BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

LIDWINA AMELIA
1917031024

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

Oleh

LIDWINA AMELIA

Graf bunga Mawar, $M(C_n)$ adalah graf terhubung yang dibangun oleh graf Siklus dengan titik-titik $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan n titik terisolasi $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dan menghubungkan setiap dua titik v_i, v_{i+1} dengan w_i, untuk $i = 1, 2, \ldots, n$ di mana $v_{n+1} = v_1$. Graf barbel bunga Mawar, dinotasikan dengan $B_{M(C_n)}$ adalah graf yang dibentuk dari dua graf bunga Mawar yang dihubungkan oleh suatu jembatan. Pada penelitian ini, dikaji tentang bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar dan barbelnya. Bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar, $\chi_L\big(M(C_n)\big)$ adalah 4 untuk $n \in \{3,4\}$ dan 5 untuk $n \geq 5$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Mawar, $\chi_L\big(B_{M(C_n)}\big)$ adalah 4 untuk $n = 3$ dan 5 untuk $n \geq 4$.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf bunga Mawar, graf barbel

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF ROSE GRAPH AND ITS BARBELL

By

LIDWINA AMELIA

The rose graph, $M(C_n)$ is a connected graph which constructed by the cycle C_n with vertices $v_1, v_2, \dots, v_n$ and n isolated vertices $w_1, w_2, \dots, w_n$ and then connecting every two vertices v_i, v_{i+1} with w_i, for $i = 1, 2, \dots, n$ where $v_{n+1} = v_1$. The barbell graph of rose graph, denoted by $B_{M(C_n)}$ is a graph formed from two rose graphs connected by a bridge. In the results, we determined the locating chromatic number of the rose graph and its barbell. The locating chromatic number of the rose graph, $\chi_L\big(M(C_n)\big)$ is 4 for $n \in \{3,4\}$ and 5 for $n \geq 5$. The locating chromatic number for the barbell of rose graph, $\chi_L\big(B_{M(C_n)}\big)$ is 4 for $n = 3$ and 5 for $n \geq 4$.

Keywords: locating chromatic number, rose graph, barbell graph

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA

Oleh

LIDWINA AMELIA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : **Lidwina Amelia**

Nomor Pokok Mahasiswa : **1917031024**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 197604112000122001

Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.
NIP. 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **24 Mei 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: **Lidwina Amelia**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031024**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 24 Mei 2023
Penulis,

Lidwina Amelia
NPM. 1917031024

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Lidwina Amelia lahir di Dayamurni pada 05 Mei 2001. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Julius Trisna Bani Sutopo dan Ibu Nurana.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Aisyiyah Bustanul Athfal I Dayamurni pada tahun 2006 sampai dengan 2007. Kemudian menempuh pendidikan Sekolah dasar (SD) di SD Negeri 1 Dayamurni pada tahun 2007 sampai dengan 2013. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Tumijajar pada tahun 2013 sampai dengan 2016. Selanjutnya ke Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Tumijajar pada tahun 2016 sampai dengan 2019. Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN) serta menjadi penerima Beasiswa Bidikmisi.

Pada tahun 2020 dan 2021 penulis aktif di Himpunan Mahasiswa Tingkat Jurusan atau HIMATIKA UNILA, penulis diamanahkan menjadi Anggota Bidang Keilmuan. Pada tahun yang sama, penulis diamanahkan sebagai Sekretaris Koordinator Divisi Olimpiade Matematika Dies Natalis Jurusan Matematika XXI (DINAMIKA XXI). Pada tahun 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Departemen PPIC Processed Pineapple PT. Great Giant Pineapple sebagai aplikasi bidang ilmu di dunia kerja. Pada tahun yang sama, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Tanjung Aji Kecamatan Melinting, Kabupaten Lampung Timur, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

"... Dan Allah beserta orang-orang yang sabar."

(Q.S Al-Baqarah: 249)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Q.S Al-Baqarah: 286)

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan."

(Q.S Al-Insyirah: 6)

"Semua akan terlihat tidak mungkin sampai kau selesai melakukannya."

(Nelson Mandela)

"Do the best and be your best."

(Motto hidup)

"*Jangan bandingkan hasil yang kau capai dengan hasil yang dicapai oleh orang lain. Cukup fokus pada proses yang sedang kau jalani dan lakukan sebisamu sebaik mungkin."*

"Tidak mungkin ada hasil, kecuali ada usaha."

