INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT SATU

(Skripsi)

Oleh

KHOWASHIYAH SYAFITRI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

INTEGRAL RIEMANN IN FIRST DIFFERENCE SEQUENCE

By

KHOWASHIYAH SYAFITRI

The Riemann integral is defined as a function in the domain in the form of a closed and finite interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$ as the area under the curve of the function. . The function that has a real number value in the Riemann integral is replaced with a function that has a value of one-level difference sequence or can be denoted by $\bar{f} \in \ell_1(\Delta)$. In this study, it will be presented about Riemann integral in first difference sequence. In this case, a function in $\mathbb{R}$ on Riemann integral was replaced by a function in first difference sequence. Thus, obtained condition that fulfill a function in first difference sequence can be integrated Riemann. Furthermore, an example is given as an application.

Keywords: *Riemann integral, difference sequence* $\ell_1(\Delta)$.

ABSTRAK

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT SATU

Oleh

KHOWASHIYAH SYAFITRI

Integral Riemann didefinisikan sebagai suatu fungsi pada domain berupa interval tertutup dan terbatas $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sebagai luas daerah di bawah kurva dari fungsi tersebut. Fungsi yang bernilai bilangan real pada integral Riemann diganti dengan fungsi yang bernilai barisan selisih tingkat satu atau dapat dinotasikan dengan $\bar{f} \in \ell_1(\Delta)$. Pada kajian ini akan disajikan tentang integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu serta sifat-sifat dasarnya. Sehingga, diperoleh syarat yang memenuhi suatu fungsi bernilai barisan selisih tingkat satu dapat terintegral Riemann. Selanjutnya, diberikan contoh sebagai bentuk penerapannya.

Kata kunci: integral Riemann, barisan selisih tingkat satu $\ell_1(\Delta)$.

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT SATU

Oleh

KHOWASHIYAH SYAFITRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar

SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2023

Judul Skripsi : **INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT SATU**

Nama Mahasiswa : **Khowashiyah Syafitri**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1917031018**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**
NIP 19720227 199802 1 001	NIP 19760411 200012 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	**: Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	**: Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	**: Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 Mei 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: **Khowashiyah Syafitri**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031018**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT SATU**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 Mei 2023

Penulis,

10000 METERAI TEMPEL 9CB83AJX321211899

Khowashiyah Syafitri

NPM 1917031018

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Khowashiyah Syafitri lahir di Seputih Mataram pada tanggal 16 Januari 2001. Penulis merupakan anak kedua dari dua bersaudara pasangan Bapak Sularno dan Ibu Robaniah. Pada tahun 2006-2007, penulis memulai pendidikan di TKS 01 Gula Putih Mataram. Setelah itu melanjutkan pendidikan tingkat dasar di SDS 01 Gula Putih Mataram pada tahun 2007-2013. Pada tahun 2013-2016, penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMPS 01 Gula Putih Mataram. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah atas di SMAS Sugar Group Bandar Mataram pada tahun 2016-2019. Pada tahun 2019 melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN), penulis diterima dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila).

Dalam rangka menerapkan ilmu yang telah dipelajari dan meningkatkan pengetahuan dalam dunia kerja, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari terhitung dari tanggal 4 Januari sampai 12 Februari 2022 di Badan Pengelolaan Pajak dan Retribusi Daerah (BPPRD) Kota Metro serta dapat menyelesaikan Laporan Kerja Praktik yang berjudul “Peramalan Realisasi Pajak Hotel di Kota Metro Menggunakan Metode ARIMA-Box Jenkins” dengan baik. Kemudian, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Pekon Sinar Semendo, Kecamatan Talang Padang, Kabupaten Tanggamus selama 40 hari terhitung dari tanggal 27 Juni sampai 5 Agustus 2022 sebagai salah satu bentuk pengabdian mahasiswa dan menjalankan Tri Dharma Perguruan Tinggi Universitas Lampung.

KATA INSPIRASI

"Menuntut ilmu itu wajib bagi setiap umat muslim."

(H.R. Ibnu Majah)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Q.S. Al-Baqarah: 286)

"Dan barang siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya."

(Q.S. At-Talaq: 4)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirah: 5)

"Keberhasilan bukanlah milik orang yang pintar, namun keberhasilan adalah milik orang yang senantiasa berusaha."

(B.J. Habibie)

"The important thing in life is not the triumph but the struggle."

(Pierre de Coubertin)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji dan syukur saya haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas nikmat dan karunia-Nya, shalawat serta salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya ini kepada:

Bapak dan Ibu

Orang tua tercinta Bapak Sularno dan Ibu Robaniah atas doa, dukungan, dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat dan membesarkan penulis sampai saat ini.

Kakak

Meisita Sari yang selalu menjadi penyemangat.

Para pendidik, guru, dan dosen yang telah senantiasa memberikan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan kebahagiaan, dan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul “Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Satu” disusun untuk memenuhi salah satu syarat guna memeroleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, saran, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, saran, dan dukungan kepada penulis.
3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Alm. Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis agar dapat lebih baik lagi.
5. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc. selaku Pembimbing Akademik penulis.
6. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Seluruh Dosen dan Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
9. Bapak dan Ibu yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
10. Kakak yang selalu menyemangati, menemani, dan memberikan motivasi kepada penulis.
11. Annisa ‘Amali Shoolihah dan Eny Retno Suryani yang selalu bersedia menjadi tempat berkeluh kesah dan memotivasi agar tetap konsisten dalam pengerjaan skripsi ini.
12. Refnita Magna Ananda, Fitri Wulandari, dan Eccha Nanda Putri yang selalu memberikan semangat dan dukungan dalam pengerjaan skripsi ini.
13. Teman-teman angkatan 2019 Jurusan Matematika dan teman-teman KKN Pekon Sinar Semendo.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 23 Mei 2023
Penulis,

Khowashiyah Syafitri
NPM 1917031018

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Kemajuan ilmu pengetahuan dan teknologi saat ini memengaruhi salah satu aspek, yaitu ilmu matematika yang berperan penting dalam prosesnya. Teori matematika digunakan sebagai landasan pemikiran, bahan pertimbangan, dan pengambilan keputusan. Bidang kajian matematika yaitu kalkulus diantaranya membahas tentang fungsi-fungsi bernilai real dan vektor. Konsep tersebut telah dikembangkan dan diterapkan dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya adalah integral.

