INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TAK HINGGA

(Skripsi)

Oleh

Refnita Magna Ananda

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SEELISIH TINGKAT TAK HINGGA

Oleh

Refnita Magna Ananda

Sudah banyak penelitian yang membahas mengenai integral Riemann dan barisan bilangan real. Maka dilakukan penelitian integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat tak hingga. Integral Riemann merupakan salah satu jenis integral yang menggunakan jumlahan Riemann dan konsep partisi. Dilakukannya penelitian ini untuk mengetahui apakah Integral Riemann juga bisa dikontruksi dengan fungsi f menggunakan fungsi yang bernilai barisan selisih. Dan terbukti bahwa barisan selisih tingkat tak hingga terintegral Riemann pada selang tertentu.

Kata kunci: integral Riemann, ruang barisan, ruang barisan $\ell_\infty(\Delta)$.

ABSTRACT

RIEMANN INTEGRAL VALUE A LINE OF INFINITE LEVEL DIFFERENCE

By

Refnita Magna Ananda

There have been many studies that discuss Riemann integrals and sequences of real numbers. Then the Riemann integral research is carried out with a value of infinite sequences of difference in levels. The Riemann integral is a type of integral that uses Riemann sums and the concept of partitions. This research was conducted to find out whether the Riemann Integral can also be constructed with the function f using a function whose value is the difference sequence. And it is proved that the Riemann integral infinite level difference sequence at a certain interval.

Keywords: Riemann integral, Sequence space, Sequence space $\ell_\infty(\Delta)$.

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TAK HINGGA

Oleh

REFNITA MAGNA ANANDA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar

SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi	:	**INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TAK HINGGA**
Nama Mahasiswa	:	**Refnita Magna Ananda**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1917031025**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001

Siti Laelatul Chasanah, M.Si.
NIP 19930601 201903 2 021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, M.Si.** ....

Penguji : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....
Bukan Pembimbing

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **24 Mei 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	:	**Refnita Magna Ananda**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1917031025**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Skripsi	:	**Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Tak Hingga**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 24 Mei 2023

Yang menyatakan,

Refnita Magna Ananda

NPM 1917031025

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Refnita Magna Ananda lahir di Bandar Lampung pada tanggal 12 April 2002. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara pasangan Bapak Afni Effendi dan Ibu Dwi Ambarsih. Pada tahun 2004-2007, penulis memulai pendidikan di Play Group Pelangi Bandar Lampung dan melanjutkan pendidikan tingkat dasar di SDN 1 Sukabumi Bandar Lampung pada tahun 2007-2009, lalu melanjutkannya di SDN 1 Lematang pada tahun 2009-2013.

Pada tahun 2013-2016, penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah pertama di SMPN 31 Bandar Lampung. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan tingkat menengah atas di SMAS Gajah Mada Bandar Lampung pada tahun 2016-2019. Pada tahun 2019 melalui jalur Seleksi Nasional Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SNMPTN), penulis diterima dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila).

Penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Kupang Raya, Kecamatan Teluk Betung Utara, Kota Bandar Lampung selama 40 hari terhitung dari tanggal 10 Januari sampai 20 Februari 2022 sebagai salah satu bentuk pengabdian mahasiswa dan menjalankan Tri Dharma Perguruan Tinggi Universitas Lampung. Kemudian, dalam rangka menerapkan ilmu yang telah dipelajari dan meningkatkan pengetahuan dalam dunia kerja, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) selama 40 hari terhitung dari tanggal 20 Juni sampai 29 Juli 2022 di Dinas Komunikasi, Informatika dan Statistik Provinsi Lampung serta dapat menyelesaikan Laporan Kerja Praktik yang berjudul "Analisis *Cluster* dengan Metode K-Means pada Ketersediaan Bahan Pangan Komoditi Beras di Provinsi Lampung Berdasarkan Lokasi Kabupaten/Kota Tahun 2017" dengan baik.

KATA INSPIRASI

"Angin tidak berhembus untuk menggoyangkan pepohonan, melainkan untuk menguji kekuatan akarnya."

(Ali bin Abi Thalib)

"Barang siapa keluar untuk mencari sebuah ilmu, maka ia akan berada di jalan Allah hingga ia kembali."

(HR Tirmidzi)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."