(Lidwina Amelia)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulilah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat serta hidayahnya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Rasa syukur dan bahagia saya persembahkan karya ini kepada:

Bapak Julius Trisna Bani Sutopo dan Ibu Nurana

Terima kasih kepada kedua orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridho kalian serta dukungannya selama ini. Terima kasih telah memberikan pelajaran berharga tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa manjadi orang yang bermanfaat bagi semua orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Keluarga dan Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman, semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala nikmat dan karunia-Nya yang tak terhingga sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **"BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MAWAR DAN BARBELNYA"**. Dalam penulisan skripsi ini tidak dapat terselesaikan tanpa adanya bimbingan, bantuan dan dukungan dari berbagai pihak. Sehingga, dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing I dan dosen pembimbing akademik yang senantiasa membimbing, memberi masukan, saran serta mendukung penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing II memberikan bimbingan, pengarahan, serta saran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc. selaku dosen penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun sehingga skripsi ini dapat terselesaikan.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff, karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Kedua orang tuaku, Bapak dan Ibu yang selalu mendukung, menemani, memberikan motivasi, mendoakan, serta memberikan semangat sehingga menguatkan penulis dalam menjalani setiap proses meraih gelar sarjana.

8. Terima kasih untuk diri sendiri yang telah berjuang, berproses, dan bertahan hingga dapat menyelesaikan skripsi.
9. Untuk kedua adikku Agung Nugroho dan Putri Damayanti, serta teh Antika, Via, mas Rohmad, beserta keluarga besar yang selalu memberikan dukungan kepada penulis serta doa-doanya.
10. Untuk Pitdes, Prii, Gusti, Listra, Puput, yunda Riska, yunda Silvi, yunda Listia, Rizki, bang Maul, bang Robby, dan bang Wahyu yang selalu mendoakan, memberikan semangat, motivasi, pengertian, pencerahan, serta mendengarkan keluh kesah penulis.
11. Teman-teman Matematika 2019 dan teman kelas A serta Abang Yunda yang telah membantu serta memberikan semangat kepada penulis yang tidak dapat disebutkan satu persatu.
12. Orang-orang baik yang namanya tidak dapat saya sebutkan satu persatu yang telah menjadi bagian teman terbaik penulis yang selalu memberikan semangat dan menemani penulis dalam keadaan apapun serta telah memberikan pengalaman dan banyak cerita selama masa perkuliahan.

Penulis menyadari bahwa masih banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, penulis mengharapkan masukan serta saran untuk dijadikan pelajaran kedepannya.

Bandar Lampung, 24 Mei 2023
Penulis,

Lidwina Amelia

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Graf merupakan kumpulan objek terstruktur di mana beberapa pasangan objeknya memiliki hubungan atau keterkaitan tertentu. Leonhard Euler, seorang matematikawan asal Swiss, diperkirakan sebagai orang yang pertama kali menulis artikel ilmiah di bidang teori graf pada tahun 1736. Artikel berjudul "*Seven Bridge of Konigsberg*" yang ditulisnya membahas permasalahan ada atau tidaknya struktur (saat ini dikenal dengan sirkuit Euler) pada graf yang terbentuk dari keterhubungan daratan kota Konigsberg dan pulau kecil di tengah sungai Pregel yang dihubungkan oleh tujuh jembatan (Sugeng dkk., 2014).

Pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi merupakan salah satu topik yang menarik untuk dipelajari dalam teori graf. Munculnya konsep bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik. Dimensi partisi merupakan pengembangan dari dimensi metrik. Konsep dimensi metrik pertama kali dicetuskan oleh Slater pada tahun 1975 dan dikembangkan oleh Melter dan Harary pada tahun 1976. Dimensi metrik adalah banyak anggota minimum dari himpunan pembeda dari representasi suatu titik terhadap jarak-jaraknya (Chartrand, 1998).

Konsep bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi ditentukan berdasarkan banyaknya minimum warna yang digunakan dalam perwarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda untuk setiap titik pada graf tersebut. Bilangan kromatik lokasi dinotasikan dengan

$\chi_L(G)$ (Chartrand, 2002). Pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi telah banyak dipelajari. Chartrand dkk., berhasil mengkonstruksi graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi yang bervariasi dari 3 sampai $(n-1)$, pada tahun 2003.

