INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT DUA

(Skripsi)

Oleh

FITRI WULANDARI
1957031003

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

INTEGRAL RIEMANN WITH THE DIFFERENCE VALUE TO THE SECOND SEQUENCE SPACE

by

FITRI WULANDARI

Research on integral concepts, especially integrals from Riemann, has been developed before. However, not much know about the integral whose value is the difference sequence. In this study, the definitions and theorems related to integrals from Riemann are presented with the difference value to the second sequence space. The Riemann integral f function on $[a, b]$ if and only if for every number ε > 0 there is a number δ > 0 so that if P_1 and P_2 partition on $[a, b]$ with $\|P_1\| < \delta$ and $\|P_2\| < \delta$ results in $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$. Second order difference sequence space defined $l_2(\Delta) = \{\bar{u} = (u_k) \subset \mathbb{R} : \Delta\bar{u} \in l_2\}$ to norm $\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |u_1| + \|\Delta\bar{u}\|_2$. Furthermore, an example is given as its application.

Key words: *integral Riemann, difference sequence space* $l_2(\Delta)$.

ABSTRAK

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT DUA

oleh

FITRI WULANDARI

Penelitian dalam konsep integral terutama integral dari Riemann sudah banyak dikembangkan sebelumnya. Tetapi integral yang bernilai barisan selisih belum banyak diketahui. Pada kajian ini disajikan definisi dan teorema terkait integral dari Riemann bernilai barisan selisih tingkat dua. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 partisi pada $[a, b]$ dengan $||P_1|| < \delta$ dan $||P_2|| < \delta$ berakibat $U(f;P) - L(f;P) < \varepsilon$. Kemudian ruang barisan selisih tingkat dua didefinisikan $l_2(\Delta) = \{\bar{u} = (u_k) \subset \mathbb{R} : \Delta\bar{u} \in l_2\}$ terhadap norm $\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |u_1| + \|\Delta\bar{u}\|_2$. Selanjutnya, diberikan contoh sebagai penerapan nya.

Kata kunci: *integral Riemann, ruang barisan selisih* $l_2(\Delta)$.

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT DUA

Oleh

FITRI WULANDARI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi	:	**INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT DUA**
Nama Mahasiswa	:	**Fitri Wulandari**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1957031003**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001

Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.
NIP 19700831 199903 1 002

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **23 Mei 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama Mahasiswa	:	**FITRI WULANDARI**
Nomor Induk Mahasiawa	:	**1957031003**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Dua**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 23 Mei 2023

Penulis,

Fitri Wulandari

NPM. 1957031003

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Fitri Wulandari lahir di Kotabumi pada 28 Desember 2000. Penulis merupakan anak kedua dari tiga bersaudara pasangan Bapak Edi Ariyanto dan Ibu Sulatri. Penulis menempuh pendidikan Taman Kanak-kanak di TK Almunawarah pada tahun 2006-2007. Kemudian melanjutkan pendidikan tingkat dasar di SDN 02 Sidomukti pada tahun 2007-2013. Kemudian melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMPN 1 Abung Semuli pada tahun 2013-2016. Kemudian melanjutkan pendidikan tingkat menengah atas di SMAN 3 Kotabumi pada tahun 2016-2019.

Penulis melanjutkan pendidikan di perguruan tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SMMPTN) pada tahun 2019. Kemudian pada tahun 2020, penulis terdaftar sebagai anggota Bidang Eksternal Himpunan Mahasiswa Jurusan Matematika (HIMATIKA).

Pada awal tahun 2022, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Bank Rakyat Indonesia (BRI). Kemudian pada pertengahan tahun 2022, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Karya Tani, Lampung Timur, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

"Untuk mendapatkan sesuatu hal yang besar, maka harus melakukan sesuatu hal yang besar pula"

"Allah tidak pernah salah mempertemukan kamu dengan seseorang, hadirnya membawa salah satu diantara dua hadiah untukmu, yaitu kebahagian atau pengalaman"

"Hidup itu perjuangan, kamu hanya boleh istirahat dan berhenti ketika kamu sudah ada dititik tertinggi yang kamu ingikan, jika belum sampai ketitik itu, maka teruslah berjuang"

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji dan syukur saya haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas nikmat dan karunia-Nya, Shalawat serta salam selalu tercurahkan kepada baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya ini kepada:

Ayah dan ibu

Orang tua tercinta Ayah Edi Ariyanto dan Ibu Sulastri atas doa, dukungan dan kasih sayang yang terus di berikan serta merawat, membesarkan penulis hingga sekarang.

Kakak dan Adikku

Windy Puspita Rani dan Sinta Valentina yang selalu menjadi penyemangat.

Para Pendidik, guru guru, serta dosen yang telah meluangkan waktunya untuk menurunkan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang telah mendukung, menolong, memberikan kebahagiaan, canda, serta tawa serta memberikan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan negeriku Indonesia.

SANWACANA

Puji Syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul **“Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Dua"** disusun untuk memenuhi salah satu syarat guna memperoleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat.) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, saran dan do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku pembimbing II yang telah memberikan bimbingan dan saran serta dukungan kepada penulis.
3. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si, selaku penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA.,Ph.D selaku Pembimbing Akademik penulis.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung,
7. Seluruh dosen, staf, dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Terkhusus Ibu, Ayah, Sinta Valentina dan mbak Windi Puspita Rani yang selalu memberikan kasih sayang, dukungan, nasehat, motivasi serta do'a yang selalu diberikan.
9. Sahabat-sahabat SMA, Rahayu dan Fitri terimakasih telah memberikan dukungan, pelajaran hidup dan kenangan kepada penulis.
10. Para sahabat hiling-hiling yang telah mendoakan, mendukung, dan memberikan kenangan indah selama perkuliahan.
11. Adhitya Tri Oktavian yang selalu memberikan semangat serta perhatiannya selama menyelesaikan skripsi ini.
12. Sahabat seperjuangan dalam mengerjakan skripsi, Eccha, Fiko, dan Refnita.
13. Teman-teman angkatan 2019 jurusan matematika yang tidak bisa disebutkan satu persatu.
14. Almamater tercinta, Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 23 Mei 2023
Penulis

