II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam proses penelitian untuk mengkaji karakteristik penduga distribusi *generalized* gamma dengan metode *generalized moment* ini, penulis menggunakan definisi, teorema dan konsep dasar yang berkaitan dengan distribusi *generalized* gamma, pendugaan parameter dan metode *generalized moment* sebagai berikut:

2.1. Distribusi Gamma

Suatu peubah acak Y dikatakan berdistribusi gamma dengan parameter $\alpha > 0$ dan $\theta > 0$ jika dan hanya jika:

$$f(y) = \begin{cases} \frac{y^{\alpha-1}e^{-\left(\frac{y}{\theta}\right)}}{\Gamma(\alpha)\theta^{\alpha}}, 0 \leq y < \infty \\ 0, \qquad selainnya \end{cases} \tag{2.1}$$

Dimana

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\, dy \tag{2.2}$$

Nilai harapan dan ragam dari distribusi gamma masing-masing adalah

$$E(X) = \alpha\theta$$

$$Var(X) = \alpha\theta^2$$

(Wackerly et. al., 2008)

Distribusi gamma digeneralisasikan dengan tiga parameter yang disebut distribusi *generalized* gamma yang akan dikaji karakteristik pendugaan parameternya dalam penelitian ini. Berikut penjelasannya:

2.2. Distribusi *Generalized* Gamma

Suatu peubah acak *X* dikatakan mempunyai distribusi peluang *generalized* gamma dengan parameter α, β, dan θ jika dan hanya jika fungsi kepekatan peluang dari *X* adalah

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} \; ; x > 0 \; ; \; \alpha, \beta, \theta > 0 \qquad (2.3)$$

Parameter α dan β dikenal sebagai parameter bentuk dan parameter θ dikenal sebagai parameter skala (DiCiccio,1987).

Fungsi distribusi kumulatif dari distribusi *generalized* gamma adalah:

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} \, dx$$

Misal:

y=$\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}$ →x= $y^{\frac{1}{\beta}}\theta$

dy= $\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} dx$ dx= $\frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$

sehingga,

$$= \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-y} \frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} \, dy$$

$$= \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha-1}} e^{-y} \frac{1}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1}\, dy$$

$$= \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta\alpha-1} e^{-y} \frac{1}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} y^{\alpha-1} e^{-y}\, y^{\frac{1}{\beta}-1}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2} e^{-y}\, dy$$

Berdasarkan *mathematical handbook of formula and tables* oleh Abramowitz dan Stegun (1970), terdapat rumus:

$$\int x^n\, e^{\alpha x} dx = \frac{x^n e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{n}{\alpha} \int x^{n-1}\, e^{\alpha x} dx$$

$$\int x^n\, e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \left(x^n - \frac{n x^{n-1}}{\alpha} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{\alpha^2} - \cdots \frac{(-1)^n n!}{\alpha^n} \right)$$

Dimana n adalah bilangan positif.

Sehingga:

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\left. \frac{y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2}}{(-1)} \right|_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} - \left(\frac{\alpha+\frac{1}{\beta}-2}{(-1)} \right) \int_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-3} e^{-y}\, dy \right]$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\frac{e^{-y}}{(-1)} \left(y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2} - \frac{(\alpha+\frac{1}{\beta}-2)\, y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-3}}{(-1)} + \frac{(\alpha+\frac{1}{\beta}-2)(\alpha+\frac{1}{\beta}-3)\, y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-4}}{(-1)^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots \frac{(-1)^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2} (\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!}{(-1)^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2}} \right) \right]_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta}$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-e^{-y}\left(y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-3} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-3\right)y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-4} + \cdots + (\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right)\right]_0^{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2}} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{\alpha+\frac{1}{\beta}-3}} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-3\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{\alpha+\frac{1}{\beta}-4}} + \cdots + (\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right) - (-e^{-0}\left(0+0+0+\cdots+(\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right)\right]$$