Pada tahun 2011, Asmiati dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi pada graf bintang seragam. Kemudian di tahun 2012, Asmiati dkk., berhasil mendapatkan bilangan kromatik lokasi dari graf kembang api dan mengkarakterisasi bilangan kromatik lokasi berbilangan tiga dari graf Siklus. Selanjutnya pada tahun 2017, Asmiati dkk., mengkaji bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Asmiati dkk., juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi *disjoint union* dari beberapa graf bintang ganda, pada tahun 2019.

Kajian mengenai bilangan kromatik lokasi telah banyak berkembang. Pada tahun 2021, Irawan dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari barbel graf origami untuk $n \geq 3$. Pada tahun yang sama, Damayanti dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi lintasan yang dimodifikasi dengan siklus, Prawinasti dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf split Siklus, serta Asmiati dkk., berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf *shadow path* dan graf barbel yang memuat graf *shadow path*.

Graf bunga Mawar adalah graf terhubung yang memuat graf Siklus, dengan n titik berderajat 2 dan n titik berderajat 4. Graf bunga Mawar dinotasikan dengan $M(C_n)$ (Sungeng dkk., 2022). Graf Barbel adalah graf yang terbentuk dengan menghubungkan dua graf yang sama oleh sebuah sisi sebagai jembatan. Graf barbel bunga Mawar adalah graf Barbel yang memuat graf bunga Mawar $M(C_n)$ dan dinotasikan dengan $B_{M(C_n)}$.

Sejauh penelusuran literatur, belum ada kajian mengenai bilangan kromatik lokasi pada graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$. Sehingga penulis tertarik untuk membahas bilangan kromatik lokasi pada graf bunga Mawar dan graf barbel bunga Mawar.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar $\chi_L\big(M(C_n)\big)$ dan bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Mawar $\chi_L\big(B_{M(C_n)}\big)$ untuk $n \geq 3$.

1.3 Manfaat Penelitian

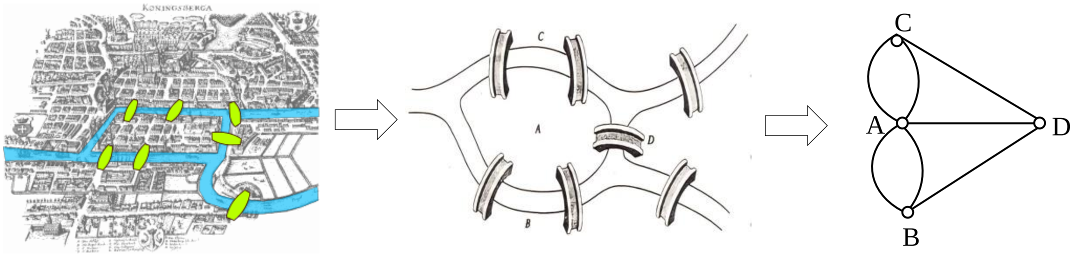
Manfaat penelitian ini adalah:

1. Memberikan pemahaman mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya graf bunga Mawar dan graf barbel bunga Mawar.
2. Sebagai bahan referensi bagi peneliti lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi graf bunga lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

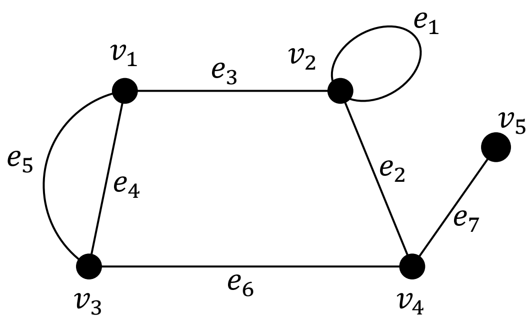
2.1 Konsep Dasar dan Kelas-Kelas Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada tahun 1736 untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melintasi sebuah jembatan tepat satu kali di empat kota di Konisberg, Rusia, yang dihubungkan oleh tujuh jembatan di atas Sungai Pregel. Masalah ini disajikan dalam bentuk gambar yang dikenal sebagai representasi graf, di mana titik menyatakan suatu wilayah dan sisi menyatakan jembatan yang menghubungkan dua wilayah. Dalam bahasan ini, representasi graf Euler dapat digunakan untuk membuktikan bahwa tidak mungkin melintasi setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula (Sugeng dkk., 2014).



