II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam mengkaji penelitian ‘Karakteristik Penduga Parameter Distribusi Log Normal Menggunakan Metode *Generalized Moment’* digunakan beberapa definisi, dan teorema yang berkaitan dengan penelitian ini. Berikut merupakan penjabaran definisi dan teorema yang digunakan:

2.1 Distribusi Normal

Distribusi Normal merupakan distribusi peluang kontinu yang sangat penting. Distribusi Normal juga sering disebut dengan distribusi Gauss. Distribusi Normal secara matematis bergantung pada parameter μ dan σ^2. Adapun definisi mengenai Distribusi Normal sebagai berikut:

Definisi 2.1 (Distribusi Normal)

Jika X merupakan sampel acak dari distribusi normal, maka fungsi kepekatan peluang dari X adalah

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{[x-\mu]^2}{2\sigma^2}\right) \qquad ; \ -\infty < x < \infty$$

parameter μ dan σ^2 merupakan rata-rata dan ragam dari X. Sehingga X mempunyai distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ (Hogg and Craig, 1995).

Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan distribusi Log Normal yang digunakan dalam penelitian karakteristik pendugaan menggunakan metode *generalized moment* , yaitu meliputi definisi, fungsi distribusi kumulatif, nilai harapan, dan nilai ragam, adapun penjelasannya sebagai berikut:

2.2 Distribusi Log Normal

Distribusi Log Normal dalam bentuk sederhana adalah fungsi densitas dari sebuah peubah acak yang logaritmanya mengikuti hukum distribusi normal. Adapun definisi dari distribusi Log Normal sebagai berikut:

Definisi 2.2 (Distribusi Log Normal)

Misalkan sebuah peubah acak X bilangan real positif$(0 < x < \infty)$. Sedemikian sehingga $Y = \ln x$ merupakan distribusi Normal dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. $X = e^y$ merupakan distribusi Log Normal atau dapat ditulis dengan $\Lambda(\mu, \sigma^2)$ dan $Y \approx N(\mu, \sigma^2)$. Karena X dan Y dihubungkan oleh relasi $Y = \ln x$, maka fungsi distribusi Log Normal adalah sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}, & x > 0 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$

(Aitchison and Brown, 1963)

Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Log Normal (μ, σ^2) beserta pembuktian. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

2.2.1 Fungsi Distribusi Kumulatif Distribusi Log Normal

Selain mempunyai fungsi kepekatan peluang, distribusi Log Normal memiliki fungsi distribusi kumulatif. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi Log Normal adalah sebagai berikut:

$$F(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} P\left(\frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right) \tag{2.1}$$

dimana $z = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$ dan tanda positif untuk $z > 0$ dan tanda negatif untuk $z < 0$ (Walck, 1996).

Bukti persamaan (2.1)

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma\,t}\, e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right)^2} dt \tag{2.2}$$

Misalkan: $y = \left(\frac{\ln t - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln t = y\sigma + \mu \rightarrow t = e^{y\sigma + \mu}$

$dy = \frac{1}{t\sigma}\,dt \rightarrow dt = \sigma(e^{y\sigma+\mu})dy$

batas: $t = x \rightarrow y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)$; $t = 0 \rightarrow y = -\infty$

Subtitusikan permisalan diatas ke dalam persamaan (2.2), sehingga diperoleh:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2}y^2} dy \tag{2.3}$$

Misalkan: $z = \frac{y^2}{2} \rightarrow dz = y\,dy \rightarrow \frac{1}{y}dz = dy$; $y = \sqrt{2z}$

Batas: $y = \frac{\ln x - \mu}{\sigma} \rightarrow z = \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}$; $y = -\infty \rightarrow z = -\infty$

Subtitusikan permisalan diatas ke dalam persamaan (2.3) sehingga diperoleh:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\sqrt{z\pi}}\, e^{-z} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-z}\, z^{\frac{-1}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\, dz + \int_{0}^{\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{e^{-z}\, z^{\frac{-1}{2}}}{2\sqrt{\pi}}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-z}\, z^{\frac{1}{2}-1}\, dz + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} e^{-z}\, z^{\frac{1}{2}-1}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} + \frac{\gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + P\left(\frac{1}{2}, \frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad \blacksquare$$

Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai nilai harapan dari distribusi Log Normal (μ, σ^2) beserta pembuktian, yaitu sebagai berikut:

2.2.2 Nilai Harapan Distribusi Log Normal

Sub-bab ini akan dijelaskan definisi dan pembuktian nilai harapan distribusi Log Normal sebagai berikut:

Definisi 2.3 (Nilai Harapan)

Misalkan X variabel acak, jika X variabel acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f(x)$ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

maka nilai harapan dari X adalah

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

(Hogg and Craig, 1995)

Adapun nilai harapan distribusi Log Normal sebagai berikut:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \tag{2.4}$$

(Walck, 1996)

Bukti persamaan (2.4):

$$E(x) = \int_{0}^{\infty} x\, f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx \tag{2.5}$$

Misalkan: $y = \left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right) \rightarrow \ln x = y\sigma + \mu \rightarrow x = e^{y\sigma + \mu}$

$dy = \dfrac{1}{x\sigma}\, dx \rightarrow dx = \sigma(e^{y\sigma+\mu})dy$

Batas: $x = \infty \rightarrow y = \infty$; $x = 0 \rightarrow y = -\infty$

Subtitusikan permisalan diatas kedalam persamaan (2.5) sebagai berikut:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}(y)^2} \left(e^{y\sigma+\mu}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2} + y\sigma + \mu}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2} + y\sigma + \mu + \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{2}}\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2}(y-\sigma)^2}\, e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}\, dy$$

$$= e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{-1}{2}(y-\sigma)^2}\, dy$$

$$E(x) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \quad \blacksquare$$

Dari suatu nilai harapan dan fungsi kepekatan peluang distribusi Log Normal dapat diketahui nilai ragam dari distribusi Log Normal. Adapun penjelasan mengenai definisi, dan pembuktian nilai ragam distribusi Log Normal sebagai berikut:

2.2.3 Nilai Ragam Distribusi Log Normal

Sebaran dari distribusi Log Normal ditentukan oleh standar devisiasi, σ. Kuadrat dari standar devisiasi merupakan ragam dari distribusi Log Normal. Untuk mengetahui nilai ragam dari distribusi Log Normal diperlukan definisi dan bentuk rumus umum dari nilai ragam, adapun penjelasannya sebagai berikut:

Definisi 2.4 (Ragam)

Misalkan X sampel acak dengan rata-rata terbatas μ dan sedemikian sehingga $E([X-\mu]^2)$ terbatas. Maka ragam dari X didefinisikan sebagai $E([X-\mu]^2)$. $E([X-\mu]^2)$ dinotasikan dengan σ^2 atau $Var(X)$ (Hogg And Craig, 1995).

Adapun nilai ragam dari distribusi Log Normal adalah sebagai berikut:

$$Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2} - 1\right) \tag{2.6}$$

(Walck, 1996)

Bukti persamaan (2.6):

$Var(X) = E([X-\mu]^2) = E(X^2) - \mu^2.$

Mencari nilai $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \, f(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 \, \frac{1}{\sqrt{2\pi x^2 \sigma^2}} \, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx \tag{2.7}$$

subtitusikan permisalan pada pembuktian persamaan (2.4) kedalam persamaan(2.7) sebagai berikut:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{y\sigma+\mu}}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(y)^2}\left(e^{y\sigma+\mu}\right) dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}+2y\sigma+2\mu}\ dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}+2y\sigma+2\mu+2\sigma^2-2\sigma^2}\ dy$$

$$= e^{2\mu+2\sigma^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}(y-2\sigma)^2}\ dy$$

$$E(X^2) = e^{2\mu+2\sigma^2}$$

sehingga,

$$Var(X) = E([X-\mu]^2) = E(X^2) - \mu^2.$$

$$= e^{2\mu+2\sigma^2} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2$$

$$= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$$

$$Var(X) = e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right) \qquad \blacksquare$$

Distribusi Log Normal memilik dua parameter yaitu μ dan σ^2. Penduga parameter memiliki sifat penduga yang baik, seperti takbias, varian minimum, dan kekonsistenan. Maka sub-bab selanjutnya akan dibahas sifat penduga yang baik sebagai berikut:

2.3 Penduga Parameter

Sebarang fungsi dari sampel acak yang digunakan untuk menduga suatu parameter disebut dengan statistik atau penduga. Jika θ merupakan parameter yang dapat diduga, maka penduga dari θ dinotasikan $\hat{\theta}$(Larsen dan Marx, 2012).