Fitri Wulandari

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seperti yang telah diketahui sebelumnya bahwa kalkulus modern yang membahas mengenai fungsi-fungsi bernilai real sudah banyak dikembangkan. Dalam perkembangannya pun sudah banyak konsep yang telah dikembangkan, salah satu konsep tersebut yaitu meliputi konsep integral. Integral adalah suatu konsep penting dalam matematika yang dikemukakan pertama kali pada akhir abad ke-17 oleh *Isac Newton* dan *Gottfried Wilhelm Leibniz*. Konsep integral biasa digunakan untuk menentukan luas daerah di bawah kurva dan mencari penyelesaian dari suatu model matematika (Bartle & Sherbert, 2000). Setelahnya, pada tahun 1850 konsep ini diteliti secara lebih mendalam oleh *Benrhard Riemann*. *Riemann* mendefinisikan integral suatu fungsi pada domain berupa interval tertutup dan terbatas pada R sebagai luas daerah di bawah kurva dari fungsi tersebut, yang kemudian dikenal dengan integral Riemann.

Penelitian dalam konsep integral terutama integral Riemann sudah banyak diteliti sebelumnya, contohnya seperti penelitian yang dilakukan oleh Septian Mosal Pirade, Tohap Manurung, dan Jullia Titaley yang berjudul Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real. Akan tetapi integral yang bernilai di ruang barisan selisih belum banyak diketahui. Oleh karena itu, penelitian ini akan difokuskan pada suatu konsep integral yang dikembangkan pada integral yang bernilai di dalam ruang barisan. Ruang barisan yang akan digunakan dalam penelitian ini yaitu ruang barisan selisih tingkat dua yang telah dibahas dalam penelitian Rina Karina Agustina, pada tahun 2019.

Kemudian dilanjutkan oleh penelitian yang di lakukan oleh Nadya Aristiawati Sitorus tahun 2022, yang membahas mengenai transformasi matriks dari ruang barisan selisih tingkat dua. Dan pada penelitian ini akan menerapkan konsep integral Riemann yang bernilai pada ruang barisan selisih tingkat dua.

Barisan dapat dibayangkan sebagai suatu daftar bilangan yang dituliskan dalam suatu urutan tertentu, misalkan:

$$\bar{x} = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

dengan menggabungkan dua konsep integral Riemann dan ruang barisan, sehingga di peroleh bentuk umum sebagai berikut:

$$\int_a^b \bar{f}\, dx = (\int_a^b f_1 dx, \int_a^b f_2 dx, \int_a^b f_3 dx, \dots, \int_a^b f_k dx, \dots)$$

dengan $\bar{f}$ pada penelitian ini dibatasi untuk ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah mengkaji integral Riemann pada ruang barisan selisih tingkat dua.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji dan memahami konsep integral yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat dua.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah memahami konsep integral yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat dua.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan diberikan beberapa pustaka dan dasar teori yang dikaji untuk digunakan dalam pembahasan selanjutnya, diantaranya adalah fungsi dan limit, turunan fungsi, integral Riemann, barisan fungsi, ruang Banach, dan ruang barisan selisih.

2.1 Fungsi dan Limit

Pada bagian ini akan diberikan terlebih dahulu konsep dasar fungsi yang diambil dari Bartle & Sherbert, 1927.

Jika $a \epsilon A$, maka anggota himpunan B yang merupakan kaitan dari a dapat ditulis dengan $f(a)$. Elemen $f(a)$ dinamakan nilai fungsi dari a, atau petaan dari a. Himpunan semua petaan disebut range (daerah hasil) dari fungsi f. Range adalah himpunan bagian dari kodomain. Misalnya f adalah fungsi f:$\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ merupakan himpunan bilangan riil yang memetakan setiap $x \epsilon \mathcal{R}$ ke kuadratnya.

Selanjutnya diberikan konsep dasar limit yang diambill dari Purcell, dkk., 2010. Definisi limit menyatakan bahwa suatu fungsi nilainya akan mendekati nilai tertentu bila x mendekati nilai tertentu pula. Nilai limit adalah nilai kemungkinan, yang kemunginan tersebut diperoleh dari pendekatan atau batasan tertentu, atau dengan definisi makna limit secara intusi yaitu bahwa $\lim_{x \to c} f(x) = L$, berarti bahwa ketika x dekat dengan c tetapi tidak sama dengan c, maka $f(x)$ dekat ke L.

$\mathrm{Lim}_{x \to c} f(x) = L$ berarti bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ yang bersesuaian sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ asalkan $0 < |x - c| < \delta$; yakni

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Definisi berikutnya mengenai limit kiri dan limit kanan, yaitu jika x menuju c dari arah kiri (dari arah bilangan yang lebih kecil dari c) maka disebut limit kiri, dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to c^-} f(x)$$

sedangkan jika x menuju c dari arah kanan (dari arah bilangan yang lebih besar dari c) maka disebut limit kanan, dinotasikan dengan

$$\lim_{x \to c^+} f(x)$$

adapun hubungan antara limit dengan limit kiri dan limit kanan adalah limit ada jika limit kiri dan limit kanannya ada, dinitasikan dengan

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \iff \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

Selanjutnya diberikan definisi limit barisan, misalkan a_n terdefinisi untuk setiap $\mathbb{N} \geq c$. Dapat katakan bahwa $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan M sedemikian sehingga:

$$n > M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

Kemudian limit tak-terhingga, kita katakan bahwa $\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty$ jika untuk setiap bilangan positif M bersesuaian dengan $\delta > 0$ sedemikian sehingga:

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow f(x) > M$$

2.2 Turunan Fungsi

Pada bagian ini diberikan konsep dasar turunan fungsi yang diambil dari (Purcell, dkk., 2010).

Turunan atau yang biasa disebut dengan diferensial merupakan perhitungan terhadap suatu nilai fungsi karena perubahan nilai variabel. Dengan kata lain proses menetukan turunan suatu fungsi disebut diferensial. Berdasarkan definisi, turunan fungsi f adalah fungsi lain *f’’* yang nilainya pada sembarang bilangan *x* adalah

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

asalkan limit ini ada dan bukan ∞ dan $-\infty$.