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[-e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{(\alpha+\frac{1}{\beta}-2)}} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{(\alpha+\frac{1}{\beta}-3)}} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-3\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{(\alpha+\frac{1}{\beta}-4)}} + \cdots + (\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right) + \left(+(\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right)\right]$$

$$F(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}\left(\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)}} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-3\right)}} + \left(\alpha+\frac{1}{\beta}-2\right)\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-3\right)\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta^{\left(\alpha+\frac{1}{\beta}-4\right)}} + \cdots + (\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!$$

$$F(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\left(e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}\Gamma(\alpha+\frac{1}{\beta}-2+1)\sum_{k=0}^{\alpha+\frac{1}{\beta}-2}\frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta(n-k)}}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{\beta}-2+1-k)}\right) - (\alpha+\frac{1}{\beta}-2)!\right] \tag{2.4}$$

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai nilai harapan dan ragam dari distribusi *generalized* gamma. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

2.2.1 Nilai Harapan Distribusi *Generalized* Gamma

Menurut DiCicio (1987), nilai harapan dari distribusi *generalized* gamma adalah

$$E(X) = \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left[\alpha + \frac{1}{\beta}\right]$$

Bukti:

Berdasarkan (2.3), fungsi kepekatan peluang dari *X* adalah

$$f(x) = \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} \; ; x > 0 \; ; \; \alpha, \beta, \theta > 0$$

Maka nilai harapan dari distribusi *generalized* gamma dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{\beta\alpha}}{\theta^{\beta\alpha}}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}dx$$

Misal:

y=$\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}$ →x= $y^{\frac{1}{\beta}}\theta$

dy= $\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1}dx$ dx= $\frac{\theta}{\beta}y^{\frac{1}{\beta}-1}dy$

Sehingga,

$$= \int_{0}^{\infty} \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}y^{\alpha}e^{-y}\frac{\theta}{\beta}y^{\frac{1}{\beta}-1}dy$$

$$= \frac{\theta}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-1}e^{-y}dy$$

Berdasarkan (2.1), maka

$$\Gamma\left[\alpha+\frac{1}{\beta}\right]=\int_{0}^{\infty} y^{\alpha+\frac{1}{\beta}-1}e^{-y}dy$$

Sehingga,

$$E(X)=\frac{\theta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left[\alpha+\frac{1}{\beta}\right] \tag{2.5}$$

Jadi, terbukti bahwa nilai harapan dari distribusi *generalized* gamma adalah

$$E(X)=\frac{\theta}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left[\alpha+\frac{1}{\beta}\right]$$

Setelah mengetahui nilai harapan dari distribusi *generalized* gamma, kemudian akan dijelaskan mengenai ragam dari distribusi *generalized* gamma tersebut. Berikut penjelasannya:

2.2.2 Ragam Distribusi *Generalized* Gamma

Menurut DiCicio (1987), ragam dari distribusi *generalized* gamma adalah

$$Var\ (X)=\frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left[\alpha+\frac{2}{\beta}\right]-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left[\alpha+\frac{1}{\beta}\right]\right]^2\right]$$

Bukti:

$$Var\ (X)=E(X^2)-(E(X))^2$$

Sedangkan $E(X^2)$ dinyatakan sebagai berikut:

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{\infty} x^2\frac{\beta}{\Gamma(\alpha)}\frac{x^{\beta\alpha-1}}{\theta^{\beta\alpha}}e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}}dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha+1}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta} dx$$

Misal:

y=$\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta$ →x= $y^{\frac{1}{\beta}}\theta$

dy= $\frac{\beta}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta-1} dx$ dx= $\frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$

Sehingga,

$$= \int_0^\infty x \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \frac{x^{\beta\alpha}}{\theta^{\beta\alpha}} e^{-y} \frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$$

$$= \int_0^\infty y^{\frac{1}{\beta}} \theta \frac{\beta}{\Gamma(\alpha)} \left[\left(\frac{x}{\theta}\right)^\beta\right]^\alpha e^{-y} \frac{\theta}{\beta} y^{\frac{1}{\beta}-1} dy$$

$$= \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha+\frac{2}{\beta}-1} e^{-y} dy$$

