II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam menentukan penduga parameter dari distribusi *G3F* dan karakteristik dari penduga tersebut, maka dalam hal ini penulis menggunakan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan proses tersebut, yakni sebagai berikut :

2.1. Distribusi *Generalized F 3-parameters* (*G3F*)

Distribusi *Generalized F 3-parameters* (*G3F*) merupakan salah satu distribusi kontinu yang memiliki tiga parameter, yaitu α yang merupakan parameter skala serta m_1 dan m_2 yang merupakan parameter bentuk.

Definisi 2. 1

Misalkan X adalah random variabel dari distribusi *G3F* (α,m_1,m_2) maka fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x) = \left(\frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\right)\frac{x^{m_1-1}}{[1+\alpha x]^{m_1+m_2}} \tag{2.1}$$

dengan $B(m_1, m_2)$ adalah fungsi Beta, (Warsono *dkk.*,2014).

2.1.1. Nilai Harapan dari Distribusi *G3F*

Nilai harapan dari distribusi *G3F* (α,m_1,m_2) dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x.\left(\frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\right)\frac{x^{m_1-1}}{[1+\alpha x]^{m_1+m_2}}\ dx$$

$$E(X) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\int_{0}^{\infty}\frac{x^{(m_1+1)-1}}{[1+\alpha x]^{m_1+m_2}}\ dx$$

Misalkan :

$u = \alpha x$ $\qquad$ $x = 0 \rightarrow u = 0$

$du = \alpha\ dx$ $\qquad$ $x = \infty \rightarrow u = \infty$

Sehingga

$$E(X) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}\int_{0}^{\infty}\frac{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{(m_1+1)-1}}{[1+u]^{m_1+m_2}}\frac{1}{\alpha}du$$

$$= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1,m_2)}.\frac{1}{\alpha}.\alpha^{-m_1}\int_{0}^{\infty}\frac{u^{(m_1+1)-1}}{[1+u]^{m_1+1+m_2-1}}\ du$$

Karena $B(m_1,m_2) = \int_0^\infty \frac{u^{m_1-1}}{[1+u]^{m_1+m_2}}\ du$ (Abramowitz and Stegun,1970) maka :

$$E(X) = \frac{1}{\alpha\ B(m_1,m_2)}B(m_1+1,m_2-1)$$

Dan dengan menggunakan persamaan (6.2.2) dalam Abramowitz dan Stegun (1970), yakni $B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = B(w,z)$ maka diperoleh

$$E(X) = \frac{\Gamma(m_1+m_2)}{\alpha\ \Gamma(m_1)\ \Gamma(m_2)}.\frac{\Gamma(m_1+1)\ \Gamma(m_2-1)}{\Gamma(m_1+1+m_2-1)}$$

$$E(X) = \frac{\Gamma(m_1+1)\ \Gamma(m_2-1)}{\alpha\ \Gamma(m_1)\ \Gamma(m_2)}$$

Jadi, nilai harapan dari distribusi *G3F* adalah

$$E(X) = \frac{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(m_2-1)}{\alpha\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)} \tag{2.2}$$

Selanjutnya, untuk $E(X^2)$ dapat dinyatakan oleh

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 . f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 . \left(\frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)}\right) \frac{x^{m_1-1}}{[1+\alpha x]^{m_1+m_2}}\, dx$$

$$E(X^2) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} \int_{0}^{\infty} \frac{x^{(m_1+2)-1}}{[1+\alpha x]^{m_1+m_2}}\, dx$$

Misalkan :