Berkaitan dengan karakteristik pendugaan dengan menggunakan metode *generalized moment*, maka akan dijelaskan ciri-ciri penduga yang baik sebagai berikut:

2.3.1 Takbias

Sifat penduga yang baik salah satunya adalah sifat takbias. Suatu penduga dikatakan takbias apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi, adapun penjelasannya sebagai berikut:

Definisi 2.5 (Takbias)

Seandainya $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_y(y;\theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui. Penduga $\hat{\theta}[= h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan takbias bagi θ, jika $E(\hat{\theta}) = \theta$ (semua θ). (Untuk konsep dan terminologi yang sama berlaku, jika terdapat data sampel acak $X_1, X, \dots, X_n$ yang diambil dari fungsi kepekatan peluang diskret $p_x(k;\theta)$ (Larsen dan Marx, 2012).

Suatu penduga $\hat{\theta}_n[= h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan penduga tak bias asimtotik bagi θ, jika $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}_n) = \theta$ (Larsen dan Marx, 2012).

Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan sifat ragam minimum dari suatu penduga parameter distribusi. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

2.3.2 Ragam Minimum

Selain sifat ketakbiasan, penduga parameter dikatakan baik apabila memenuhi sifat penduga ragam minimum. Adapun definisi ragam minimum suatu penduga sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Ragam Minimum)

Bila U(X) merupakan penduga bagi $g(\boldsymbol{\theta})$, maka $U_1(X)$ dikatakan sebagai penduga beragam terkecil, jika

$$\sigma^2_{u_{1(x)}} \leq \sigma^2_{U(X)}$$

Dimana U(X) merupakan sembarang penduga bagi $g(\boldsymbol{\theta})$.

(Hogg and Craig, 1995).

Untuk mengetahui sifat varian minimum dari suatu penduga parameter digunakan juga *Cramer-Rao Inequality*. Maka Sub-bab selanjutnya akan membahas definisi *Cramer-Rao Inequality* sebagai berikut:

2.3.2.1 *Cramer-Rao Inequality*

Suatu penduga parameter dikatakan memiliki sifat ragam minimum, apabila memenuhi batas bawah *Cramer-Rao*. Adapun penjelasan mengenai definisi dan teorema yang mendukung sebagai berikut:

Teorema 2.1 (*Cramer-Rao Inequality)*

Diberikan $f_Y(y;\theta)$ fungsi kepekatan peluang dengan orde pertama kontinu dan orde kedua turunan. Misalkan himpunan dari nilai y, dimana $f_Y(y;\theta) \neq 0$, dan tidak terikat (bebas) terhadap θ. Diberikan $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ sampel acak dari $f_y(y;\theta)$ dan $\hat{\theta}_n[= h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ penduga yang takbias bagi θ. Maka,

$$Var(\hat{\theta}) \geq \left\{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f_Y(Y;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right]\right\}^{-1} = \left\{-nE\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f_Y(Y;\theta)}{\partial\theta^2}\right)^2\right]\right\}^{-1}$$

[Pernyataan yang sama digunakan, jika n pengamatan berasal dari pdf diskret $p_x(k;\theta)$] (Larsen dan Marx, 2012).

Definisi 2.7

Misalkan Y penduga takbias bagi parameter θ dalam kasus pendugaan baik. Statistik Y dikatakan penduga efisien bagi θ jika dan hanya jika varian dari Y mencapai batas bawah *Rao-Cramer* (Hogg and Craig, 1995).