Berdasarkan (2.1), maka

$$\Gamma\left[\alpha + \frac{2}{\beta}\right] = \int_0^\infty y^{\alpha+\frac{2}{\beta}-1} e^{-y} dy$$

Sehingga,

$$E(X^2) = \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left[\alpha + \frac{2}{\beta}\right] \qquad (2.6)$$

Jadi, dengan menggunakan persamaan (2.5) dan (2.6) diperoleh

$$Var\ (X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left[\alpha + \frac{2}{\beta}\right] - \left[\frac{\theta}{\Gamma(\alpha)} \Gamma\left[\alpha + \frac{1}{\beta}\right]\right]^2$$

$$= \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)}\Gamma\left[\alpha + \frac{2}{\beta}\right] - \frac{\theta^2}{[\Gamma(\alpha)]^2}\left[\Gamma\left[\alpha + \frac{1}{\beta}\right]\right]^2$$

$$= \frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left[\alpha + \frac{2}{\beta}\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left[\alpha + \frac{1}{\beta}\right]\right]^2\right] \qquad (2.7)$$

Jadi, terbukti bahwa ragam dari distribusi *generalized* gamma adalah

$$\frac{\theta^2}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left[\alpha + \frac{2}{\beta}\right] - \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\Gamma\left[\alpha + \frac{1}{\beta}\right]\right]^2\right]$$

Selanjutnya akan dibahas mengenai definisi, teorema dan konsep dasar pendugaan parameter yang berkaitan untuk menduga parameter distribusi *generalized* gamma.

2.3. Pendugaan Parameter

Pendugaan parameter berarti melakukan estimasi terhadap nilai dugaan/taksiran suatu parameter tertentu, karena pada umumnya nilai parameter suatu distribusi tidak diketahui.

Definisi 2.1

Misalkan suatu peubah acak X memiliki fungsi kepekatan peluang yang bergantung pada suatu parameter tak diketahui θ dengan sebarang nilai dalam suatu himpunan ruang parameter Ω, maka dinotasikan dengan

$$f(x;\theta), \qquad \theta \epsilon \Omega$$

(Hogg and Craig, 1995).

Definisi 2.2

Suatu statistik T = $t(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ yang digunakan untuk menduga nilai $\tau(\theta)$ disebut sebagai penduga $\tau(\theta)$, dan diamati nilai dari statistik t = $t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ disebut sebagai dugaan $\tau(\theta)$ (Bain and Engelhardt, 1992).

Berkaitan dengan pendugaan parameter bagi distribusi *generalized* gamma, akan dijelaskan beberapa sifat penduga yang baik sebagai berikut:

Definsi 2.3 (Penduga Tak Bias)

Suatu penduga T dikatakan penduga tak bias bagi $\tau(\theta)$ jika:

$$E(T) = \tau(\theta)$$

Untuk semua $\theta \epsilon \Omega$. Sebaliknya dikatakan bahwa T merupakan penduga yang bias bagi $\tau(\theta)$ (Bain and Engelhardt, 1992).

Definisi 2.4 (Penduga Varian Minimum)

Misal T^* merupakan penduga tak bias $\tau(\theta)$, maka untuk sebarang penduga tak bias *T* bagi $\tau(\theta)$, disebut penduga varians minimum jika Var $(T^*) \leq \mathrm{Var}(T)$ untuk setiap $\theta \epsilon \Omega$, dimana

$$Var(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{nE\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ln f(x;\theta)\right]^2}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Definisi 2.5 (Penduga Konsisten)

Jika $\{T_n\}$ merupakan rangkaian dari penduga $\tau(\theta)$. Penduga ini dikatakan penduga yang konsisten bagi $\tau(\theta)$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P[\,|T_n - \tau(\theta)| < \varepsilon] = 1, \forall\theta\epsilon\Omega$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Teorema 2.1 (*Tchebysheff's Inequality*)

Misalkan Y peubah acak dengann mean μ dan ragam berhingga σ^2. Maka, untuk setiap k > 0,

$$P(|Y - \mu|) < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

atau

$$P(|Y - \mu|) \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

(Wackerly et. al. ,2008).