Pertama kali integral dikemukakan oleh Isac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz pada akhir abad ke-17. Disebutkan bahwa integral sebagai anti turunan yaitu suatu bentuk operasi pengintegralan fungsi yang menghasilkan fungsi baru. Tetapi, fungsi tersebut belum memiliki nilai pasti, sehingga bentuk integralnya dapat dikatakan integral tak tentu dari f dan dinotasikan dengan $\int f$. Selanjutnya, integral diteliti secara lebih mendalam oleh Benhard Riemann pada tahun 1850 dan ditemukannya konsep integral yang dikenal sebagai integral Riemann. Integral Riemann didefinisikan sebagai suatu fungsi pada domain berupa interval tertutup dan terbatas $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sebagai luas daerah di bawah kurva dari fungsi tersebut.

Dalam hal ini, fungsi yang bernilai bilangan real pada integral Riemann diganti dengan fungsi yang bernilai barisan selisih tingkat satu. Dapat dinotasikan dengan $\bar{f} = (f_1, f_2, f_3, \ldots, f_k) : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \ell_1(\Delta)$ dan $\bar{f} \in \mathcal{R}[a, b]$. Dikatakan

$\bar{f} \in \ell_1(\Delta)$ jika $\left\|\Delta\left(\mathcal{R}, \bar{f}\right)\right\|_{\ell_1} < \infty$. Penelitian ini akan difokuskan pada konsep integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu dan dikaji syarat-syarat yang memenuhi suatu fungsi di barisan selisih tingkat satu dapat terintegral Riemann pada $[a, b]$ serta diberikan contoh sebagai bentuk penerapannya.

1.2 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji dan menyusun konsep integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat penelitian ini adalah:

1. memahami dan mengaplikasikan konsep integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu;
2. dapat memberikan referensi untuk meneliti lebih lanjut mengenai konsep integral Riemann bernilai barisan selisih lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pustaka dan dasar teori yang dikaji untuk digunakan dalam pembahasan selanjutnya, diantaranya adalah fungsi dan limit, turunan fungsi, integral Riemann, barisan fungsi, ruang Banach, dan ruang barisan selisih.

2.1 Fungsi dan Limit

Diberikan terlebih dahulu konsep dasar fungsi yang diambil dari Bartle dan Sherbert pada tahun 2000. $f: A \to B$ merupakan fungsi dari A ke B. Dikatakan fungsi jika setiap anggota di A dipasangkan tepat satu dengan anggota di B. Selanjutnya, diberikan konsep dasar limit. Jika f adalah suatu fungsi, maka $\lim_{t \to c} F(t) = L$ jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sehingga jika $0 < |t - c| < \delta$ berlaku $|F(t) - L| < \varepsilon$ (Ayres,jr dan Mendelson, 2004). Berikut diberikan teorema dasar limit oleh Ayres,jr dan Mendelson, pada tahun 2004.

Teorema 2.1.1 (Ayres,jr dan Mendelson, 2004)
Misalkan $\lim_{x \to a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \to a} g(x) = M$, maka $f(x)$ dan $g(x)$ memiliki limit yaitu $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$.

Bukti:
Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Diketahui jika $\lim_{x \to a} f(x) = L$, maka $\exists \delta_1 > 0$ sehingga $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ apabila $0 < |x - a| < \delta_1$. Selain itu, diketahui jika $\lim_{x \to a} g(x) = M$, maka $\exists \delta_2 > 0$ sehingga $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$ apabila $0 < |x - a| < \delta_2$. Pilih $\delta =$

$m\ \langle \delta_1, \delta_2 \rangle$, maka untuk $0 < |x - a| < \delta$ dipenuhi $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ dan $|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sehingga, diperoleh

$$\left|\left(f(x) + g(x)\right) - (L + M)\right| = |(f(x) - L) - (g(x) - M)|$$
$$\leq |f(x) - L| + |g(x) - M| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka $\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = L + M$. ■

Teorema 2.1.2 (Ayres,jr dan Mendelson, 2004)

Misalkan $A \subset \mathbb{R}$ dan fungsi f kontinu di $c \in A$. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A$ memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Oleh karena itu, fungsi f kontinu pada A jika f kontinu di setiap $c \in A$.

Bukti:

Misalkan f kontinu di c. Ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. Anggap $V = (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ dan karena f kontinu di c, maka $\exists U_v$ dari c sehingga $f(x) \in V,\ \forall x \in U_v$. Pilih $\delta > 0$, sehingga $(c - \delta, c + \delta) \subset U_v$. Selanjutnya, untuk δ berlaku $f(x) \in V$, sehingga untuk $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Diberikan sebarang x_n barisan yang konvergen ke c dan ambil $\varepsilon > 0$ sebarang. $\exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $x \in A$ memenuhi $|x - c| < \delta$, maka $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Diketahui (x_n) konvergen ke c, maka $\exists N_0 \in N$, sehingga $|x_n - c| < \delta$ apabila $n \geq n_0$. Jadi, $\forall n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(c)| < \varepsilon$, sehingga $\left(f(x_n)\right)$ konvergen ke $f(c)$. Oleh sebab itu, fungsi f kontinu di c. ■

2.2 Turunan Fungsi

Menurut Stewart (2002), turunan fungsi f adalah f' yang memiliki nilai sebarang pada bilangan c adalah $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$ dengan syarat limit ini ada. Berikut diberikan teorema dasar turunan fungsi oleh Stewart pada tahun 2002 dan Darmawijaya pada tahun 2006.

Teorema 2.2.1 (Stewart, 2002)

Jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$, maka $f(x) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x-c),\ x \neq c$.

Sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned}\lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c}\left[f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot(x-c)\right]\\ &= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\cdot\lim_{x\to c}(x-c)\\ &= f(c) + f'(c)\cdot 0 = f(c).\end{aligned}$$ ■

Teorema 2.2.2 (Darmawijaya, 2006)

Diketahui fungsi $f: D_f \to \mathbb{R}$, fungsi $g: D_g \to \mathbb{R}$ dengan $\mathbb{R}_f \subset D_g, a \in D_f$ sebagai titik limit himpunan D_f dan $f(a)$ sebagai titik limit himpunan D_g. Jika $f'(a)$ dan $g'(a)$ ada, maka berlaku $(gof)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$.

Bukti:

Telah diketahui bahwa $g'\big(f(a)\big)$ dan $f'(a)$ ada, maka diperoleh

$$\begin{aligned}(gof)'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{(gof)(x)-(gof)(a)}{x-a}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{g\big(f(a)\big)-g\big(f(a)\big)}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\\ &= g'\big(f(a)\big)\cdot f'(a).\end{aligned}$$ ■

2.3 Integral Riemann

Berikut diberikan konsep dasar integral Riemann yang diambil dari Darmawijaya (2006). Misalkan $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas dan $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ partisi pada $[a,b]$ sedemikian sehingga $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ dan norm partisi

P yang dinyatakan dengan $\|P\|$ nilai terbesar di antara bilangan $(x_i - x_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n$, maka definisi jumlah Riemann pada fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ adalah

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \Delta x_i = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Bilangan real u disebut limit $S(f; P)$ untuk norm $\|P\| \to 0$ dan ditulis $\lim_{\|p\| \to 0} S(f; P) = u$ jika dan hanya jika $\forall \varepsilon > 0$ yang diberikan dan sebarang pengambilan titik $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $\exists \delta > 0$ untuk semua P pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku $|S(f; P - u)| < \varepsilon$. Selanjutnya, fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika nilai dari

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \Delta x_i$$

ada. Sehingga, berlaku

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f; P) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \Delta x_i = u.$$

Teorema 2.3.1 (Ayres, jr dan Mendelson, 2004)

Misalkan fungsi f kontinu pada interval $[a, b]$ dan misalkan $F(x) = \int f(x)$ yaitu F adalah anti turunan dari f, maka

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Bukti:

Diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang. Pilih $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ dari I sedemikian sehingga

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon.$$

Menurut teorema nilai rata-rata, pada setiap $[x_{k-1}, x_k]$, $\exists t_k \in (x_{k-1}, x_k)$ sedemikian sehingga

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = (x_k - x_{k-1})\, f(t_k).$$

Misalkan m_k dan M_k adalah infimum dan supremum dari f pada $[x_{k-1}, x_k]$, maka

$$m_k(x_{k-1}, x_k) \leq F(x_k) - F(x_{k-1}) \leq M_k(x_{k-1}, x_k).$$

Untuk tiap $k = 1, 2, 3, \dots, n$. Dengan menjumlahkan suku-suku di tengah, maka diperoleh

$$L(f;P) \leq F(b) - F(a) \leq U(f;P).$$

Selain itu, dimiliki

$$L(f;P) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(f;P)$$

yang berakibat

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \big(F(b) - F(a)\big)\right| < \varepsilon$$

yang berlaku untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka dapat disimpulkan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.3.2 (Stewart, 2002)

Andaikan bahwa f dan g terintegralkan pada $[a,b]$ dan bahwa k konstanta, maka k dan $f + g$ terintegralkan dan

i. $\int_a^b k\, f(x)\, dx = k\ \int_a^b f(x)\, dx,$

ii. $\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\, dx = \ \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx.$

Bukti:

i. Diketahui $f \in \mathbb{R}\,[a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ dan k merupakan konstanta. Jika $f \in \mathbb{R}\,[a,b]$, maka terdapat $A = \int_a^b f(x)\, dx$ dan $\delta > 0$, sehingga $\forall P$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(f;P) - A| < \varepsilon.$$

Jika P sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan sifat $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(kf;P) - A| = |(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(kf)(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}))P - A| < \varepsilon$$

$$= \left|\big((k)\textstyle\sum_{i=1}^{n}(f)(\alpha_i)(x_i, x_{i-1})\big)P - A\right| < \varepsilon,$$

karena k konstanta, maka

$$= k|(\textstyle\sum_{i=1}^{n}(f)(\alpha_i)(x_i, x_{i-1}))P - A| < \varepsilon$$

$$= k|S(f;P) - A| < \varepsilon$$

$$= k\int_a^b f(x)\, dx.$$

ii. Diketahui $f, g \in \mathbb{R}\,[a,b]$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $f \in \mathbb{R}\,[a,b]$, maka terdapat $A_1 = \int_a^b f(x)\, dx$ dan $\delta_1 > 0$, sehingga $\forall P_1$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(f;P_1) - A_1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan karena $g \in \mathbb{R}\,[a,b]$, maka $\exists A_2 = \int_a^b f(x)\,dx$ dan $\delta_2 > 0$, sehingga $\forall P_2$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berlaku

$$|S(P_2,f) - A_2| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dipilih $\delta = m\,\{\delta_1, \delta_2\}$, akibatnya jika P sebarang partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ yang berakibat

$|S(P,f+g) - (A_1 - A_2)| = |(P)\sum_{i=1}^{n}(f+g)\,(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - (A_1 - A_2)|$

$= |(P)\sum_{i=1}^{n} f\,(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) + g(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - (A_1 - A_2)|$

$= |(P)\sum_{i=1}^{n} f\,(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) + (P)\sum_{i=1}^{n} g\,(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - (A_1 - A_2)|$

$= |(P)\sum_{i=1}^{n} f\,(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - A_1| + |(P)\sum_{i=1}^{n} g\,(\alpha_i)(x_i,x_{i-1}) - A_2|$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Terbukti $(f+g) \in \mathbb{R}\,[a,b]$ dan $\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$ ■

2.4 Barisan Fungsi

Sebelum barisan fungsi dibahas lebih lanjut, diberikan konsep dasar dari barisan yang diambil dari Bartle dan Sherbert pada tahun 2000. Misal $\bar{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ adalah suatu barisan. Dapat didefinisikan sebagai suatu fungsi $\bar{x}$ yang daerah asalnya (*domain*) merupakan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan daerah hasilnya (*range*) termuat dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$. Nilai dari fungsi $\bar{x}$ pada $n \in \mathbb{N}$ membentuk suatu barisan yang dinotasikan dengan $\bar{x} = (x_n)$ yaitu $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Sebagai contoh, diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ dengan $n = 1, 2, 3, \dots$. Sehingga, $\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ merupakan barisan bilangan real.