Pada pertidaksamaan Rao-Cramer terdapat unsur informasi fisher. Adapun penjabaran definisi informasi fisher dan matrik informasi fisher sebagai berikut:

2.3.2.2 Informasi Fisher

Misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan (p.d.f) $f(x;\ \theta)$, $\theta \in \Omega$. Informasi Fisher dinotasikan dengan $I(\theta)$, dimana

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial \ln f(x;\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2 f(x;\ \theta)\, dx$$

Atau $I(\theta)$ dapat dihitung juga dengan cara berikut:

$$I(\theta) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\ \theta)}{\partial\theta^2}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} -\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\ \theta)}{\partial\theta^2}\right] f(x;\ \theta)dx$$

(Hogg and Craig, 1995).

Definisi 2.8 (Informasi Fisher)

Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ adalah sampel acak dari suatu distribusi dengan p.d.f. $f(x;\ \theta)$. Maka fungsi kemungkinan (p.d.f. bersama dari $X_1, X_2, \dots, X_n$) adalah

$$L(\theta) = f(x_1;\ \theta)f(x_2;\ \theta) \dots f(x_n;\ \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)$$

Selanjutnya, fungsi kemungkinan diberi fungsi log natural, sehingga

$$\ln L(\theta) = \ln f(x_1;\ \theta) + \ln f(x_1;\ \theta) + \dots + \ln f(x_n;\ \theta)$$

dan

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln f(x_1;\ \theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln f(x_1;\ \theta)}{\partial\theta} + \dots + \frac{\partial \ln f(x_n;\ \theta)}{\partial\theta}$$

Maka, dapat didefinisikan informasi fisher dalam sampel acak sebagai:

$$I_n(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln L(\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

(Hogg and Craig, 1995)

Definisi 2.9 (Matriks Informasi Fisher)

Misalkan sampel acak $X_1, X_2, \dots, X_n$ dari suatu distribusi dengan p.d.f. $f(x;\ \theta_1, \theta_2)$, $(\theta_1, \theta_2) \in \Omega$ dalam kondisi yang ada. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan bahwa ruang dari X dimana $f(x;\ \theta_1, \theta_2) > 0$ yang tidak meliputi $\theta_1\ dan\ \theta_2$, dimana dapat diturunkan dibawah integralnya. Sehingga matriks informasi fisher sebagai berikut:

$$I_n = n\begin{bmatrix} E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\ \theta_1,\ \theta_2)}{\partial \theta_1}\right]^2\right\} & E\left\{\frac{\partial \ln f(X;\ \theta_1,\ \theta_2)}{\partial \theta_1}\frac{\partial \ln f(X;\ \theta_1,\ \theta_2)}{\partial \theta_2}\right\} \\ E\left\{\frac{\partial \ln f(X;\ \theta_1,\ \theta_2)}{\partial \theta_1}\frac{\partial \ln f(X;\ \theta_1,\ \theta_2)}{\partial \theta_2}\right\} & E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(X;\ \theta_1,\ \theta_2)}{\partial \theta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}$$

Atau

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\ \theta_1,\theta_2)}{\partial {\theta^2}_1}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\ \theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\ \theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\ \theta_1,\theta_2)}{\partial {\theta^2}_2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg and Craig, 1995).

Selain sifat takbias dan ragam minimum, sifat penduga yang baik lainnya adalah kekonsistenan, maka sub-bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai sifat kekonsistenan suatu penduga. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

2.3.3 Konsisten

Sifat penduga yang baik selain ketakbiasan dan ragam minimum adalah sifat kekonsistenan. Suatu penduga dikatakan konsistenan apabila asumsi yang telah ditentukan terpenuhi. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

Definisi 2.10 (Konsisten)

Suatu penduga $\hat{\theta}_n[= h(W_1, W_2, \dots, W_n)]$ dikatakan konsisten dari θ, jika $\hat{\theta}_n[= h(W_1, W_2, \dots, W_n)]$ konvergen peluang ke θ, untuk semua $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1$$

(Larsen dan Marx, 2012).

Berkaitan dengan kekonsistenan suatu penduga, selain definisi terdapat teorema yang mendukung, yaitu sebagai berikut:

Teorema 2.2 *(Chebyshev's inequality)*

Misalkan W variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$P(|W-\mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

atau

$$P(|W-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Larsen dan Marx, 2012).