Gambar 1. Representasi graf untuk masalah pada kasus jembatan Konigsberg
(Sumber: http://3.bp.blogspot.com/-w0p9DKnZ2FM/UB_c2fNp--I/AAAAAAAAAX8/kjxNYffgsAY/s1600/teori-graf.jpg)

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari (Deo, 1989). Suatu graf G adalah himpunan terurut $\big(V(G), E(G)\big)$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi adalah pasangan tak terurut dari $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka v_1 dan v_2 dikatakan menempel (*incident*) pada sisi e, seperti halnya sisi e menempel pada titik v_1 dan v_2, sehingga saling bertetangga (*adjacent*). Himpunan tetangga dari suatu titik v, dinotasikan dengan $N(v)$, adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan v.



Gambar 2. Salah satu contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

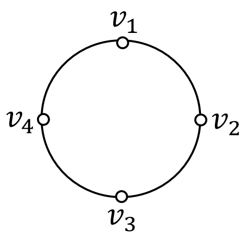
Gambar 2 merupakan graf $G(V,E)$ yang memiliki 5 titik dengan himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan 7 sisi dengan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Titik yang bertetangga dengan titik v_1 adalah v_2 dan v_3, sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_1 adalah sisi e_3, e_4, dan e_5.

Daun (*pendant*) adalah titik dengan derajat satu. Titik v_5 dikatakan sebagai daun pada Gambar 2. Derajat (*degree*) adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v dari suatu graf G, dinotasikan dengan $d(v)$. Derajat dari setiap titik pada Gambar 2 sebagai berikut: $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 4$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 3$, dan $d(v) = 1$. Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. *Loop* pada Gambar 2 adalah sisi e_1 dan terdapat sisi paralel pada titik v_1 dan v_3.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada suatu graf. Pada Gambar 2, yang merupakan jalan adalah $v_4, e_2, v_2, e_3, v_1, e_5, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5$. Lintasan (*path*) adalah *walk* yang melewati titik-titik yang berbeda, di mana titik-titik tersebut dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Contoh lintasan yang terdapat pada Gambar 2 adalah $v_2, e_3, v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_7, v_5$. Sirkuit (*circuit*) adalah lintasan tertutup, yaitu memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua, yaitu sirkuit ganjil (sirkuit yang memuat titik berjumlah ganjil) dan sirkuit genap (sirkuit yang memuat titik berjumlah genap). Contoh sirkuit ganjil pada Gambar 2 adalah $v_2, e_3, v_1, e_4, v_3, e_6, v_4, e_2, v_2$.

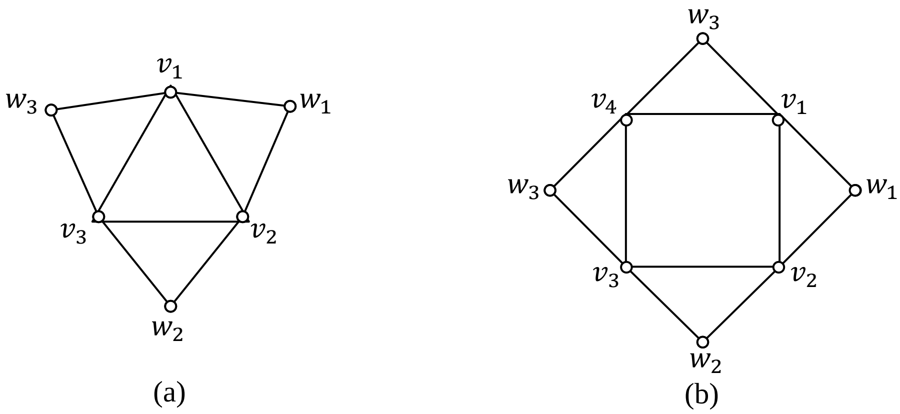
Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Berikut akan diberikan definisi dari beberapa graf terhubung:

Graf Siklus didefinisikan sebagai graf terhubung sederhana yang setiap titiknya berderajat dua dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \big\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\big\}$. Graf Siklus dengan n titik dinotasikan dengan C_n dengan $n \geq 3$.