$u = \alpha x$ $\qquad$ $x = 0 \rightarrow u = 0$

$du = \alpha\, dx$ $\qquad$ $x = \infty \rightarrow u = \infty$

Sehingga

$$E(X^2) = \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} \int_{0}^{\infty} \frac{\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{(m_1+2)-1}}{[1+u]^{m_1+m_2}} \frac{1}{\alpha} du$$

$$= \frac{\alpha^{m_1}}{B(m_1, m_2)} . \frac{1}{\alpha} . \alpha^{-m_1-1} \int_{0}^{\infty} \frac{u^{(m_1+2)-1}}{[1+u]^{m_1+1+m_2-1}}\, du$$

$$E(X^2) = \frac{1}{\alpha^2\, B(m_1, m_2)} B(m_1+2, m_2-2)$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(m_1+m_2)}{\alpha^2\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)} . \frac{\Gamma(m_1+2)\,\Gamma(m_2-2)}{\Gamma(m_1+m_2)}$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(m_1+2)\,\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)}$$

Jadi diperoleh nilai $E(X^2) = \frac{\Gamma(m_1+2)\,\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)}$ (2.3)

2.1.2. Ragam dari Distribusi *G3F*

Ragam dari distribusi *G3F* dapat diperoleh dengan dengan menggunakan persamaan (2.2) dan (2.3) yaitu :

$$Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$= \frac{\Gamma(m_1+2)\,\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)} - \left(\frac{\Gamma(m_1+1)\,\Gamma(m_2-1)}{\alpha\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)}\right)^2$$

$$= \frac{\Gamma(m_1+2)\,\Gamma(m_2-2)}{\alpha^2\,\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)} - \frac{\big(\Gamma(m_1+1)\big)^2\big(\Gamma(m_2-1)\big)^2}{\alpha^2[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}$$

$$= \frac{[\Gamma(m_1)\,\Gamma(m_2)\Gamma(m_1+2)\,\Gamma(m_2-2)] - \big(\Gamma(m_1+1)\big)^2\big(\Gamma(m_2-1)\big)^2}{\alpha^2[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}$$

Dengan menggunakan persamaan (6.1.15) dalam Abramowitz and Stegun (1970), yakni $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, maka diperoleh

$Var(X)$

$$= \frac{[\Gamma(m_1)m_1\Gamma(m_1+1).\,\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2)] - {m_1}^2\Gamma(m_1)^2.\big(\Gamma(m_2-1)\big)^2}{\alpha^2[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}$$

$$= \frac{[{m_1}^2\Gamma(m_1)^2.\,\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2)] - {m_1}^2\Gamma(m_1)^2.\big(\Gamma(m_2-1)\big)^2}{\alpha^2[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}$$

$$= \frac{{m_1}^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2) - \big(\Gamma(m_2-1)\big)^2}{[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}\right]$$

Jadi, diperoleh ragam dari distribusi *G3F* adalah

$$Var(X) = \frac{{m_1}^2}{\alpha^2}\left[\frac{\Gamma(m_2)\Gamma(m_2-2) - \big(\Gamma(m_2-1)\big)^2}{[\Gamma(m_1)]^2[\Gamma(m_2)]^2}\right]$$

2.2. Metode *Generalized Moment*

Metode *Generalized Moment* merupakan bentuk pengembangan dan perumuman dari metode momen. Metode ini pertama kali diperkenalkan oleh Lars Petrus Hansen pada tahun 1982, dimana metode *Generalized Moment* ini digunakan untuk memperoleh penduga parameter dari model statistik. Metode tersebut telah banyak digunakan dalam bidang ekonomi dan seringkali diaplikasikan pada masalah keuangan. Metode *Generalized Moment* didasarkan pada kondisi momen populasi, yakni

$$E[f(v_t, \theta_0)] = 0$$

Dengan θ_0 merupakan vektor dari parameter yang akan diduga, v_t merupakan vektor dari peubah acak, dan $f(.)$ merupakan suatu vektor fungsi, (Hall,2009).