Dalam pendugaan varian minimum erat kaitannya dengan informasi fisher dan pertidaksamaan *Rao-Cramer*. Perlu diketahui beberapa konsep dan definisinya sebagai berikut:

2.4. Informasi Fisher

Informasi fisher digunakan dalam menemukan pertidaksamaan *Rao-Cramer*. Menurut Hogg and Craig (1995), informasi fisher dinotasikan dengan I(θ), dimana

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 f(x;\theta)dx$$

atau

$$I(\theta) = -E\left\{\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2} f(x;\theta)dx$$

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$. Maka fungsi kemungkinannya adalah

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$$

Sehingga,

$$lnL(\theta) = lnf(x_1;\theta) + lnf(x_2;\theta) + \cdots + lnf(x_n;\theta)$$

dan

$$\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial lnf(x_1;\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial lnf(x_2;\theta)}{\partial\theta} + \cdots + \frac{\partial lnf(x_n;\theta)}{\partial\theta}$$

Dari persamaan diatas, dapat didefinisikan bahwa informasi fisher dalam sampel acak sebagai

$$I_n(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial lnL(\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

Akan tetapi, setiap hubungan dari hasil akhir perhitungan $I(\theta)$, dan karena

$$I_n(\theta) = nI(\theta)$$

Merupakan informasi fisher dalam sampel acak berukuran n adalah n kali informasi fisher dalam satu pengujian (Hogg and Craig, 1995).

Informasi fisher tidak selalu dapat digunakan dalam sampel acak. Jika penduganya merupakan suatu vektor maka yang digunakan adalah matriks informasi fisher. Berikut penjelasannya:

2.5. Matriks Informasi Fisher

Pada kasus multivariat, jika θ merupakan suatu vektor dari parameter, maka $I(\theta)$ adalah matriks informasi fisher.

Misalkan sampel acak $x_1, x_2, \dots, x_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x; \theta_1, \theta_2), (\theta_1, \theta_2) \epsilon\, \Omega$ dalam kondisi yang ada. Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan dikatakan bahwa ruang dari X dimana $f(x; \theta_1, \theta_2) > 0$ yang tidak meliputi $\theta_1$dan θ_2, dan dapat diturunkan dibawah tanda integral.

Sehingga matriks informasi fisher adalah sebagai berikut:

$$I_n = n \begin{bmatrix} E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1}\right]^2\right\} & E\left\{\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1}\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2}\right\} \\ E\left\{\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1}\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2}\right\} & E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$I_n = -n \begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial {\theta_1}^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial {\theta_2}^2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg and Craig, 1995).

Menurut Elandt-Jhonson (1971), misalkan terdapat s parameter $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ atau dalam bentuk vektor $\theta' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ dan terdapat logaritma fungsi kemungkinan maka informasi yang diperoleh dari sampel tentang $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s$ dapat ditulis dalam bentuk matriks informasi fisher s x s $I(\theta)$. Dimana elemennya didefinisikan sebagai berikut:

$$I_{ij}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = I_{ij}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right), \text{dimana i, j} = 1,2, \dots, \text{s}$$

Dan untuk i = j adalah sebagai berikut:

$$I_{ii}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s) = I_{ii}(\theta) = -E\left(\frac{\partial^2 lnL}{\partial{\theta_i}^2}\right)$$

Sehingga bentuk matriks informasi fisher tersebut adalah

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} I_{11}(\theta) & I_{12}(\theta) & \cdots & I_{1s}(\theta) \\ I_{21}(\theta) & I_{22}(\theta) & \cdots & I_{2s}(\theta) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ I_{s1}(\theta) & I_{s2}(\theta) & \cdots & I_{ss}(\theta) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dijelaskan definisi mengenai pertidaksamaan *Rao-Cramer* dimana informasi fisher maupun bentuk matriksnya merupakan bagian dari pertidaksamaan *Rao-Cramer*.