2.3 Integral Riemann

Pada bagian ini akan diberikan terlebih dahulu konsep dasar integral Riemann. Integral merupakan antiturunan atau juga dapat diartikan sebagai operasi invers terhadap diferensial. Misalkan jika *f*(*x*) adalah fungsi umum yang bersifat *f’*(*x*) = *f*(*x*), maka dapat disimpulkan bahwa *f*(*x*) merupakan antiturunan atau integral dari *F’*(*x*) = *f*(*x*). *f* merupakan fungsi bilangan riil pada interval tertutup $[a, b]$ dan R = $R[a, b]$ adalah himpunan dari keseluruhan partisi dari $[a, b]$, maka integral Riemann atas dan integral Riemann bawah didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = \inf U(f; P), P \in R$$

dan

$$\int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx = \sup L(f; P), P \in R$$

Jika $\int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx = \int_{\bar{a}}^{b} f(x)dx$, maka fungsi f dikatakan terintegral Riemann dan dinotasikan :

$$S(f) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

(Varberg, dkk., 2010).

Teorema 2.3.1 (Juhairi, dkk., 2011)

Diketahui fungsi $f \in R\ [a, b]$ terbatas. Fungsi f terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$ sehingga jika P_1 dan P_2 partisi pada $[a, b]$ dengan $||P_1|| < \delta$ dan $||P_2|| < \delta$ berakibat :

$$U(f; P) - L(f; P) < \varepsilon.$$

Kemudian diberikan integral tak tentu, misalkan fungsi $y = f(x)$ kontinu pada interval $r \leq x \leq s$, maka:

$$\int_r^s f(x)dx = F(x)]_r^s = F(s) - F(r)$$

$F(x)$ disini merupakan antiturunan dari $f(x)$ dalam $r \leq x \leq s$, dengan r batas bawah dan s batas atas.

Selanjutnya diberikan integral tentu, misalkan jika $F(x)$ antiturunan dari fungsi $f(x)$ atau dapat ditulis $\int f(x)dx$, maka:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

dengan c adalah konstanta (Purcell, dkk., 2010).

Pada bagian ini akan dibahas mengenai Integral Riemann Bernilai di ℝ yang diambil dari Darmawijaya, 2006.

Jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots = b\}$ adalah partisi pada $[a, b]$ maka jumlah Riemann dari fungsi $f\colon [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yang berkorespondensi dengan P didefinisikan

$$S(f; P) = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta_i x = \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

Selanjutnya diberikan definisi, suatu fungsi f dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$, ditulis singkat dengan $f \in \mathcal{R}[a, b]$ jika terdapat suatu bilangan $\bar{u} \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $P = \{a = x_0,\ \ x_1, x_2, x_3, \dots, x_k, \dots = b\}$ partisi pada $[a, b]$ dengan $\|P\| < \delta$ maka berlaku

$$|S(f;P) - u| < \varepsilon$$

dimana $u = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx$.

Definisi berikutnya, fungsi $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$ jika nilai dari $\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta_i x$ ada.

Sehingga berlaku,

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(f;P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i)\Delta_i x = u$$

2.4 Barisan Fungsi

Pada bagian ini akan diberikan konsep dasar barisan dan barisan fimgsi yang diambil dari Bartle dan Sherbert, 2000.

Barisan dapat dibayangkan sebagai suatu daftar bilangan yang dituliskan dalam suatu urutan tertentu, misalkan:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

dengan x_1 merupakan suku pertama, x_2 merupakan suku kedua, dan seterusnya sampai x_n yang merupakan suku ke *n*.

Barisan (x_n) mempunyai limit L dan dapat ditulis

$$\lim_{n\to\infty} x_n = L \text{ atau } x_n \to L \text{ dengan } n \to \infty.$$

Apabila untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat sebuah bilangan bulat *N* sedemikian rupa sehingga

$$|x_n - L| < \varepsilon \text{ apabila } n > N.$$

Jika $\lim_{n\to\infty} x_n$ ada, maka dapat dikatakan bahwa barisan tersebut konvergen. Jika tidak, maka barisan tersebut divergen.

Barisan (a_n) disebut naik jika $a_n \le a_{n+1}$ untuk setiap $n \ge 1$, yaitu $a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots$; dan disebut turun jika $a_n \ge a_{n+1}$ untuk setiap $n \ge 1$. Barisan (a_n) disebut barisan monoton jika barisan ini bisa naik dan turun.

Berikut ini diberikan definisi terkait fungsi barisan, yaitu:

- Jika diketahui fungsi $f_k: D \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka diperoleh barisan (f_k) yang disebut barisan fungsi. D merupakan domain fungsi f_k, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, dan untuk setiap $t \in D$ diperoleh barisan bilangan nyata $\left(f_k(t)\right)$.

- Diketahui fungsi $f_k: D \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$
  i. Barisan fungsi (f_k) dikatakan konvergen di titik $t \in D$ jika barisan bilangan nyata $(f_k(t))$ konvergen.
  ii. Barisan fungsi (f_k) dikatakan konvergen pada $A \subset D$ jika barisan bilangan nyata $(f_k(t))$ konvergen untuk setiap $t \in A$.

Teorema 2.4.1 (Bartle dan Sherbert, 2000)

Barisan fungsi (f_k) konvergen ke suatu fungsi f pada A jika untuk setiap $t \in A$ dan bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n = n(t, \varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $k \geq n$ berakibat

$$|f_k(t) - f(t)| < \varepsilon$$

Contoh:

Diberikan $f_k(t) = \frac{t^k}{k}$. Barisan bilangan $\left(f_k(t)\right)$ konvergen ke 0 untuk setiap $t \in [0,1]$, sebab untuk setiap $t \in [0,1]$ berlaku

$$|f_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| = \frac{t^k}{k} < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$$

asalkan $k > \frac{1}{\varepsilon}$ atau $k \geq n$ dengan n merupakan bilangan asli pertama yang lebih besar daripada bilangan $\frac{1}{\varepsilon}$. Terlihat bahwa n dapat dipilih hanya bergantung pada ε saja.