Teorema 2.3

Jika $W_n = W_n(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ merupakan rangkaian dari penduga suatu parameter θ, maka berlaku:

- $\lim_{n\to\infty} Var_\theta\, W_n = 0$
- $\lim_{n\to\infty} Bias\, W_n = 0$

Untuk $\forall\theta \in \Theta$, W_n merupakan rangkaian penduga konsisten dari suatu parameter θ (Casella and Berger, 2002).

Untuk menduga suatu parameter distribusi Log Normal digunakan metode pendugaan, yaitu metode *generalized moment.* Sub-bab selanjutnya akan dijelaskan mengenai metode *generalized moment* sebagai berikut:

2.4 *Metode Generalized Moment*

Metode *generalized moment* pertama kali dikembangkan oleh Lars Petrus Harsen. Metode *generalized moment* adalah suatu metode statistik yang umum untuk memperoleh pendugaan parameter dari model statistik dan merupakan bentuk perumuman dari metode momen.

Definisi 2.11

Untuk menduga parameter dari suatu distribusi, maka digunakan bentuk umum dari *Probability Weighted Moment* (PWM) sebagai berikut:

$$M_{l,r} = E[X^l\, F^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l\, [F(x)]^r f(x)dx$$

$$= \int_0^1 x^l\, [F(x)]^r dx \qquad (2.8)$$

Atau

$$M_{l,r;r=0} = E[X^l\, F^0] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l\, f(x) \qquad (2.9)$$

Persamaan (2.8) digunakan ketika fungsi kumulatif dari suatu distribusi memiliki nilai invers dan persamaan (2.9) digunakan ketika fungsi kumulatif dari suatu distribusi tidak memiliki nilai invers. Dimana x merupakan invers dari fungsi kumulatif suatu distribusi (F(x)), l merupakan moment ke-l, r merupakan statistik tataan ke-(r+1), dan $M_{l,r}$ merupakan suatu dasar untuk menerapkan metode *generalized moment*. Pada persamaan (2.9) nilai r diambil sama dengan nol dan nilai l diambil sebarang yang tidak harus bilangan bulat, maupun positif

(Ashkar dan Mahdi, 2006).

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan matrik varian kovarian asimtotik menggunakan metode *generalized moment.* Adapun penjabarannya sebagai berikut:

2.5 Matrik Varian Kovarian Asimtotik Menggunakan Metode *Generalized Moment*

Matrik varian kovarian asimtotik dari $\hat{\mu}$ dan $\hat{\sigma}$ merupakan suatu sistim operasi penjumlahan dari varian dan kovarian dari momen sampel $\hat{M}_{l_1,0}$ dan $\hat{M}_{l_2,0}$. Sehingga bentuk umum matrik varian kovarian asimtotik menggunakan metode *generalized moment* adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\mu}) \\ Var(\widehat{\sigma^2}) \\ Cov(\hat{\mu}, \widehat{\sigma^2}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^2 & M_{12}^2 & 2M_{11}M_{12} \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 & 2M_{21}M_{22} \\ M_{11}M_{21} & M_{12}M_{22} & M_{11}M_{22} + M_{21}M_{12} \end{bmatrix}^{-1} x \begin{bmatrix} Var(\hat{M}_{l_1,0}) \\ Var(\hat{M}_{l_2,0}) \\ Cov(\hat{M}_{l_1,0}\ \hat{M}_{l_2,0}) \end{bmatrix}$$

Dimana:

- $M_{11} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \mu}$ $\qquad M_{22} = \frac{\partial M_{l_2,0}}{\partial \sigma^2}$
- $M_{12} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \sigma^2}$ $\qquad Var(\hat{M}_{l_1,0}) = \frac{\left(M_{2l_1,0} - M_{l_1,0}^2\right)}{n}$
- $M_{21} = \frac{\partial M_{l_2,0}}{\partial \mu}$ $\qquad Var(\hat{M}_{l_2,0}) = \frac{\left(M_{2l_2,0} - M_{l_2,0}^2\right)}{n}$
- $Cov(\hat{M}_{l_1,0}\ \hat{M}_{l_2,0}) = \frac{\left(M_{l_1+l_2,0} - M_{l_1,0}\ M_{l_2,0}\right)}{n}$

(Ashkar dan Mahdi, 2006).