Tanda kurung tersebut yang membedakan antara notasi barisan dan himpunan. Dapat diilustrasikan jika $\bar{x} = ((-1)^n; n \in \mathbb{N})$ adalah suatu barisan, maka unsur-unsur dalam barisannya ditulis secara berurutan dari kiri ke kanan, yaitu $\bar{x} = (-1, 1, -1, 1, \dots)$. Sedangkan, jika $\bar{x} = \{(-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$ adalah suatu himpunan, maka unsur-unsur dalam himpunannya dapat ditulis berurutan namun tidak dapat diulang yaitu $\bar{x} = \{-1,1\}$.

Berikutnya, akan dibahas mengenai barisan konvergen. Barisan bilangan real $\bar{x} = (x_n; n \in \mathbb{N})$ dikatakan konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ atau limit dari (x_n) adalah x, jika $\forall \varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N_0 sedemikian sehingga $\forall n \geq N_0$, maka $|x_n - x| < \varepsilon$. Barisan yang mempunyai limit disebut barisan konvergen yang dinyatakan dengan $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x$. Sedangkan, barisan yang tidak mempunyai limit disebut barisan divergen. Sebagai contoh, akan dibuktikan bahwa $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right) = 0$. Diberikan $\varepsilon > 0$. Terdapat $N_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$. Jika $n \geq N_0$, maka $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$, sehingga $\left|\frac{1}{n^2+1} - 0\right| = \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$.

Selanjutnya, diberikan konsep dasar barisan fungsi yang diambil dari Bartle dan Sherbert pada tahun 2000. Jika diketahui fungsi $(f_k): D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}$, maka diperoleh barisan (f_k) yang disebut barisan fungsi. D merupakan domain fungsi (f_k), $\forall k \in \mathbb{N}$, dan $\forall t \in D$ diperoleh barisan bilangan nyata $\big(f_k(t)\big)$. Berikut diberikan teorema dasar barisan fungsi yang diambil dari Bartle dan Sherbert pada tahun 2000.

Teorema 2.4.1 (Bartle dan Sherbert, 2000)

Barisan fungsi (f_k) konvergen ke suatu fungsi f pada A jika $\forall t \in A$ dan bilangan $\varepsilon > 0$, $\exists n = n(t, \varepsilon)$, sehingga $\forall k \geq n$ berakibat $|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$.

Contoh:

Diberikan $f_k(t) = \frac{t^k}{k}$. Barisan bilangan $\big(f_k(t)\big)$ konvergen ke 0 $\forall t \in [0,1]$, sebab $\forall t \in [0,1]$ berlaku $|f_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| = \frac{t^k}{k} < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$. Asalkan $k > \frac{1}{\varepsilon}$ atau $k \geq n$ dengan n merupakan bilangan asli pertama yang lebih besar daripada bilangan $\frac{1}{\varepsilon}$. Sehingga, n dapat dipilih hanya bergantung pada ε. Jadi, barisan fungsi (f_k) konvergen ke fungsi f pada $[0,1]$ dengan $f(t) = 0, \forall t \in [0,1]$. Dapat dipilih bilangan asli n yang hanya bergantung pada ε saja, tak bergantung pada $t \in [0,1]$, sehingga $\forall k \geq n$ dan $\forall t \in [0,1]$ berakibat $|f_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| < \varepsilon$.

2.5 Ruang Banach

Berikut diberikan konsep dasar ruang vektor terlebih dahulu. Menurut Anton (2000), misalkan V himpunan tak kosong yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar dimana $u, v, w \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sehingga V disebut ruang vektor jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $u + v \in V$ menunjukkan sifat tertutup pada penjumlahan.
2. $u + v = v + u$ menunjukkan sifat komutatif pada penjumlahan.
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ menunjukkan sifat asosiatif pada penjumlahan.
4. Ada sebuah vektor $0 \in V$ sehingga $0 + u = u + 0$ menunjukkan sifat identitas pada penjumlahan.
5. $\forall u \in V$ terdapat $(-u)$, sehingga $u + (-u) = (-u) + u$ menunjukkan sifat invers pada penjumlahan.
6. Jika α skalar dan sebarang vektor $u \in V$, maka $\alpha u \in V$.
7. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ menunjukkan sifat distribusi kiri perkalian skalar pada penjumlahan vektor.
8. $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$ menunjukkan sifat distribusi kanan perkalian vektor pada penjumlahan skalar.
9. $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$ menunjukkan sifat asosiatif pada perkalian.
10. Untuk sebarang bilangan real 1 dan $\forall u \in V$ berlaku $1u = u$ menunjukkan sifat identitas pada perkalian.

Berikutnya, akan diberikan konsep dasar ruang bernorm. Ruang linear dikatakan bernorm jika fungsi $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ memenuhi aksioma:

1. $\|x\| \geq 0, \forall x \in X$.
   $\|x\| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ untuk setiap skalar α dan $x \in X$.

3. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Sehingga, bilangan non negatif $\|x\|$ disebut norm vektor x dengan notasi $(X, \|\cdot\|)$ (Darmawijaya, 2007). Berikut diberikan juga teorema dasar ruang bernorm.

Teorema 2.5.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang bernorm terhadap norm $\|\cdot\|_p$ merupakan ruang barisan $\ell_p (1 \leq p < \infty)$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\bar{x} = (x_n), \bar{y} = (y_n) \in \ell_p$ dengan $1 \leq p < \infty$ dan skalar α.

Sehingga, diperoleh:

1. $\|\bar{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_n| \geq 0, \forall n$.

   $\|\bar{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_n| \geq 0, \forall n \Leftrightarrow \bar{x} = \{0\} = \tilde{0}$

2. $\|\alpha\bar{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \|x\|_p$

   Jelas bahwa $\|\alpha x\|_p < \infty$.