Jadi, barisan fungsi (f_k) konvergen ke fungsi f pada $[0,1]$ dengan $f(t) = 0$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Dapat dipilih bilangan asli n yang hanya bergantung pada ε saja, tak bergantung pada $t \in [0,1]$, sehingga untuk setiap $k \geq n$ dan $t \in [0,1]$ berakibat

$$|f_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

2.5 Ruang Banach

Pada bagian ini akan diberikan terlebih dahulu konsep dasar ruang vektor yang diambil dari Berberian, 1961:3 sebagai berikut:

Ruang vektor *V* atas ¢ adalah himpunan obyek – obyek *x, y, z,* ... disebut vektor. Vektor nol dinotasikan dengan θ, untuk setiap vektor *x*, negatif dari *x* dinotasikan dengan –*x*. Aksioma – aksioma berikut diasumsikan berlaku:

(A) Untuk setiap pasangan vektor *x*, *y* di *V* ada vektor yang disebut "jumlah *x* dan *y*", dinotasikan *x* + *y* di *V*, dan berlaku:

- $x + y = y + x$ untuk setiap $x, y \in V$
- $x + (y + z) = (x + y) + z$ untuk setiap $x, y, z \in V$
- Terdapat dengan tunggal $\theta \in V$ sedemikian sehingga $x + \theta = x$ untuk setiap $x \in V$
- Untuk setiap $x \in V$, ada $-x \in V$ yang disebut negatif x sehingga $x + (-x) = \theta$

(B) Untuk setiap skalar λ dan setiap vektor *x* di *V*, ada vektor yang disebut "hasil kali *x* dengan λ", dituliskan dengan λ*x* di *V*, dan berlaku:

- $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ untuk setiap $x, y \in V$ dan λ adalah skalar
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ untuk setiap $x \in V$ dan λ, μ adalah skalar
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$ untuk setiap $x \in V$ dan λ, μ adalah skalar
- $1 \,.\, x = x$ untuk setiap $x \in V$ sebagai catatan, $x + (-y)$ dapat ditulis dengan $x - y$.

Untuk sebarang ruang vektor:

(i) Persamaan vektor $x + y = z$ mempunyai satu-satu penyelesaian x

(ii) Jika $z + z = z$ maka $z = \theta$

(iii) $\lambda\theta = \theta$ untuk setiap skalar λ

(iv) $0x = \theta$ untuk setiap vektor x

(v) Jika $\lambda x = \theta$ maka $\lambda = 0$ atau $x = \theta$

Selanjutnya diberikan definisi lain, yaitu:

Ruang vektor atau ruang linier adalah himpunan tak kodong vektor V yang dapat dijumlahkan dan dikalikan skalar dengan suatu bilangan menghasilkan vektor yang memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $r + s \in V$
2. $r + s = s + r$
3. ada $0 \in V$, sehingga $0 + s = s + 0$
4. $r + (s + t) = (r + s) + t$
5. ada $-s \in$, sehingga $s + (-s) = (-s) + s = 0$
6. $kr \in V$
7. $k(r+s) = kr + ks$
8. $(k + 1)s = kr + 1r$
9. $k(mr) = (km)r$
10. $1r = r$

Selanjutnya pada bagian ini akan diberikan konsep dasar ruang Bernorm yang diambil dari Darmawijaya, 2007 dan Bartel & Sherbert, 2000 sebagai berikut:

Diberikan ruang linier X, dengan fungsi $x \in X \rightarrow ||x|| \in R$ yang memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- $||x|| \geq 0$ untuk setiap $x \in X$
- $||x|| = 0$ jika dan hanya jika $x = 0$, dengan 0 vektor nol
- $||ax|| = |a|.||x||$ untuk setiap skalar a dan $x \in X$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ untuk setiap $x, y \in X$

Norm atau norma pada X dan bilangan non-negatif $||x||$ disebut norma vektor *x*. Ruang linie X yang dilengkapi dengan suatu norm $||.||$ disebut ruang bernorm (*norm space*) dan dapat ditulis dengan X, $||.||$ atau X saja asalkan norm-nya sudah diketahui. (Darmawijaya, 2007)

Teorema 2.5.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang bernorm terhadap norm $||.||_p$ merupakan ruang barisan $l_p(1 \leq p < \infty)$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\tilde{x} = (x_n),\ \tilde{y} = (y_n) \in l_p$ dengan $1 \leq p < \infty$ dan skalar a sehingga diperoleh:

1. $\left||\tilde{x}|\right|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_n| \geq 0$ untuk setiap *n*.

   $\left||\tilde{x}|\right|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow |x_n| \geq 0\ \forall\ n \Leftrightarrow \tilde{x} = \{0\} = \tilde{0}$.
2. $||a\tilde{x}||_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|ax_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |a|(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = |a|\left||x|\right|_p$

   Jelas bahwa $\left||ax|\right|_p < \infty$.
3. $\left||\tilde{x} + \tilde{y}|\right|_p \leq \left||\tilde{x}|\right|_p + \left||\tilde{y}|\right|_p = (\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{n=1}^{\infty}|y_n|^p)\wedge\frac{1}{p} < \infty$

Berdasarkan 1, 2, dan 3 terbukti bahwa l_p merupakan ruang linier dan norm $||.||_p$ pada norm l_p. Jadi, $(l_p, ||.||_p)$ ruang norm. ■

Kemudian diberikan definisi lain, yaitu:

Barisan Cauchy adalah barisan (x_n) diruang bernorm $(X, ||.||)$ jika $\forall\ \varepsilon > 0$ terdapat $n_0 \in N,$ sedemikian sehingga $\forall\ m, n\ \geq n_0$ berlaku $||x_m - x_n|| < \varepsilon$ (Bartel & Sherbert, 2000).

Contoh:

Misalkan $(\frac{1}{n})$ merupakan barisan Cauchy. Diberikan $\varepsilon > 0$, pilih $n_0 \in \mathbb{N}$. Maka $\forall\, m, n \geq n_0$ berlaku $||x_m - x_n|| < \varepsilon$.

Bukti:

Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$, jika $m, n \geq n_0$ maka $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n_0}, \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0}$.