Untuk menduga parameter dari suatu distribusi, studi oleh Rasmussen (2001), dan oleh Ashkar dan Mahdi (2003), menggunakan bentuk *Probability Weighted Moment* (PWM) yakni :

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l [F(x)]^r f(x) dx \qquad (2.4)$$

$$= \int_0^1 x^l [F(x)]^r \, dF$$

Dimana x adalah invers dari distribusi kumulatif F(x), *l* merupakan momen ke-*l* dan r adalah statistik tataan ke-r+l. $M_{l,r}$ ini bertindak sebagai suatu dasar untuk menerapkan metode *Generalized Moment*. Dalam metode *Generalized Moment*, r diambil sama dengan 0, dan *l* diambil sembarang yang tidak harus bilangan bulat,maupun positif ,(Ashkar & Mahdi,2006).

2.3. Karakteristik Penduga

Untuk mengkaji karakteristik penduga dari distribusi *G3F* dengan menggunakan metode pendugaan *Generalized Moment*, maka harus memenuhi sifat-sifat penduga yang baik, yakni seperti yang akan dijelaskan berikut ini :

2.3.1. Tak Bias

Salah satu sifat yang harus dimiliki oleh suatu penduga parameter dari suatu distribusi adalah sifat ketakbiasan dari penduga tersebut.

Definisi 2.2

Penduga $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ dikatakan penduga tak bias bagi $g(\theta)$ bila

$$E\big(U(\boldsymbol{X})\big) = g(\theta),$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.3.2. Varians Minimum

Suatu penduga dikatakan sebagai penduga yang baik jika selain memiliki sifat tak bias, juga memiliki sifat varians minimum (ragam minimum).

Definisi 2.3

Misalkan $U(\boldsymbol{X})$ adalah penduga tak bias bagi $g(\boldsymbol{\theta})$, maka untuk sebarang penduga tak bias $U_1(\boldsymbol{X})$ bagi $g(\boldsymbol{\theta})$ disebut penduga varians minimum jika $Var\,\big(U(\boldsymbol{X})\big) \leq Var\,(U_1(\boldsymbol{X}))$ untuk setiap $\boldsymbol{\theta} \in \Omega$, dimana

$$Var\big(U_1(\boldsymbol{X})\big) \geq \frac{\left(\frac{\partial}{\partial\theta} g(\boldsymbol{\theta})\right)^2}{n\,.\,E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} ln\, f(\boldsymbol{X};\boldsymbol{\theta})\right]^2}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Dalam menentukan penduga varians minimum, maka berikut ini diberikan beberapa definisi yang berkaitan dengan varians minimum yakni :

2.3.2.1. Informasi Fisher

Definisi 2.4

Misalkan X variabel acak dengan fungsi kepekatan (*pdf*) $(x;\theta), \theta \in \Omega$, *Information Fisher* dinotasikan dengan $I(\theta)$, dimana :

$$I(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

atau

$$I(\theta) = -E\left\{\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right\},$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.3.2.2. Matriks Informasi Fisher

Definisi 2.5

Misalkan sampel acak $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan $f(x;\theta_1;\theta_2), \theta_1;\theta_2 \in \Omega$ dalam kondisi yang ada.Tanpa memperhatikan kondisi yang rinci, misalkan bahwa ruang dari X dimana $f(x;\theta_1;\theta_2) > 0$ yang tidak meliputi θ_1 dan θ_2 dapat diturunkan di bawah integralnya. Sehingga matriks Informasi Fisher sebagai berikut:

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta_1;\theta_2)}{\partial\theta_2^2}\right] \end{bmatrix},$$

(Hogg and Craig, 1995).

2.3.2.3. *Cramer-Rao Lower Bound* (CRLB)

Definisi 2.6

Pertidaksamaan *Cramer-Rao Lower Bound* didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{\left[k'^{(\theta)}\right]^2}{nE\left[\left(\frac{\partial^2 \ln f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right)^2\right]} = \frac{[k'(\theta)]^2}{nI(\theta)}$$

Jika $Y = u(X_1, X_2, .. X_n)$adalah penduga takbias dari θ, maka k(θ)= θ, mengakibatkan pertidaksamaan *Cramer-Rao Lower Bound* dengan $k'(\theta)$ adalah sebagai berikut:

$$\sigma_Y^2 \geq \frac{1}{nI(\theta)}$$

(Hogg and Craig,1995).