(Q.S. Al-Baqarah: 286)

"Maka sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan."

(Q.S. Al-Insyirah: 5)

"Jangan menilai saya dari kesuksesan, tetapi nilai saya dari seberapa sering saya jatuh dan berhasil bangkit lagi."

(Nelson Mendela)

"Great things are not done by impulse, but by a series of small things brought together."

(Vincent Van Gogh)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirabbil'alamin,

Puji dan syukur saya haturkan kepada Allah Subhanahu Wata'ala atas nikmat dan karunia-Nya, shalawat serta salam selalu tercurah kepada baginda Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam yang telah memberikan kabar gembira kepada umat manusia.

Kupersembahkan karya ini kepada:

Bapak dan Ibu

Orang tua tercinta Bapak Afni Effendi dan Ibu Dwi Ambarsih atas doa, dukungan, dan kasih sayang yang terus diberikan serta kerja keras dalam merawat dan membesarkan penulis sampai saat ini.

Adik

Reftanti Magdan Sefandi yang selalu menjadi penyemangat.

Para pendidik, guru, dan dosen yang telah senantiasa memberikan ilmunya kepada penulis.

Semua sahabat terbaik yang terus mendukung, menolong, memberikan kebahagiaan, dan semangat dalam proses hidup penulis.

Almamater Unila dan Negriku Indonesia

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik. Skripsi yang berjudul “Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Tak Hingga” disusun untuk memenuhi salah satu syarat guna memeroleh gelar Sarjana Matematika (S.Mat) di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, saran, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan ketulusan hati penulis ingin menyampaikan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan arahan, bimbingan, saran serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Siti Laelatul Chasanah, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, saran, dan dukungan kepada penulis.
3. Bapak/Ibu selaku Dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran yang membangun dalam penyelesaian skripsi ini.
4. Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembahas yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis agar dapat lebih baik lagi.
5. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Pembimbing Akademik penulis.
6. Bapak Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Bapak Dr. Eng. Suripto Dwi Yuwono, M.T. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Seluruh Dosen dan Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
9. Bapak dan Ibu yang selalu mendoakan, memberikan semangat dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan baik.
10. Adik yang selalu menyemangati, menemani, dan memberikan motivasi kepada penulis.
11. Arni, Berliana, Endang, Okta, Via, Ryu, Olla, Risma, Herlina, Sasa, Tyo, Galih, Ramadhan, dan Alm. Dewa yang selalu bersedia menjadi tempat berkeluh kesah dan memotivasi agar tetap konsisten dalam pengerjaan skripsi ini.
12. Khowashiyah Syafitri, Fitri Wulandari, dan Eccha Nanda Putri yang selalu memberikan semangat dan dukungan dalam pengerjaan skripsi ini.
13. Mahasiswa Survey pemetaan Teknik Geodesi dengan NPM 2205061012 dan Teman-teman angkatan 2019 Jurusan Matematika.
14. Almamater tercinta Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 24 Mei 2023

Penulis,

Refnita Magna Ananda
NPM 191703125

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Seperti yang diketahui, kalkulus modern membahas fungsi-fungsi bernilai real dan vektor yang dikembangkan dari kehidupan sehari-hari. Dalam perkembangannya pun sudah banyak konsep yang telah dikembangkan, salah satu konsep tersebut yaitu meliputi konsep integral. Konsep integral lebih banyak dipergunakan untuk menentukan luas daerah di bawah kurva serta mencari penyelesaian dengan suatu model matematika (Bartle dan Sherbert, 2000). Integral pertama kalinya dikemukakan oleh Isac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz pada akhir abad ke-17. Setelahnya, tahun 1850 kembali diteliti secara mendalam lagi oleh Bernhard Riemann. Beliau mendefinisikan integral sebagai suatu fungsi di domain berupa interval tertutup dan juga terbatas pada himpunan bilangan real dengan luas daerah dibawah kurva oleh fungsi tersebut.

Penelitian dalam konsep integral terutama integral Riemann sudah banyak diteliti sebelumnya. Pada tahun 2010, Alhidayah meneliti tentang Integral Riemann dan Integral Darboux dengan cara menganalisis ekuivalensi kedua integral pada skripsinya yang berjudul Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Darboux. Hasil dari penelitian ini yaitu ekuivalensi ketunggalan nilai integral, kelinieran dan keterbatasan fungsi pada Integral Riemann dan Integral Darboux.