Tinjau:

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \left|\frac{1}{m}\right| + \left| -\frac{1}{n}\right|$$
$$\leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$

Pilih $n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ sehingga jika $m, n \geq n_0$ maka

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_o} = \frac{2}{n_0} < \varepsilon$$ ■

Teorema 2.5.2 (Bartle & Sherbert, 2000)

Barisan Cauchy merupakan barisan yang konvergen didalam ruang bernorm $(X, ||.||)$.

Bukti:

Diberikan $(x_n) \in X$ dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ dan $\varepsilon < 0$ maka $\exists\, n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku $d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall\, n \geq \mathbb{N}$, akibatnya $m, n \geq \mathbb{N}$ berlaku $d(x_m, x_n) \leq d(x, x_m) + d(x, x_n) < \varepsilon$. ■

Diberikan definisi, jika setiap barisan Cauchy konvergen maka dapat disebut ruang bernorm yang lengkap (Bartle & Sherbert, 2000).

Kemudian selanjutnya akan diberikan konsep dasar ruang Banach yang diambil dari Darmawijaya, 2007.

Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm *X* berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di *X* adalah konvergen.

Kemudian, ruang vektor bernorma *V* disebut ruang Banach jika *V* lengkap di dalam ruang metrik yang didefinisikan oleh norm. Ruang vektor bernorma *V* dikatakan lengkap jika terhadap norma || . || dengan $d(a,b) = \|a - b\|$, *V* merupakan ruang metrik lengkap, yaitu jika untuk setiap barisan Cauchy (*xn*) di dalam *V* (yaitu dengan sifat $\|xn - xm\| \to 0$), terdapat $x \in V$ sehingga $\|x - xn\| \to 0$.

Teorema 2.5.3

Ruang banach dengan $1 \leq p < \infty, p \in \mathbb{R}$, maka $(l_p, ||.||)$.

Bukti:

Sudah terbukti $(l_p, ||.||)$ merupakan ruang Bernorm, sehingga akan dibuktikan bahwa ruang Bernorm itu lengkap. Akan ditunjukkan untuk $1 \leq p < \infty,$ diambil sebarang barisan Cauchy $\tilde{u}^{(j)} \subset l_p$ dengan

a) $\tilde{u}^{(j)} = \left(\tilde{u}_k{}^{(j)}\right) = \left\{\tilde{u}_1{}^{(j)}, \tilde{u}_2{}^{(j)}, \tilde{u}_3{}^{(j)}, \dots\right\}$

Untuk sembarang $\varepsilon > 0 \; \exists \; n_0$ sehingga $\forall \; i, j \; \geq n_0$ berlaku

b) $\left|\left|\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)}\right|\right|_p < \frac{\varepsilon}{4}$ atau $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)}\right|^p < \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^p$

Hal ini mengakibatkan $\forall \; i, j \; > 0$ diperoleh $\left|\tilde{u}^{(i)} - \tilde{u}^{(j)}\right| < \frac{\varepsilon}{4}, \forall \; k.$

Sehingga diperoleh barisan Cauchy $\tilde{u}_k{}^{(j)} \; \forall \; k.$ Jadi terdapat bilangan x_k sehingga $\lim_{j\to\infty} \tilde{u}_k{}^{(j)} = u_k$ atau $\lim_{n\to\infty}\left|\tilde{u}_k{}^{(j)} - x_k\right| = 0.$

c) $(\sum_{k=1}^{\infty}|u_k|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|u_k - u_k^{(j)} + u_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$= \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k^{(i)} - u_k^{(j)} + u_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$= \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k^{(i)} - u_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$

Yang berarti $\tilde{u} = (u_k) \in l_p$.

d) $\left||\tilde{u} - \tilde{u}^j|\right| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k - u_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{i\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|u_k - u_k^{(j)}\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{4}$ maka barisan $(\tilde{u}^{(j)})$ konvergen ke $\tilde{u}$.

Berdasarkan hasil dari c) dan d), dapat disimpulkan bahwa terbukti barisan Cauchy $(\tilde{u}^{(j)}) \subset l_p$ konvergen ke $\tilde{u} = (u_k) \in l_p$ atau terbukti bahwa $(l_p, ||.||, 1 \leq p < \infty$ merupakan ruang Banach. ■

2.6 Ruang Barisan Selisih

Pada bagian ini akan diberikan terlebih dahulu konsep dasar ruang barisan yang diambil dari H.Kizmaz, 1981 sebagai berikut:

misalkan diberikan X yaitu koleksi semua barisan bilangan real, $X = \{\tilde{u} = (u_k): u_k \subset \mathbb{R}\}\ \forall\, p \subset \mathbb{R}$ dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan:

$$l_p = \left\{\tilde{u} = (u_k) \subset \mathbb{R}: \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

Dan norm pada l_p yaitu

$$\left||\tilde{u}|\right| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Selanjutnya diberikatan definisi lain, yaitu:

Himpunan dari barisan bilangan disebut ruang barisan l_p apabila memunuhi syarat berikut:

$$l_p = \{\bar{x} = (x_n) \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

dengan l_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$.

$$l_p(\Delta) = \{\bar{x} = (x_n) : \Delta x \in l_p\}$$

dengan $l_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in l_p$.

$$l_p(\Delta_2) = \{\bar{x} = (x_n) : \Delta_2 x \in l_p\}$$

dengan $l_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in l_p$.

Kemudian diberikan konsep dasar ruang barisan selisih yang diambil dari Kizmaz, H. 1981 sebagai berikut:

Jika $\tilde{x}$= (xk) suatu barisan bilangan dan

$\Delta\tilde{x}$ = $(x_{k+1} - x_k)$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisann $\tilde{x}$ = (x_k)

$\vdots$

$\Delta_m\tilde{x} = (\Delta_m\tilde{x}_k = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i})$, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x}$ = (x_k) .

Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan $\Delta\tilde{x} = (\Delta x_k)$, barisan selisih kedua, $\Delta_2\tilde{x} = (\Delta_2 x_k)$, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m $\Delta_m x_k = (\Delta_m x_k)$.