3. $\|\bar{x} + \bar{y}\|_p \leq \|\bar{x}\|_p + \|\bar{y}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa ℓ_p merupakan ruang linear dan norm $\|\cdot\|_p$ pada norm ℓ_p. Jadi, $(\ell_p, \|\cdot\|_p)$ ruang bernorm. ■

Selanjutnya, diberikan definisi dari barisan Cauchy. Barisan Cauchy adalah barisan (x_n) di ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$ jika $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall\, m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$ (Bartle dan Sherbert, 2000).

Contoh:

Misalkan $\left(\frac{1}{n}\right)$ merupakan barisan Cauchy. Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $n_0 \in \mathbb{N}$, maka $\forall\, m, n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ jika $m, n \geq n_0$, maka $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$. Tinjaulah

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Pilih $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$, sehingga jika $m, n \geq n_0$, maka

■

$$\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left|-\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m}+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}+\frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} = \frac{2}{\frac{2}{\varepsilon}} = 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Berikut diberikan teorema dasar barisan Cauchy yang diambil dari Bartle dan Sherbert pada tahun 2000.

Teorema 2.5.2 (Bartle dan Sherbert, 2000)

Barisan Cauchy merupakan barisan yang konvergen di dalam ruang bernorm $(X, \|\cdot\|)$.

Bukti:

Diberikan $(x_n) \in X$ dengan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\varepsilon < 0$, maka $\exists n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $d(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq \mathbb{N}$ yang berakibat $m, n \geq \mathbb{N}$ berlaku $d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x, x_n) < \varepsilon.$ ■

Dengan demikian, untuk setiap barisan Cauchy yang konvergen disebut sebagai ruang bernorm yang lengkap. Ruang bernorm yang lengkap merupakan definisi dari ruang Banach. Berikut ini diberikan teorema dasar ruang Banach yang telah dibuktikan oleh Darmawijaya pada tahun 2007.

Teorema 2.5.3 (Darmawijaya, 2007)

Ruang Banach dengan $1 \leq p < \infty, p \in \mathbb{R}$, maka $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)$.

Bukti:

Sudah terbukti $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right)$ merupakan ruang bernorm sehingga akan dibuktikan bahwa ruang bernorm itu lengkap. Akan ditunjukkan untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang barisan Cauchy $\bar{x}^{(j)} \subset \ell_p$.

1. $\bar{x}^{(j)} = \left(x_n^{(j)}\right) = \left(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \ldots\right)$.

   Untuk sebarang $\varepsilon > 0$, $\exists n_0$, sehingga $\forall i, j \geq n_0$ berlaku.

2. $\left\| \bar{x}^{(i)} - \bar{x}^{(j)}\right\|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{n=1}^{\infty} \left| x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$.

Hal ini mengakibatkan $\forall i, j > 0$ berlaku $\left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall n$ atau diperoleh barisan Cauchy $x_n^{(j)}, \forall n.$ Jadi, $\exists x_n$, sehingga $\lim_{j\to\infty} x_n^{(j)} = x_n$ atau $\lim_{j\to\infty} \left|x_n^{(j)} - x_n\right| = 0.$

3. $(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_n^{(j)} + x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$$= \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)} + x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

yang berarti $\bar{x} = (x_n) \in \ell_p$.

4. $\| \bar{x} - \bar{x}^{(j)}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{j\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|x_n - x_n^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$, maka barisan $\left(\bar{x}^{(j)}\right)$ konvergen ke $\bar{x}$.

Berdasarkan hasil (3) dan (4) terbukti bahwa barisan Cauchy $\left(\bar{x}^{(j)}\right) \subset \ell_p$ konvergen ke $\bar{x} = (x_n) \in \ell_p$ atau terbukti bahwa $\left(\ell_p, \|\cdot\|_p\right), 1 \le p < \infty$ merupakan ruang Banach. ■

2.6 Ruang Barisan Selisih

Sebelum ruang barisan selisih dipahami, terlebih dahulu diberikan konsep dasar ruang barisan. Diberikan ℓ_p yaitu koleksi semua barisan bilangan real, $\ell_p = \{\bar{x} = (x_n) : x_n \in \mathbb{R}\} \;\forall\, p \in \mathbb{R}$ dengan $1 \le p < \infty$ didefinisikan:

$$\ell_p = \left\{\bar{x} = (x_n) \in \mathbb{R} : (\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\} \quad \text{.......………(2.6.1)}$$

dan norm pada ℓ_p yaitu $\|\bar{x}\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$ (Darmawijaya, 2007). Sebagai contoh, $p = 1$ disubstitusikan ke persamaan 2.6.1, sehingga ruang barisan tingkat satu diperoleh $\ell_1 = \{\bar{x} = (x_n) \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty\}$ dan norm pada ℓ_1 yaitu $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$.

Selanjutnya, diberikan konsep dasar ruang barisan selisih yang diambil dari Kizmaz, 1981. Didefinisikan jika

$$\Delta_m \bar{x} = \Delta_m x_n = \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{n+m-i}\right), \forall n \in \mathbb{N} \ldots\ldots\ldots(2.6.2)$$

maka $\Delta_m \bar{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\bar{x} = (x_n)$. Sebagai contoh, $m = 1$ disubstitusikan ke persamaan 2.6.2, sehingga barisan selisih ke-1 terhadap barisan $\bar{x} = (x_n)$ adalah $\Delta\bar{x} = (x_{n+1} - x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Berikut diberikan contoh soal terkait barisan selisih ke-1.

Contoh:

Diberikan barisan $(x_n) = \left(\frac{1}{n^2}\right)$, $\forall n = 1,2,3,4, \ldots$ didefinisikan $(x_n) = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$. Akan dicari barisan selisih ke-1 sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{x} &= \left(\sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} x_{n+1-i}\right) \\
&= \left((-1)^0 \binom{1}{0} x_{n+1-0}\right) + \left((-1)^1 \binom{1}{1} x_{n+1-1}\right) \\
&= \left(1.\frac{1!}{(1-0)!0!}.x_{n+1}\right) + \left((-1).\frac{1!}{(1-1)!1!}.x_{n+0}\right) \\
&= (1.1.x_{n+1}) - (1.1.x_n) \\
&= (x_{n+1} - x_n) \\
&= ((x_{1+1} - x_1), (x_{2+1} - x_2), (x_{3+1} - x_3), \ldots) \\
&= ((x_2 - x_1), (x_3 - x_2), (x_4 - x_3), \ldots) \\
&= \left(\left(\frac{1}{4} - 1\right), \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9}\right), \ldots\right) \\
&= \left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{36}, -\frac{7}{144}, \ldots\right).
\end{aligned}$$

Sehingga, terbentuklah barisan selisih ke-1 yaitu $\Delta\bar{x} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{5}{36}, -\frac{7}{144}, \ldots\right)$.

