u(x,t) = u_0(x,t) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x,t) \tag{2.26}$$

yang mana satu dari solusi-solusinya adalah pada persamaan taklinear awal (Gupta, 2012).

2.5 Parameter Kontrol Kekonvergenan

Karena pada deret Maclaurin tidak ada jaminan bahwa deret konvergen pada $q = 1$ melainkan hanya asumsi, sehingga Liao memodifikasi konsep Homotopi dengan memperkenalkan h sebagai parameter kontrol kekonvergenan.

h membangun persamaan deformasi orde-nol sebagai berikut:

$$H(x,q) = (1-q)\,[\varepsilon_1 - \varepsilon_0] - qh[\varepsilon_1] \;\; ; \;\; h \neq 0 \tag{2.27}$$

(Liao, 2012)

2.6 Konsep Deret Taylor dan Deret Maclaurin

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memiliki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial.

Misalkan *f(x)* adalah suatu fungsi sebarang yang dapat dinyatakan sebagai suatu deret pangkat sebagai berikut :

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots \tag{2.28}$$

dengan c_n, $n = 1, 2, 3, \ . \ . \ .$ menyatakan koefisien deret pangkat dan a menyatakan titik pusatnya.

Fungsi *f(x)* pada persamaan (2.28) dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ . \ . \ . \qquad (2.29)$$

maka deret di atas disebut dengan deret Taylor dari fungsi *f(x)* yang berpusat di a. Oleh karena itu, deret pangkat dari $(x-a)$ yang menggambarkan sebuah fungsi dinamakan **Deret Taylor.** Dan apabila $a = 0$, maka deret tersebut dinamakan **Deret Maclaurin** (Kreyzig, 1998)**.**