Contoh:

1. Misalkan $(x_k) = \left(\frac{1}{k}\right)$ didefinisikan $(x_n) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{k}\right\}$ untuk setiap *k = 1, 2, 3, ...* . Akan dicari $\Delta_2\tilde{x}$

   $\Delta_2\tilde{x} = \{(x_3 - 2x_2 + x_1), (x_4 - 2x_3 + x_2), \ldots\}$

   $\Delta_2\tilde{x} = \{\left(\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right), \left(\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right), \ldots\}$

   $\Delta_2\tilde{x} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \ldots\right\}$

   Kemudian diperoleh barisan selisih yang kedua yaitu

$$\Delta_2\tilde{x} = \{\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \ldots\}$$

Definisi lainnya, diberikan α yaitu koleksi semua barisan bilangan real, $\alpha = \{\bar{x} = (x_k) : x_k \in \mathbb{R}\}$ untuk setiap $p \in \mathbb{R}$ dengan $1 \le p < \infty$ dideefinisikan

$$l_2 = \left\{ \bar{x} = (x_k) : x_k \in \mathbb{R} : \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^2 \right\}$$

dan norm pada l_2 yaitu

$$\|\bar{x}\|_{l_2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^2$$

Kemudian diberikan definisi, ruang barisan selisih tingkat dua didefinisikan sebagai

$$l_2(\Delta) = \{\bar{u} = (u_k) \subset \mathbb{R} : \Delta\bar{u} \in l_2\}$$

terhadap norm

$$\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |u_1| + \|\Delta\bar{u}\|_2$$

dengan rumus umum barisan selisih:

$$\Delta\bar{u} = (\Delta u_k) = \left(\sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} u_{k+m-i} \right)$$

dimana

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{u} &= \left(\sum_{i=0}^{1} (-1)^i \binom{1}{i} u_{k+1-i} \right) \\
&= \left\{ \left((-1)^0 \tbinom{1}{0} u_{k+1-0} \right) + \left((-1)^1 \tbinom{1}{1} u_{k+1-1} \right) \right\} \\
&= \{(1 \cdot 1 \cdot u_{k+1}) + (-1 \cdot 1 u_k)\} \\
&= (u_{k+1} - u_k) \\
&= \{u_2 - u_1, u_3 - u_2, u_4 - u_3, \dots\}
\end{aligned}$$

atau

$$\begin{aligned}
\Delta u_1 &= (u_2 - u_1) \\
\Delta u_2 &= (u_3 - u_2) \\
\Delta u_3 &= (u_3 - u_4) \\
&\vdots \\
\Delta u_k &= (u_{k+1} - u_k)
\end{aligned}$$

Langkah pertama akan ditunjukkan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang linier, sebagai berikut:

Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in l_2(\Delta) \Leftrightarrow \Delta\bar{u}, \Delta\bar{v} \ \in l_2$

$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta u_k|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^{\infty} |u_{k+1} - u_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$

dan

$(\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta v_k|^2)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$

diperoleh,

$\Delta(\bar{u} + \bar{v}) = \Delta\bar{u} + \Delta\bar{v} \ \in l_2$

$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta u_k + \Delta v_k|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(u_{k+1} - u_k) + (v_{k+1} - v_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(u_{k+1} - u_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(v_{k+1} - v_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta u_k|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta v_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$

Dengan kata lain, $\bar{u}, \bar{v} \in l_2(\Delta)$..(2.6.a)

untuk setiap skalar a dan $\bar{u} \in l_2(\Delta)$ diperoleh

$\Delta(\alpha\bar{u}) = (\Delta\alpha u_k)$

$\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha(u_{k+1} + u_k)|^2)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^2 |(u_{k+1} - u_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\alpha| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(u_{k+1} - u_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$= |\alpha| (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta u_k|^2)^{\frac{1}{2}} < \infty$..(2.6.b)

Berdasarkan persamaan (2.6.a) dan (2.6.b) terbukti bahwa selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang linear. ∎

Langkah kedua akan ditunjukkan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang Bernorm terhadap norm $\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |u_1| + \|\Delta\bar{u}\|_2$ sebagai berikut:

1. Untuk setiap $\bar{u} \in l_2(\Delta)$

   $\Leftrightarrow \Delta\bar{u} \in l_2$

   $\Leftrightarrow (\sum_{k=1}^{\infty} |\Delta u_k|^2)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |(u_{k+1} - u_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$

selanjutnya,

$$\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |u_1| + \|\Delta\bar{u}\|_2$$

$$= |u_k| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

$$= |u_k| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_{k+1} - u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \geq 0$$

dan

$$\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |u_1| + \|\Delta\bar{u}\|_2$$

$$\Leftrightarrow |u_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow |u_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_{k+1} - u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$\Leftrightarrow |u_1| = 0$ dan $\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_{k+1} - u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$ untuk setiap k

$\Leftrightarrow |u_1| = 0$ dan $|u_2 - u_1| = 0, |u_3 - u_2| = 0, \ldots$

$$\Leftrightarrow u_1 = 0, u_2 - u_1 = 0, u_3 - u_3 = 0, \ldots$$

$$\Leftrightarrow u_1 = u_2 = u_3 = \cdots = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{u} = \{0\} = \bar{0}$$

2. Untuk setiap α skalar dari $\bar{u} \in l_2(\Delta)$

$$\|\alpha\bar{u}\|_{(\Delta,2)} = |\alpha u_1| + \|\Delta\alpha\bar{u}\|_2$$

$$\Leftrightarrow |\alpha u_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha(u_{k+1} - u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|\,|u_1| + |\alpha|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|u_{k+1} - u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|\left(|u_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|(|u_1| + \|\Delta\tilde{u}\|_2)$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|\,\|\bar{u}\|_{(\Delta,2)}$$

3. Untuk setiap $\bar{u}, \bar{v} \in l_2(\Delta)$

$$\|\bar{u} + \bar{v}\|_{(\Delta,2)} = |u_1 + u_2| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta(u_k + u_k)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |u_1| + |v_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq |u_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta u_k|^2\right)^{\frac{1}{2}} + |v_1| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= |u_1| + \|\Delta u_k\|_2 + |v_1| + \|\Delta v_k\|_2$$

$$= \|\bar{u}\|_{(\Delta,2)} + \|\bar{v}\|_{(\Delta,2)}$$

Berdasarkan 1, 2, 3 terbukti bahwa $l_2(\Delta)$ merupakan ruang Bernorm. ■

Langkah ketiga akan ditunjukkan ruang barisan selisih $l_2(\Delta)$ merupakan ruang Bernorm yang lengkap, sebagai berikut:

Diambil sebarang barisan Cauchy, $\left(\bar{u}^{(i)}\right) = \{\bar{u}^{(1)}, \bar{u}^{(2)}, \dots\} \subset l_2(\Delta)$ dengan,

$$\Delta\bar{u}^{(1)} = \{\Delta{u_1}^{(1)}, \Delta{u_2}^{(1)}, \dots, \Delta{u_k}^{(1)}, \dots\}$$

$$\Delta\bar{u}^{(2)} = \{\Delta{u_1}^{(2)}, \Delta{u_2}^{(2)}, \dots, \Delta{u_k}^{(2)}, \dots\}$$

$$\vdots$$

$$\Delta\bar{u}^{(i)} = \{\Delta{u_1}^{(i)}, \Delta{u_2}^{(i)}, \dots, \Delta{u_k}^{(i)}, \dots\}$$

diperoleh

$$\Delta\bar{u}^{(i)} = \left(\Delta{u_k}^{(i)}\right) = \{\Delta{u_1}^{(i)}, \Delta{u_2}^{(i)}, \dots, \Delta{u_k}^{(i)}, \dots\}$$

$$\Delta\bar{u}^{(j)} = \left(\Delta{u_k}^{(j)}\right) = \{\Delta{u_1}^{(j)}, \Delta{u_2}^{(j)}, \dots, \Delta{u_k}^{(j)}, \dots\}$$

dengan $\Delta\bar{u}^{(i)}, \Delta\bar{u}^{(j)} \in l_2(\Delta)$.

Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 sehingga untuk setiap dua bilangan asli $i, j \geq n_0$ berlaku:

$$\left\|\Delta\bar{u}^{(i)} - \Delta\bar{u}^{(j)}\right\|_{(\Delta,2)} < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left({u_1}^{(i)} - {u_1}^{(j)}\right) + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\Delta\left({u_k}^{(i)} - {u_k}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad \text{(2.6.c)}$$

dilain pihak,

$$\Delta\left(\bar{u}^{(i)} - \bar{u}^{(j)}\right) = \left({u_1}^{(i)} - {u_1}^{(j)}, {u_2}^{(i)} - {u_2}^{(j)}, \dots, {u_k}^{(i)} - {u_k}^{(j)}, \dots\right)$$

$$= \left\{({u_2}^{(i)} - {u_2}^{(j)}) - \left({u_1}^{(i)} - {u_1}^{(j)}\right) - ({u_3}^{(i)} - {u_3}^{(j)}) - ({u_2}^{(i)} - {u_2}^{(j)}) - \cdots\right\}$$

$$= \left\{({u_{k+1}}^{(i)} - {u_{k+1}}^{(j)}) - \left({u_k}^{(i)} - {u_k}^{(j)}\right)\right\}$$

$$= \left\{\left({u_{k+1}}^{(i)} - {u_k}^{(j)}\right) - \left({u_{k+1}}^{(i)} - {u_k}^{(j)}\right)\right\} \quad \text{(2.6.d)}$$

Berdasarkan persamaan (2.6.c) dan (2.6.d) diperoleh:

$$\left|u_1{}^{(i)} - u_1{}^{(j)}\right| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(u_{k+1}{}^{(i)} - u_k{}^{(j)}\right) - \left(u_{k+1}{}^{(i)} - u_k{}^{(j)}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

untuk setiap $i, j \geq n_0$, yang berakibat:

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|\left(u_{k+1}{}^{(i)} - u_k{}^{(j)}\right) - \left(u_{k+1}{}^{(i)} - u_k{}^{(j)}\right)\right| = 0$$

atau

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|\bar{u}_1{}^{(i)} - \bar{u}_1{}^{(j)}\right| = 0\,, \lim_{i,j\to\infty}\left|\bar{u}_2{}^{(i)} - \bar{u}_2{}^{(j)}\right| = 0,$$

$$\lim_{i,j\to\infty}\left|\bar{u}_1{}^{(i)} - \bar{u}_1{}^{(j)}\right| = 0\,, \lim_{i,j\to\infty}\left|\bar{u}_2{}^{(i)} - \bar{u}_2{}^{(j)}\right| = 0\,, \ldots$$

Jadi, dapat disimpulkan bahwa barisan Cauchy $\left(\bar{u}_k{}^{(i)}\right)$ lengkap dan konvergen.

Dibentuk,

$$\begin{array}{c}
\bar{u}_1{}^{(i)} \dashrightarrow u_1 \\
\bar{u}_2{}^{(i)} \dashrightarrow u_2 \\
\vdots \\
\bar{u}_k{}^{(i)} \dashrightarrow u_k \\
\vdots \\
\bar{u}^{(i)} = (\bar{u}_k{}^{(i)}) \dashrightarrow (u_k) = \bar{u}
\end{array}$$

Jadi barisan $\bar{u}^{(i)}$ konvergen ke $\bar{u}$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $\bar{u} \in l_2(\Delta)$, sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\|\Delta_1\bar{u}\|_2 &= \left\|\Delta_1\bar{u} - \Delta_1\bar{u}^{(i)} + \Delta_1\bar{u}^{(i)}\right\|_{(\Delta_1,2)} \\
&\leq \left\|\Delta_1\bar{u} - \Delta_1\bar{u}^{(i)}\right\|_{(\Delta_1,2)} + \left\|\Delta_1\bar{u}^{(i)}\right\|_{(\Delta_1,2)} < \infty,
\end{aligned}$$

oleh karena itu,

$$\|\bar{u}\|_{(\Delta_1,2)} = |u_1| + \|\Delta_1\bar{u}\|_2 < \infty.$$

Berakibat $\bar{u} \in l_2(\Delta)$.

Sehingga barisan Cauchy $\left(\bar{u}^{(i)}\right) \subset l_2(\Delta)$ konvergen ke $\bar{u} \in l_2(\Delta)$. Berdasarkan langkah diatas terbukti bahwa $l_2(\Delta)$ lengkap dan $l_2(\Delta)$ merupakan ruang Banach.