Berikutnya, diberikan konsep dasar mengenai ruang barisan selisih tingkat satu delta satu. Substitusi $p = 1$ ke persamaan 2.6.1 dan $m = 1$ ke persamaan 2.6.2. Dengan menggabungkan kedua persamaan tersebut, didefinisikan ruang barisan selisih tingkat satu delta satu sebagai berikut

$$\ell_1(\Delta) = \{\bar{x} = (x_n) \subset \mathbb{R} : \Delta\bar{x} \in \ell_1\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.3)$$

terhadap norm

$$\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} = |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.4)$$

Dengan menggunakan persamaan 2.6.2, berikut perhitungan barisan selisih ke-1

$$\Delta\bar{x} = \left(\sum_{i=0}^{1}(-1)^i \binom{1}{i} x_{n+1-i}\right)$$

$$= \left((-1)^0 \binom{1}{0} x_{n+1-0}\right) + \left((-1)^1 \binom{1}{1} x_{n+1-1}\right)$$

$$= (1.1.x_{n+1}) + (-1.1.x_n)$$

$$= (x_{n+1} - x_n)$$

$$= \left((x_2 - x_1), (x_3 - x_2), (x_4 - x_3), \ldots, (x_{n+1} - x_n)\right) \ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.5)$$

dan dikatakan $\bar{x} \in \ell_1(\Delta)$ jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Delta x_n|^1 < \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.6)$$

Dikatakan ruang barisan selisih tingkat satu delta satu jika memenuhi syarat yaitu ruang linear, ruang bernorm, dan ruang Banach. Berikut diberikan bukti ruang barisan selisih tingkat satu delta satu memenuhi ketiga syarat tersebut yang diambil dari Adistiningtyas pada tahun 2020.

Pertama, akan ditunjukkan ruang barisan selisih $\ell_1(\Delta)$ merupakan ruang linear sebagai berikut:

$\forall \bar{x}, \bar{y} \in \ell_1(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\bar{x}, \Delta\bar{y} \in \ell_1$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|\right) < \infty$$

dan

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta y_n|\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|y_{n+1} - y_n|\right) < \infty.$$

Diperoleh

$$\Delta(\bar{x} + \bar{y}) = \Delta\bar{x} + \Delta\bar{y} \in \ell_1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n + \Delta y_n|\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x_{n+1} - x_n) + (y_{n+1} - y_n)|\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(x_{n+1} - x_n)|\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|(y_{n+1} - y_n)|\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta y_n|\right) < \infty.$$

Jadi $\tilde{x} + \tilde{y} \in \ell_1(\Delta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.6.7.a)$

$\forall \alpha$ skalar dan $\tilde{x} \in \ell_1(\Delta)$ diperoleh

$$\Delta(\alpha\bar{x}) = (\Delta\alpha x_n)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha(x_{n+1} - x_n)|\right)$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha||(x_{n+1} - x_n)|\right)$$

$$= |\alpha|(\sum_{n=1}^{\infty}|(x_{n+1} - x_n)|)$$
$$= |\alpha|(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|) < \infty \ldots\ldots\ldots\ldots (2.6.7.b)$$

Berdasarkan persamaan (2.6.7.a) dan (2.6.7.b) terbukti bahwa $\ell_1(\Delta)$ merupakan ruang linear.

Kedua, akan ditunjukkan ruang barisan selisih $\ell_1(\Delta)$ merupakan ruang bernorm terhadap norm $\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} = |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1$ sebagai berikut:

1. $\forall \bar{x} \in \ell_1(\Delta_1) \Leftrightarrow \Delta\bar{x} \in \ell_1$

$$\Leftrightarrow (\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|) = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|) < \infty.$$

   Selanjutnya,

$$\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} = |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1$$
$$= |x_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|) \geq 0$$
$$= |x_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|) \geq 0$$

   dan

$$\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} = |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1$$
$$\Leftrightarrow |x_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|) = 0$$
$$\Leftrightarrow |x_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|) = 0$$
$$\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } (\sum_{n=1}^{\infty}|x_{n+1} - x_n|) = 0, \forall\, n$$
$$\Leftrightarrow |x_1| = 0 \text{ dan } |x_2 - x_1| = 0, |x_3 - x_2| = 0, \ldots$$
$$\Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 - x_1 = 0, x_3 - x_2 = 0, \ldots$$
$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3, \ldots = 0$$
$$\Leftrightarrow \bar{x} = \{0\} = \bar{0}.$$

2. $\forall \alpha$ skalar dan $\bar{x} \in \ell_1(\Delta)$

$$\|\alpha\bar{x}\|_{(\Delta_1,1)} = |\alpha x_1| + \|\Delta\alpha\bar{x}\|_1$$
$$= |\alpha x_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha(x_{n+1} - x_n)|)$$
$$= |\alpha||x_1| + |\alpha|(\sum_{n=1}^{\infty}|(x_{n+1} - x_n)|)$$
$$= |\alpha|(|x_1| + \{\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|\})$$
$$= |\alpha|(|x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1)$$
$$= |\alpha|\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)}.$$

3. $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \ell_1(\Delta)$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_{(\Delta,1)} = |x_1 + y_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta(x_n + y_n)|)$$
$$= |x_1 + y_1| + (\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|) + (\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta y_n|)$$

$$\leq |x_1| + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta x_n|\right) + |y_1| + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\Delta y_n|\right)$$
$$= |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1 + |y_1| + \|\Delta\bar{y}\|_1$$
$$= \|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} + \|\bar{y}\|_{(\Delta,1)}.$$

Berdasarkan 1,2,3 terbukti bahwa $\ell_1(\Delta)$ merupakan ruang bernorm.