2.6. Pertidaksamaan *Rao -Cramer*

Teorema 2.2

misal $X_1, X_2, \dots, X_n$ sampel acak berukuran n yang bebas stokastik identik (iid) dengan $f(x;\theta), \theta \epsilon \Omega$, dan misalkan T = $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ merupakan statistik dengan $E(T) = E[t(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ = k(θ), maka

$$var\ (T) \geq \frac{[\mathrm{k}'(\theta)^2]}{nI(\theta)}$$

Akibat 2.1

Berdasarkan teorema 2.2 , jika T = $t(X_1, X_2, \dots, X_n)$ merupakan penduga yang tak bias bagi θ, maka k(θ) = θ . Sehingga pertidaksamaan *Rao-Cramer* menjadi

$$var\ (T) \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

Dimana $\frac{1}{nI(\theta)}$ disebut sebagai batas bawah *Rao-Cramer*.

Statistik T disebut penduga yang efisien bagi θ jika dan hanya jika ragam dari T mencapai batas bawah *Rao-Cramer* (Hogg and Craig, 1995).

Adapun matriks informasi fisher dan pertidaksamaan *Rao-Cramer* bagi distribusi *generalized* gamma dijelaskan sebagai berikut:

2.7. Matriks Informasi Fisher dari Penduga (α, β, θ) pada Distribusi *Generalized* Gamma

Matriks informasi fisher dari distribusi *Generalized Gamma* (α, β, θ) adalah

$$I(\alpha,\beta,\theta) = -\mathrm{E}\begin{bmatrix} \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2}\right) & \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right) & \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha\, \partial \theta}\right) \\ \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right) & \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \beta^2}\right) & \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right) \\ \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha\, \partial \theta}\right) & \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha\, \partial \beta}\right) & \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) \end{bmatrix}$$

Maninja (2007), memberikan matriks informasi fisher dari distribusi *generalized* gamma (α, β, θ) yaitu

sebagai berikut: $I(\alpha,\beta,\theta) = -\begin{bmatrix} -n\Psi'(\alpha) & 0 & -n\beta\frac{1}{\theta} \\ 0 & -\frac{n}{\beta^2} & 0 \\ -n\beta\frac{1}{\theta} & 0 & -\frac{n\beta^2\alpha}{\theta^2} \end{bmatrix}$

Jadi, matriks informasi fisher dari distribusi *generalized* gamma adalah

$$I(\alpha,\beta,\theta) = \begin{bmatrix} n\Psi'(\alpha) & 0 & \frac{n\beta}{\theta} \\ 0 & \frac{n}{\beta^2} & 0 \\ \frac{n\beta}{\theta} & 0 & \frac{n\beta^2\alpha}{\theta^2} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.8. Pertidaksamaan *Rao-Cramer* dari penduga (α, β, θ) pada Distribusi *Generalized* Gamma

Matriks informasi fisher merupakan dasar yang digunakan dalam pertidaksamaan *Rao-Cramer*. Secara umum pertidaksamaan *Rao-Cramer* dapat dituliskan sebagai berikut:

$$var(\hat{\theta}) \geq -\frac{1}{E\left(\frac{\partial^2 lnL}{\partial\theta^2}\right)} = \frac{1}{I(\theta)} = I^{-1}(\theta)$$

Maninja (2007), memberikan invers matriks informasi fisher dari distribusi *generalized* gamma, sebagai berikut:

$$I^{-1}(\alpha,\beta,\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{n(1-\Psi'(\alpha))} & 0 & \frac{\theta}{n\beta(1-\Psi'(\alpha))} \\ 0 & \frac{\beta^2}{n} & 0 \\ \frac{\theta}{n\beta(1-\Psi'(\alpha))} & 0 & \frac{\theta^2}{n\beta^2(1-\Psi'(\alpha))} \end{bmatrix}$$

Sehingga, pertidaksamaan *Rao-Cramer* dari distribusi *generalized* gamma (α, β, θ) yaitu

$$var(\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\theta}) \geq I^{-1}(\alpha,\beta,\theta) = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha}{n(1-\Psi'(\alpha))} & 0 & \frac{\theta}{n\beta(1-\Psi'(\alpha))} \\ 0 & \frac{\beta^2}{n} & 0 \\ \frac{\theta}{n\beta(1-\Psi'(\alpha))} & 0 & \frac{\theta^2}{n\beta^2(1-\Psi'(\alpha))} \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Dimana $I^{-1}(\alpha, \beta, \theta)$ merupakan matriks varian dan kovarian dari penduga parameter (α, β, θ).