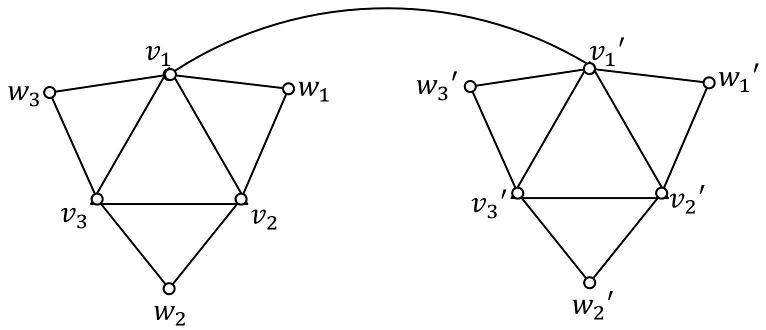
Gambar 3. Graf Siklus C_4

Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ himpunan titik-titik dari graf Siklus C_n, dengan $n \geq 3$ dan misalkan n sisi dari C_n adalah $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n, v_nv_1$. Graf bunga Mawar $M(C_n)$ dapat dibentuk dari graf Siklus C_n dengan titik $v_1, v_2, \dots, v_n$ dan n titik terisolasi (*isolated vertices*) $w_1, w_2, \dots, w_n$ dan kemudian menghubungkan setiap dua titik v_i, v_{i+1} dengan w_i, untuk $i = 1, 2, \dots, n$ di mana $v_{n+1} = v_1$. Jadi, $M(C_n)$ memiliki n titik dengan derajat 2 dan n titik dengan derajat 4 (Sugeng dkk., 2022).



Gambar 4. (a) Graf bunga Mawar $M(C_3)$ dan (b) graf bunga Mawar $M(C_4)$

Graf Barbel $B_{m,n}$ terbentuk dengan menghubungkan dua graf terhubung sembarang G dan H oleh sebuah sisi sebagai jembatan, untuk $m, n \geq 3$ dengan G dan H adalah graf Lengkap dengan masing-masing graf memiliki m dan n titik (Asmiati dkk., 2018). Graf barbel bunga Mawar merupakan graf yang terbentuk dengan menghubungkan dua graf bunga Mawar $M(C_n)$ oleh sebuah sisi sebagai jembatan. Graf barbel bunga Mawar dinotasikan dengan $B_{M(C_n)}$.



Gambar 5. Graf barbel bunga Mawar $B_{M(C_3)}$

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Menurut Chartrand dkk., pada 2002, bilangan kromatik lokasi didefinisikan, misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan sejati pada graf G, di mana untuk titik u dan v yang bertetangga di graf G memenuhi $c(u) \neq c(v)$. Jarak dari titik v terhadap titik w dinotasikan dengan $d(v, w)$, adalah panjang lintasan terpendek dari titik v terhadap titik w. Misalkan C_i adalah himpunan titik berwarna, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna c_π dari v adalah k-pasang terurut $\{d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_n)\}$ dengan $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi. Berikut teorema dasar yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002 tentang bilangan kromatik lokasi graf.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(v, w) = d(u, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u, v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u, w) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, maka

$d(u, C_j) \neq d(v, C_j)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$. Sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

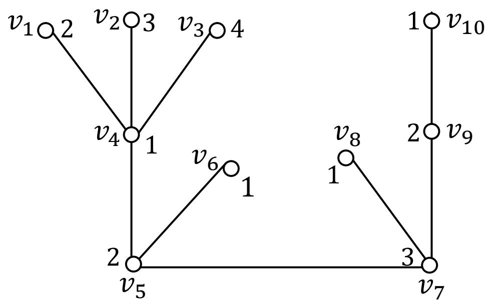
Akibat dari Teorema 2.1 didapatkan batas bawah dari bilangan kromatik lokasi untuk graf sebarang.