Ketiga, akan ditunjukkan ruang barisan selisih $\ell_1(\Delta)$ merupakan ruang bernorm yang lengkap sebagai berikut:

Diambil sebarang barisan Cauchy $\left(\bar{x}^{(i)}\right) = \left(\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}, \dots\right) \subset \ell_1(\Delta)$ dengan

$$\Delta\bar{x}^{(1)} = \left(\Delta x_1^{(1)}, \Delta x_2^{(1)}, \Delta x_3^{(1)}, \dots, \Delta x_n^{(1)}, \dots\right)$$
$$\Delta\bar{x}^{(2)} = \left(\Delta x_1^{(2)}, \Delta x_2^{(2)}, \Delta x_3^{(2)}, \dots, \Delta x_n^{(2)}, \dots\right)$$
$$\Delta\bar{x}^{(3)} = \left(\Delta x_1^{(3)}, \Delta x_2^{(3)}, \Delta x_3^{(3)}, \dots, \Delta x_n^{(3)}, \dots\right)$$
$$\vdots$$
$$\Delta\bar{x}^{(i)} = \left(\Delta x_1^{(i)}, \Delta x_2^{(i)}, \Delta x_3^{(i)}, \dots, \Delta x_n^{(i)}, \dots\right).$$

Diperoleh

$$\Delta\bar{x}^{(i)} = \left(\Delta x_n^{(i)}\right) = \left(\Delta x_1^{(i)}, \Delta x_2^{(i)}, \Delta x_3^{(i)}, \dots, \Delta x_n^{(i)}, \dots\right)$$
$$\Delta\bar{x}^{(j)} = \left(\Delta x_n^{(j)}\right) = \left(\Delta x_1^{(j)}, \Delta x_2^{(j)}, \Delta x_3^{(j)}, \dots, \Delta x_n^{(j)}, \dots\right)$$

dengan $\Delta\bar{x}^{(i)}, \Delta\bar{x}^{(j)} \in \ell_1(\Delta)$.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0$ sehingga $\forall i, j \geq n_0$ berlaku:

$$\left\|\bar{x}^{(i)} - \bar{x}^{(j)}\right\|_{(\Delta,1)} < \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \left|x_1^{(i)} - x_1^{(j)}\right| + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\Delta\left(x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right)\right|\right) < \varepsilon \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.6.8.a)$$

dilain pihak,

$$\Delta\left(\bar{x}^{(i)} - \bar{x}^{(j)}\right) = \Delta\left(x_1^{(i)} - x_1^{(j)}, x_2^{(i)} - x_2^{(j)}, x_3^{(i)} - x_3^{(j)}, \dots, x_n^{(i)} - x_n^{(j)}, \dots\right)$$
$$= \left(\left(x_2^{(i)} - x_2^{(j)}\right) - \left(x_1^{(i)} - x_1^{(j)}\right), \left(x_3^{(i)} - x_3^{(j)}\right) - \left(x_2^{(i)} - x_2^{(j)}\right), \dots\right)$$
$$= \left(\left(x_{n+1}^{(i)} - x_{n+1}^{(j)}\right) - \left(x_n^{(i)} - x_n^{(j)}\right)\right)$$
$$= \left(\left(x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)}\right) - \left(x_{n+1}^{(j)} - x_n^{(j)}\right)\right) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.6.8.b)$$

Berdasarkan persamaan (2.6.8.a) dan (2.6.8.b) diperoleh

$$\left|x_1^{(i)} - x_1^{(j)}\right| + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left(x_{n+1}^{(i)} - x_n^{(i)}\right) - \left(x_{n+1}^{(j)} - x_n^{(j)}\right)\right|\right) < \varepsilon.$$

$\forall i, j \geq n_0$ yang berakibat

$$\lim_{i,j\to\infty} \left| \left(x_{n+1}^{(i)} - x_{n+1}^{(j)} \right) - \left(x_n^{(i)} - x_n^{(j)} \right) \right| = 0$$

atau

$$\lim_{i,j\to\infty} \left| \bar{x}_1^{(i)} - \bar{x}_1^{(j)} \right| = 0, \lim_{i,j\to\infty} \left| \bar{x}_2^{(i)} - \bar{x}_2^{(j)} \right| = 0$$

$$\lim_{i,j\to\infty} \left| \bar{x}_3^{(i)} - \bar{x}_3^{(j)} \right| = 0, \lim_{i,j\to\infty} \left| \bar{x}_4^{(i)} - \bar{x}_4^{(j)} \right| = 0, \ldots$$

Jadi, barisan Cauchy $\left(\bar{x}_n^{(i)}\right)$ lengkap dan konvergen. Dibentuk

$$\bar{x}_1^{(i)} ----------\rightarrow x_1$$

$$\bar{x}_2^{(i)} ----------\rightarrow x_2$$

$$\bar{x}_3^{(i)} ----------\rightarrow x_3$$

$$\vdots$$

$$\tilde{x}_n^{(i)} ----------\rightarrow x_n$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}^{(i)} = \left(\bar{x}_n^{(i)}\right) ----------\rightarrow (x_n) = \bar{x}$$

Jadi, barisan $\bar{x}^{(i)}$ konvergen ke $\bar{x}$. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $\bar{x} \in \ell_1(\Delta)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \|\Delta\bar{x}\|_1 &= \left\|\Delta\bar{x} - \Delta\bar{x}^{(i)} + \Delta\bar{x}^{(i)}\right\|_{(\Delta,1)} \\ &\leq \left\|\Delta\bar{x} - \Delta\bar{x}^{(i)}\right\|_{(\Delta,1)} + \left\|\Delta\bar{x}^{(i)}\right\|_{(\Delta,1)} < \infty. \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} = |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1 < \infty$$

berakibat $\bar{x} \in \ell_1(\Delta)$.

Sehingga, barisan Cauchy $\left(\bar{x}^{(i)}\right) \subset \ell_1(\Delta)$ konvergen ke $\bar{x} \in \ell_1(\Delta)$. Berdasarkan langkah di atas terbukti bahwa $\ell_1(\Delta)$ lengkap dan $\ell_1(\Delta)$ merupakan ruang Banach. Berikut diberikan contoh barisan yang merupakan anggota dari ruang barisan selisih tingkat satu delta satu.