Contoh:

Diberikan suatu barisan $\bar{u} = \left(\frac{1}{k^2}\right) \in l_2(\Delta)$ sebagai berikut:

$$\left(\frac{1}{k^2}\right) = \left\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots\right\}$$

sehingga

$$\Delta_1 x_k = (x_{k+1} - x_k)$$

$$\begin{aligned}
\Delta_1\left(\frac{1}{k^2}\right) &= \left\{\left(\frac{1}{4} - 1\right), \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right), \ldots\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{-3}{4}\right), \left(\frac{-5}{36}\right), \left(\frac{-7}{144}\right), \ldots\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{-3}{2^2}\right), \left(\frac{-5}{6^2}\right), \left(\frac{-7}{12^2}\right), \ldots\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{-3}{(1.2)^2}\right), \left(\frac{-5}{(2.3)^2}\right), \left(\frac{-7}{(3.4)^2}\right), \ldots\right\} \\
&= \left(\frac{-(2k+1)}{(k^2(k+1)^2)}\right)
\end{aligned}$$

selanjutnya,

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta_1\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\|_2 &= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-(2k+1)}{(k^2(k+1)^2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{-2k}{(k^2(k+1)^2)} + \frac{1}{(k^2(k+1)^2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{(k(k+1)^2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(k^2(k+1)^2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty
\end{aligned}$$

akan ditunjukkan $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{(k^2(k+1)^2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{2}{(k(k+1)^2)}\right|^2 &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^2}{k^2(k)^4} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^2}{k^6} \\
&= 2^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^6} \quad \text{...(2.6.a)}
\end{aligned}$$

selanjutnya akan ditunjukkan $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(k^2(k+1)^2)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(k^2(k+1)^2)}\right|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4(k)^4}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^8} \text{ ....(2.6.b)}$$

Dari persamaan (2.6.a) dan (2.6.b) terbentukkah suatu deret $-p$ sebagai berikut:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$$

deret ini merupakan deret tak hingga yang konvergen untuk $p > 1$.

Kemudian,

$$\|\bar{u}\|_{(\Delta_1,2)} = |u_1| + \|\Delta_1 \bar{u}\|_2$$

$$= \left|\frac{-3}{4}\right| + \left\|\Delta_1 \left(\frac{1}{k^2}\right)\right\|_2 < \infty$$

disumpulkan bahwa barisan $\bar{u} = \left(\frac{1}{k^2}\right) \in l_2(\Delta)$.

III. METODELOGI PENELITIAN

3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan waktu penelitian dilaksanakan pada semester ganjil tahun akademik 2022/2023.

3.2 Metodelogi Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah studi pustaka yaitu metode pendekatan yang pembahasannya didasarkan atas buku-buku dan jurnal-jurnal yang berhubungan dengan bahasan integral reimann bernilai barisan selisih tingkat dua. Sedangkan langkah-langkah yang dilakukan dalam melaksanakan penelitian ini adalah :

1. Membuktikan fungsi $\bar{f} \in \ell_2(\Delta)$ sebagai berikut:
   a. Mencari barisan selisih dua dari fungsi $\bar{f}$ dengan rumus $\Delta(\mathcal{R}, \bar{f}) = \Delta\left(\frac{x}{k}\right) = \left(\int_a^b f_{k+1} - \int_a^b f_k\right)$.
   b. Membuktikan norm barisan selisih dua dari fungsi $\bar{f}$ konvergen yaitu $\left\|\Delta(\mathcal{R}, \bar{f})\right\|_{\ell_2} < \infty$.
2. Membuktikan fungsi $\bar{f}$ terintegral Riemann pada partisi $[a, b]$ dengan rumus $\left\|S(\bar{f}; P) - \bar{u}\right\|_{\ell_2(\Delta)} < \varepsilon$

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya, dapat ditarik kesimpulan terkait integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat satu, yaitu sebagai berikut.

1. Fungsi $\bar{f} = (f_k) : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \ell_2(\Delta)$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$, ditulis singkat dengan $\bar{f} \in \mathcal{R}[a,b]$ jika terdapat suatu barisan $\bar{u} \in \ell_2(\Delta)$ sedemikian sehingga $\forall \varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ dan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, maka berlaku $\left\|S(\bar{f}; P) - \bar{u}\right\|_{\ell_2(\Delta)} = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*)\Delta_i x - \bar{u}\right\|_{\ell_2(\Delta)} < \varepsilon$ dengan $\bar{u} = \int_a^b \bar{f} = \int_a^b \bar{f}(x)\, dx$.
2. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [a,b] \subset \mathbb{R} \to \ell_2(\Delta)$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika fungsi $(f_k): [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = 1,2,\dots$ masing-masing terintegral Riemann pada $[a,b]$.
3. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [a,b] \subset \mathbb{R} \to \ell_2(\Delta)$ terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $\lim_{\|P\|\to 0} S(\bar{f}; P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*)\, \Delta x_i = \bar{u}$ dengan $\bar{u} = (u_k) \in \ell_2(\Delta), k = 1,2, \dots.$

5.2 Saran

Pembahasan skripsi ini hanya berfokus pada integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat dua, sehingga penulis menyarankan agar dilakukan penelitian pada barisan selisih lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2000). *Bartle_Introduction-To-Real-Analysis-New-Edition.Pdf* (p. 400).

Berberian, S.K. 1961. *Introduction to Hilbert Space*. Oxford University Press, New York.

Darmawijaya, S. 2006. *Pengantar Analisis Real*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Darmawijaya, S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Universitas Gajah Mada, Yogyakarta.

Kizmaz, H. 1981. On Certain Sequence Space. *Journals Canadian Mathematical Bulletin*. 24(2): 169-176.

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Function Analysis with Application*. Willey Classic Library, New York.

Muslich, Sutrima, dan S. Wibowo. 2016. Definisi Integral Riemann Melalui Pendekatan Barisan Fungsi Tangga. Prosiding. 768-775.

Purcell, S. E. Rigdon, Varberg, D., E. J. 2010. Kalkulus Edisi Kesembilan. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga. Jakarta.