2.3.3. Konsisten

Sifat lain yang harus dimiliki oleh suatu penduga selain tak bias dan varians minimum adalah sifat kekonsistenan dari penduga tersebut, dimana saat ukuran sampel semakin besar maka penduga tersebut akan semakin mendekati parameter populasi yang sesungguhnya.

Definisi 2.7

$U(\boldsymbol{X})$ dikatakan sebagai penduga konsisten bagi $g(\theta)$ jika $U(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{P} g(\theta)$ untuk $n \to \infty, \forall\theta \in \boldsymbol{\Omega}$ yaitu bila :

$$\lim_{n\to\infty} P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| \geq \varepsilon\} = 0$$

atau

$$\lim_{n\to\infty} P\{|U(\boldsymbol{X}) - g(\theta)| < \varepsilon\} = 1,$$

(Hogg and Craig, 1995).

Teorema 2.1 *(Chebyshev's Inequality)*

Misalkan X variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\ \varepsilon > 0$,

$$P(|X-\mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

atau

$$P(|X-\mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

(Larsen dan Marx, 2012).

Teorema 2.2

Jika $U(\boldsymbol{X}) = U(X_1, X_2, \dots, X_n)$ merupakan rangkaian dari penduga suatu parameter θ, maka berlaku:

- $\lim_{n\to\infty} Var\, U(\boldsymbol{X}) = 0$
- $\lim_{n\to\infty} Bias\, U(\boldsymbol{X}) = 0$

Untuk $\forall\theta \in \Theta$, $U(\boldsymbol{X})$ merupakan rangkaian penduga konsisten dari suatu parameter θ (Casella and Berger, 2002).

2.4. Matriks Varians dan Kovarians Asimtotik dari Distribusi *G3F* dengan Metode *Generalized Moment*

Varians dan kovarians asimtotik dari $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ diperoleh dari varians dan kovarians momen sample $\widehat{M}_{l_1,0}$ dan $\widehat{M}_{l_2,0}$ yakni sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Var\,(\hat{\alpha}) \\ Var\,(\hat{\beta}) \\ Cov\,(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^2{}_{11} & M^2{}_{21} & 2M_{11}M_{12} \\ M^2{}_{21} & M^2{}_{22} & 2M_{21}M_{22} \\ M_{11}M_{21} & M_{12}M_{22} & M_{11}M_{22}+M_{21}M_{12} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} Var\,(\widehat{M}_{l_1,0}) \\ Var\,(\widehat{M}_{l_2,0}) \\ Cov\,(\widehat{M}_{l_1,0},\widehat{M}_{l_2,0}) \end{bmatrix}$$

(2.5)

Dimana :

- M_{11} diperoleh dengan cara mencari turunan pertama $M_{l_1,0}$ terhadap parameter α dan M_{12} diperoleh dengan cara mencari turunan pertama $M_{l_1,0}$ terhadap parameter β. Sedangkan M_{21} dan M_{22} diperoleh dari M_{11} dan M_{12} yakni dengan cara mengganti l_1 dengan l_2.
- $Var\left(\widehat{M}_{l_1,0}\right)$ diperoleh dengan rumus $\frac{1}{n}\left[M_{2l_1,0} - M^2{}_{l_1,0}\right]$, sedangkan untuk $Var\left(\widehat{M}_{l_2,0}\right)$ diperoleh dari $Var\left(\widehat{M}_{l_1,0}\right)$ yakni dengan mengganti l_1 dengan l_2.
- $Cov\left(\widehat{M}_{l_1,0}, \widehat{M}_{l_2,0}\right)$ diperoleh dengan rumus $\frac{1}{n}\left[M_{l_1+l_2,0} - M_{l_1,0}M_{l_2,0}\right]$

(Ashkar & Mahdi,2006).