Contoh:

Diberikan suatu barisan $\bar{x} = \left(\frac{1}{k^2}\right) \in \ell_1(\Delta)$ sebagai berikut:

$$\left(\frac{1}{k^2}\right) = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}.$$

Akan dibuktikan barisan $\bar{x} = \left(\frac{1}{k^2}\right) \in \ell_1(\Delta)$.

Pertama, dicari barisan selisih ke-1, sehingga diperoleh

$$\Delta x_k = (x_{k+1} - x_k)$$

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\frac{1}{k^2}\right) &= \left\{\left(\frac{1}{4} - 1\right), \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{9}\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\left(-\frac{3}{4}\right), \left(-\frac{5}{36}\right), \left(-\frac{7}{144}\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\left(-\frac{3}{2^2}\right), \left(-\frac{5}{6^2}\right), \left(-\frac{7}{12^2}\right), \dots\right\} \\
&= \left\{\left(-\frac{3}{(1.2)^2}\right), \left(-\frac{5}{(2.3)^2}\right), \left(-\frac{7}{(3.4)^2}\right), \dots\right\} \\
&= \frac{-(2k+1)}{k^2(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\| &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-(2k+1)}{k^2(k+1)^2}\right|\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-2k}{k^2(k+1)^2} + \frac{(-1)}{k^2(k+1)^2}\right|\right) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{k(k+1)^2}\right|\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k^2(k+1)^2}\right|\right) < \infty
\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{k(k+1)^2}\right| < \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{k(k+1)^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k.k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{k^3} = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} \quad \text{...................(2.6.9.a)}$$

Akan ditunjukkan juga $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k^2(k+1)^2}\right|\right) < \infty$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{k^2(k+1)^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2.k^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \quad \text{..............................(2.6.9.b)}$$

Dari persamaan (2.6.9.a) dan (2.6.9.b) terbentuklah suatu deret $-p$ sebagai berikut:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

Deret ini merupakan deret tak hingga yang konvergen untuk $p > 1$.

Sehingga, diperoleh

$$\begin{aligned}
\|\bar{x}\|_{(\Delta,1)} &= |x_1| + \|\Delta\bar{x}\|_1 \\
&= \left|-\frac{3}{4}\right| + \left\|\Delta\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Jadi, terbukti bahwa barisan $\bar{x} = \left(\frac{1}{k^2}\right) \in \ell_1(\Delta)$. ■

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2022/2023 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan ialah studi pustaka, yaitu mempelajari jurnal dan buku terkait sebagai acuan dasar pada proses penelitian. Adapun langkah yang dilakukan dalam penelitian ini antara lain:

1. Membuktikan fungsi $\bar{f} \in \ell_1(\Delta)$ sebagai berikut:
   a. Mencari barisan selisih satu dari fungsi $\bar{f}$ dengan rumus $\Delta(\mathcal{R}, \bar{f}) = \Delta\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\int_a^b f_{k+1} - \int_a^b f_k\right)$.
   b. Membuktikan norm barisan selisih satu dari fungsi $\bar{f}$ konvergen yaitu $\left\|\Delta(\mathcal{R}, \bar{f})\right\|_{\ell_1} < \infty$.
2. Membuktikan fungsi $\bar{f}$ terintegral Riemann pada partisi $[a, b]$ dengan rumus $\left\|S(\bar{f}; P) - \bar{u}\right\|_{\ell_1(\Delta)} < \varepsilon$.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan terkait integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu, yaitu sebagai berikut.

1. Fungsi $\bar{f} = (f_k) : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \ell_1(\Delta)$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$, ditulis singkat dengan $\bar{f} \in \mathcal{R}[a, b]$ jika $\exists \bar{u} \in \ell_1(\Delta)$ sedemikian sehingga $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ dan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, maka berlaku $\left\|S(\bar{f}; P) - \bar{u}\right\|_{\ell_1(\Delta)} = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*) \Delta_i x - \bar{u}\right\|_{\ell_1(\Delta)} < \varepsilon$ dengan $\bar{u} = \int_a^b \bar{f} = \int_a^b \bar{f}(x)\, dx$.
2. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \ell_1(\Delta)$ terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika fungsi $(f_k): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = 1,2, \dots$ masing-masing terintegral Riemann pada $[a, b]$.
3. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \ell_1(\Delta)$ terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{\|P\| \to 0} S(\bar{f}; P) = \lim\limits_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*)\, \Delta x_i = \bar{u}$ dengan $\bar{u} = (u_k) \in \ell_1(\Delta), k = 1,2, \dots$.

5.2 Saran

Pembahasan skripsi ini hanya berfokus pada integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu, sehingga penulis menyarankan agar dilakukan penelitian pada barisan selisih yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Adistiningtyas, N. 2020. Transformasi Matriks Pada Ruang Barisan Selisih Tingkat Satu. Skripsi Jurusan Matematika FMIPA Unila. Bandar Lampung.

Anton, H. & Rorres, C. 2004. *Aljabar Linear Elementer*. Ed ke-8. Terjemahan Refina Indiasari, Irzam Harmein. Erlangga. Jakarta.

Ayres Jr, Frank dan Mendelson, Elliot. 2004. *Kalkulus*. Alih Bahasa Oleh Nur Danarjaya. Erlangga. Jakarta.

Bartle, R. G. & Sherbert, D. R. 2000. *Introduction to Real Analysis*. John Wilwey & Sons, Inc. Third Edition.

Berberian, S. K. 1996. *Fundamental of Real Analysis*. University of Texas. USA.

Darmawijaya, S. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada. Yogyakarta.

Gaughan, E. 1998. *Introduction to Analysis*. New Mexico State University. Mexico.

Kizmaz, H. 1981. On Certain Sequence Space. *Journals Canadian Mathematical Bulletin*. **24(2)**: 169-176.

Stewart, J. 2002. *Kalkulus*. Edisi Keempat, Jilid 1. Alih Bahasa I Nyoman Susila dan Hendra Gunawan. Erlangga. Jakarta.