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ pada graf G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G memiliki warna yang berbeda untuk setiap x_i, $i = 1, 2, \dots, k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k + 1$ (Chartrand dkk. 2002). ■



Gambar 6. Salah satu contoh pewarnaan lokasi minimum pada G

Graf G pada Gambar 6 memiliki derajat titik maksimum 3. Berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq k + 1$ dengan k derajat titik maksimum, maka membutuhkan setidaknya 4 warna. Oleh karena itu, $\chi_L(G) \geq 4$. Gambar 6 menunjukkan bahwa $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_1, v_5, v_9\}$, $C_3 = \{v_2, v_7\}$, dan $C_4 = \{v_3\}$. Kode warna yang dihasilkan pada graf G adalah:

$c_\Pi(v_1) = \big(d(v_1, C_1), d(v_1, C_2), d(v_1, C_3), d(v_1, C_4)\big) = (1{,}0{,}2{,}2)$,
$c_\Pi(v_2) = \big(d(v_2, C_1), d(v_2, C_2), d(v_2, C_3), d(v_2, C_4)\big) = (1{,}2{,}0{,}2)$,
$c_\Pi(v_3) = \big(d(v_3, C_1), d(v_3, C_2), d(v_3, C_3), d(v_3, C_4)\big) = (1{,}2{,}2{,}0)$,
$c_\Pi(v_4) = \big(d(v_4, C_1), d(v_4, C_2), d(v_4, C_3), d(v_4, C_4)\big) = (0{,}1{,}1{,}1)$,
$c_\Pi(v_5) = \big(d(v_5, C_1), d(v_5, C_2), d(v_5, C_3), d(v_5, C_4)\big) = (1{,}0{,}1{,}2)$,
$c_\Pi(v_6) = \big(d(v_6, C_1), d(v_6, C_2), d(v_6, C_3), d(v_6, C_4)\big) = (0{,}1{,}2{,}3)$,
$c_\Pi(v_7) = \big(d(v_7, C_1), d(v_7, C_2), d(v_7, C_3), d(v_7, C_4)\big) = (1{,}1{,}0{,}3)$,
$c_\Pi(v_8) = \big(d(v_8, C_1), d(v_8, C_2), d(v_8, C_3), d(v_8, C_4)\big) = (0{,}2{,}1{,}4)$,
$c_\Pi(v_9) = \big(d(v_9, C_1), d(v_9, C_2), d(v_9, C_3), d(v_9, C_4)\big) = (1{,}0{,}1{,}4)$, dan
$c_\Pi(v_{10}) = \big(d(v_{10}, C_1), d(v_{10}, C_2), d(v_{10}, C_3), d(v_{10}, C_4)\big) = (0{,}1{,}2{,}5)$.

Karena setiap titik pada graf G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(G) \leq 4$. Jadi, $\chi_L(G) = 4$.

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Untuk graf Siklus C_n, misalkan $n \geq 3$, maka:

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3; \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 4; \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

Bukti: Pertimbangkan dua kasus.

Kasus 1. Andaikan $n \geq 3$ adalah ganjil. Misalkan himpunan titik pada graf Siklus adalah $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, diberikan warna 1 untuk v_1 jika i genap dan warna 3 untuk v_i jika $i \geq 3$ dan ganjil. Berdasarkan Akibat 2.1, perlu ditunjukkan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi untuk membuktikan bahwa $\chi_L(C_n) = 3$. Pertimbangkan dua subkasus berikut:

Subkasus 1.1. Jika $n \geq 4k + 1$, di mana $k \geq 1$. Untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1{,}0{,}1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (2k + 2 - 2i, 0{,}1)$. Juga untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\pi(v_{2i+1}) = (2i, 1{,}0)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\pi(v_{2i+1}) = (2k - 2 + 1{,}1{,}0)$. Karena vektor-vektor $c_\Pi(v_i)$ berbeda, maka pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sehingga $\chi_L(C_n) = 3$.

Subkasus 1.2. Jika $n = 4k + 3$, dengan $k \geq 0$. Membuktikan $\chi_L(C_{4k+3})$ dengan cara yang sama seperti Subkasus 1.

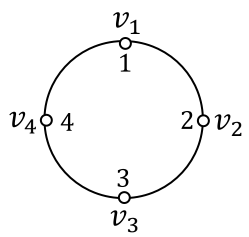
Kasus 2. Jika $n \geq 4$ adalah genap. Misalkan himpunan titik pada graf Siklus $V(C_n) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Dengan pemberian warna sebagai berikut: warna 1 untuk v_1, warna 2 untuk v_2, warna 3 untuk v_i, jika $i \geq 3$, i ganjil, dan warna 4 untuk v_i jika $i \geq 4$ genap. Akan ditunjukkan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n adalah $\chi_L(C_n) = 4$.