Dalam melakukan pendugaan parameter pada distribusi *generalized* gamma, diperlukan suatu metode pendugaan. Dalam penelitian ini, penulis menggunakan metode *generalized moment*. Berikut penjelasannya:

2.9. Metode *Generalized moment*

Metode *Generalized moment / Generalized Method of Moment* (GMM) pertama kali diperkenalkan dalam literatur ekonometrik oleh Lars Petrus Hansen pada tahun 1982. Metode ini diaplikasikan dalam *time series, cross sectional,* dan data panel. Menurut Hansen (2007), GMM mengarah pada kelas penduga yang dibangun dari pengembangan anggota momen sampel dari kondisi momen populasi dari model data yang dibangkitkan. Adapun model yang ditetapkan sebagai vektor momen populasi yaitu:

$$Ef(x_t, \beta_0) = 0$$

Dimana f memiliki r koordinat dan β_0 merupakan vektor yang tidak diketahui dalam suatu ruang parameter.

Sedangkan, untuk menduga parameter dari suatu distribusi, studi oleh Rasmussen (2001) dan oleh Ashkar dan Mahdi (2003), sebagai dasar dari penerapan GMM adalah dengan menggunakan bentuk momen peluang terboboti (PWM):

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l [F(x)]^r f(x) dx \qquad (2.10)$$

atau

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_0^1 x^l [F(x)]^r \, dF \tag{2.11}$$

Dimana x adalah invers dari distribusi kumulatif F(x), l merupakan momen ke- l dan r adalah statistik tataan ke $-r + l$. Persamaan (2.10) digunakan jika invers dari CDF suatu distribusi tidak terdefinisi secara analitik, sebaliknya persamaan (2.11) digunakan jika invers suatu distribusi terdefinisi secara analitik.

Dalam metode PWM, r diambil sebagai bilangan bulat positi sekecil mungkin dan dengan l = 1. $M_{l,r}$ ini bertindak sebagai suatu dasar untuk menerapkan GMM. Dalam GMM, r diambil sama dengan 0, dan l diambil sembarang yang tidak harus bilangan bulat, maupun positif (Ashkar dan mahdi, 2006).

2.10. Matriks Varian dan Kovarian Asimtotik

Dalam Ashkar dan mahdi (2006), untuk menentukan matriks varian dan kovarian asimtotik dari penduga parameter $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ dihitung dari varian dan kovarian dari momen sampel $(\widehat{M}_{l_1,0})$ dan $(\widehat{M}_{l_2,0})$ sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} var(\hat{\alpha}) \\ var(\hat{\beta}) \\ cov(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2{}_{11} & M^2{}_{12} & 2M_{11}M_{12} \\ M^2{}_{21} & M^2{}_{22} & 2M_{21}M_{22} \\ M_{11}M_{21} & M_{12}M_{22} & M_{11}M_{22} + M_{21}M_{12} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$X \begin{bmatrix} var(\widehat{M}_{l_1,0}) \\ var(\widehat{M}_{l_2,0}) \\ cov(\widehat{M}_{l_1,0}, \widehat{M}_{l_2,0}) \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Dimana:

$$M_{11} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \theta}$$

$$M_{12} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \alpha}$$

$$var\left(\widehat{M}_{l_1,0}\right) = \frac{1}{n}\left(M_{2l_1,0} - M^2{}_{l_1,0}\right)$$

$$var\left(\widehat{M}_{l_2,0}\right) = \frac{1}{n}\left(M_{2l_2,0} - M^2{}_{l_2,0}\right)$$

$$cov\left(\widehat{M}_{l_1,0,}\widehat{M}_{l_2,0}\right) = \frac{1}{n}\left(M_{l_1+l_2,0} + M_{l_1,0,l_2,0}\right)$$

M_{21} dan M_{22} secara berturut-turut mengikuti bentuk dari M_{11}dan M_{12} dengan sederhana mengubah l_1 menjadi l_2.