Subkasus 2.1. Jika $n = 4k$, dengan $k \geq 1$ untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (2i, 2i-1, 0, 1)$, dengan $k + 1 < i \leq 2k - 1$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (4k - 2i, 4k - 2i + 1, 0, 1)$. Untuk $2 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1, 2i - 2, 1, 0)$, untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (4k + 1 - 2i, 4k + 2 - 2i, 1, 0)$. Karena $c_\Pi(v_i)$ memiliki kode yang berbeda, maka pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi.

Subkasus 2.2. Jika $n = 4k + 2$, dengan $k \geq 1$. Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti Subkasus 2.1. Selanjutnya hanya perlu dibuktikan bahwa $\chi_L(C_n) \geq 4$ jika n genap. Menggunakan kontradiksi, misalkan terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n dan andaikan menggunakan 3 warna, yaitu 1, 2, 3, untuk $n \geq 4$. Maka terdapat satu warna, misalkan 2 mewarnai sejumlah t dari titik C_n, dengan $2 \leq t \leq \frac{n}{2}$. Seperti proses siklus pada C_n dimulai dengan v_1, misalkan $v_{i1}, v_{i2}, \ldots, v_{in}$, titik-titik dari C_n diberi warna 2 karena tidak ada dua titik yang saling bertetangga, termasuk untuk setiap bilangan bulat dengan $1 \leq j \leq t$, interval $I_j = \left\{v_{i_j+1}, v_{i_j+2}, \ldots, v_{i_{j+1}-1}\right\}$.

Pertama, akan ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang memiliki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih. Menggunakan kontradiksi, andaikan beberapa interval I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih. Tanpa megurangi perumuman, v_{i_j+1} dan $v_{i_{j+1}-1}$ diberi warna 1. Akibatnya, $c_\Pi\left(v_{i_j+1}\right) = c_\Pi\left(v_{i_{j+1}-1}\right) = (0,1,1)$, suatu kontradiksi.

Kedua, akan ditunjukkan bahwa tidak ada interval yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Menggunakan kontradiksi, andaikan terdapat interval yang memuat bilangan genap di titik-titiknya. Karena C_{2k} memiliki susunan genap, pasti terdapat bilangan genap dari interval yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 interval berbeda memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Tanpa mengurangi perumuman, bahwa v_{i_j+1} dan diberi warna 1. Tepat hanya 1 dari v_{i_k+1} dan $v_{i_{k+1}-1}$ yang diberi warna 1. Maka, $c_\Pi\left(v_{i_j+1}\right) = c_\Pi\left(v_{i_k+1}\right) = (0,1,1)$, suatu kontradiksi. Akibatnya, semua interval $t = \frac{n}{2}$ memuat tepat satu titik. Jadi, terdapat bilangan bulat terkecil I_j $\left(1 \leq j \leq \frac{n}{2}\right)$ maka v_{i_j-1} dan v_{i_j+1} diberi warna berbeda, misalkan 1 dan 3, secara berturut-turut. Akibatnya, terdapat bilangan bulat $i_k > i_j$ sehingga v_{i_k-1} diberi warna 3 dan v_{i_k+1} diberi warna 1. Maka diperoleh, $c_\Pi\left(v_{i_j}\right) = c_\Pi\left(v_{i_k}\right) = (1,0,1)$, suatu kontradiksi. Oleh karena itu, $\chi_L(C_n) = 4$ jika n genap. ■



Gambar 7. Salah satu contoh pewarnaan lokasi minimum pada C_4

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil Tahun Akademik 2022/2023 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar $M(C_n)$ adalah sebagai berikut:
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$. Karena graf $M(C_n)$ memuat graf Siklus C_n, maka pewarnaan pada graf $M(C_n)$ sekurang-kurangnya menggunakan pewarnaan dari graf Siklus. Jika batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar $M(C_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi dengan memperhatikan struktur grafnya, pewarnaan titik dimulai dari titik-titik pada graf Siklus kemudian titik di

luar graf Siklus dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna dan pewarnaan minimum pada titik-titik graf tersebut yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.

c. Jika batas atas $\chi_L\big(M(C_n)\big) \leq x$ dan batas bawah $\chi_L\big(M(C_n)\big) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya yaitu $\chi_L\big(M(C_n)\big) = x$.
d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.
e. Membuktikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah d.

2. Metode menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Mawar $B_{M(C_n)}$ adalah sebagai berikut:
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Mawar $B_{M(C_n)}$ dengan $n \geq 3$. Karena graf $B_{M(C_n)}$ memuat graf bunga Mawar $M(C_n)$, maka pewarnaan pada graf $B_{M(C_n)}$ sekurang-kurangnya menggunakan pewarnaan pada graf bunga Mawar. Jika batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan terhadap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Mawar $B_{M(C_n)}$ dengan $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.
   c. Jika batas atas $\chi_L\big(B_{M(C_n)}\big) \leq x$ dan batas bawah $\chi_L\big(B_{M(C_n)}\big) \geq x$, maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya yaitu $\chi_L\big(B_{M(C_n)}\big) = x$.
   d. Memformulasikan hasil-hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan matematika.
   e. Membuktikan hasil-hasil yang diperoleh pada langkah d.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan bahwa bilangan kromatik lokasi dari graf bunga Mawar, $\chi_L(M(C_n))$ adalah 4 untuk $n \in \{3,4\}$ dan 5 untuk $n \geq 5$. Bilangan kromatik lokasi dari graf barbel bunga Mawar, $\chi_L(B_{M(C_n)})$ adalah 4 untuk $n = 3$ dan 5 untuk $n \geq 4$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf bunga Mawar pada operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E.T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J.Sci*. **43A**: 1-8.

Asmiati, Assiyatun, H., Baskoro, E. T., Suprijanto, D., Simanjuntak, R., dan Uttunggadewa, S. 2012. Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. **3(1)**:11-23.

Asmiati dan Baskoro, E. T. 2012. Characterizing of Graphs Containing Cycle with Locating-Chromatic Number Three. *AIP Conf. Proc.* **1450**: 351-357.

Asmiati. 2017. Bilangan Kromatik Lokasi n Amalgamasi Bintang yang dihubungkan oleh suatu Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **13(2)**: 115-121.

Asmiati, Yana, K. S. G., dan Yulianti, L. 2018. On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graph. *International Journal Mathematics and Mathematical Science*. **2018**: 1-5.

Asmiati, Yana, I. K. S. G., dan Yulianti. 2019. On the Locating Chromatic Number of Subdivision of Barbell Graphs Containing Generalized Petersen Graph. *International Journal of Computer Science a Network Security*. **19(7)**: 45-50.

Asmiati, Damayanti, M., dan Yulianti, L. 2021. On the Locating Chromatic Number of Barbell Shadow Path Graph. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **5(2)**: 82-93.

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Number*. **130**:157-168

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., dan Zhang, P. 2002. The locating - chromatic number of a graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**:89-101.

Chartrand, G., Erwin, Henning, M. A., Slater, P. J., dan Zhang, P. 2003. Graph of order n with locating-chromatic number n-1. *Discrete Math*. **269**:65-79.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. Prentice Hall of India Prive Limited, New Delhi.

Damayanti, M., Asmiati, Fitriani, Ansori, M., dan Faradilla A. 2021. The Locating Chromatic Number of some Modified Path with Cycle having Locating Number Four. *Journal of Physics: Conference Series*. **1751(1)**: 012008.

Harary, F. dan Melter, R. A. 1976. On the Metric Dimension of a Graph. *Ars Combinatori*. **2**: 191-195.

Irawan, A., Asmiati, Suharsono, S., dan Muludi, K. 2021. The Locating-Chromatic Number of Certain Barbell Origami Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. **1751(1)**: 012017.

Prawinasti, K., Ansori, M., Asmiati, Notiragayu, dan Rofi, A. R. G. N. 2021. The Locating Chromatic Number for Split Graph of Cycle. *Journal of Physics: Conference Series*. **1751(1)**: 012009.

Slater, P. J. 1975. Leaves of Trees. *Conger. Number*. **14**: 549-559.

Sugeng, K. A., Slamet, S., dan Sibalan, D. R. 2014. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Departemen Matematika FMIPA Universitas Indonesia, Depok.

Sugeng, K. A., John, P., Lawrence, M. L., Anwar, L. F., Baca, M., dan Semanicova-Fenovcikova, A. 2023. Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications*. **11(1)**: 27-38.