Pada tahun 2016, Aji mengkonstruksikan integral Riemann sebagai beberapa bernilai barisan l^1 yang juga adalah pengembangan materi dari integral Riemann dengan fungsi-fungsi bernilai real. Barisan merupakan suatu fungsi dengan domainnya merupakan himpunan dengan bilangan bulat positif. Misal diambil bilangan bulat positif $1,2,3, \dots, n, \dots$ yang sesuai dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ merupakan barisan (Mizrahi and Sulivan, 1982). Namun bilangan $c_1, c_2, c_3, c_n, \dots$ dikatakan bilangan barisan tak hingga c_n dikatakan suku umum yang termasuk dari barisan. Bilangan $n, (n = 1,2,3, \dots)$ merupakan nomor urut dan bisa disebut indeks untuk menunjukkan letak bilangan dalam barisan (Yahya dkk., 1990).

Pirade dkk. (2019) melakukan penelitian tentang Integral Riemann-Stieltjes pada fungsi bernilai real yang menjelaskan bahwa beberapa sifat dasar dimana berlaku di Integral Riemann-Stieltjes yakni sifat monoton, kontinu, semi linear, linear dan keterbatasan fungsi. Umumnya beberapa sifat yang berlaku di Integral Riemann, berlaku pula pada Integral Riemann-Stieltjes. Integral Riemann-Stieltjes tersebut terbukti ekuivalen dengan integral Riemann hanya jika $\alpha(x) = x$, lalu dapat direduksikan menjadi integral Riemann jika ketika α memiliki turunan serta terbatas pada interval terbuka (a, b).

Berdasarkan pemaparan sebelumnya, penelitian tentang sifat Integral Riemann pada fungsi bernilai barisan telah diteliti sebelumnya. Akan tetapi, Integral Riemann yang bernilai di ruang barisan selisih tingkat tak hingga belum banyak diteliti. Oleh karena itu, penelitian ini akan difokuskan pada suatu konsep integral yang dikembangkan pada Integral Riemann yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat tak hingga.

1.2 Batasan Masalah

Batasan masalah pada penelitian ini yaitu menganalisis Integral Riemann yang dikembangkan pada ruang barisan selisih tingkat tak hingga.

1.3 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini yaitu menganalisis Integral Riemann yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat tak hingga.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. menambah pengetahuan peneliti dan pembaca mengenai Integral Riemann;
2. menambah pengetahuan peneliti dan pembaca mengenai barisan selisih tingkat tak hingga;
3. menambah pengetahuan peneliti dan pembaca dalam menganalisis Integral Riemann bernilai barisan selisih tingakt tak hingga.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Limit

Berikut diberikan penjelasan mengenai limit fungsi oleh Bartle and Sherbert, 2000.

Definisi 2.1.1

Misal diambil $A \subseteq \mathbb{R}$. Satu titik $c \in \mathbb{R}$ merupakan titik bagian dari A yang jika untuk setiap $\delta > 0$ itu terdapat paling sedikit di satu titik $x \in A$, $x \neq c$ maka sedemikian sehingga $|x - c| < \delta$.

Definisi 2.1.2

Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, dan misalkan c titik bagian dari A. untuk fungsi $f: A \to \mathbb{R}$. Suatu bilangan real L dikatakan limit dari f di c jika, diketahui untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ dan jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Teorema 2.1.1

Jika $f: A \to R$, lalu jika c merupakan titik bagian dari A, maka dikatakan f hanya dapat memiliki satu limit saja di c.

Bukti:

Misalkan nilai L dan L' memenuhi Definisi 2.1.3 untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta(\varepsilon/2) > 0$ dan sehingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon/2$. Lalu $\delta \coloneqq inf\{\delta(\varepsilon/2). \delta'\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\}$. maka jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, pertidaksamaan segitiga mengimplikasikan

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Karena $\varepsilon > 0$, kita simpulkan bahwa $L - L' = 0$, sehingga $L = L'$

2.2 Turunan

Berikut merupakan definisi dan teorema tentang turunan oleh Purcell (2006).

Definisi 2.2.1

Turunan sebuah fungsi f adalah fungsi lain f'(dibaca "f aksen") yang nilainya pada sebarang bilangan x adalah :

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau −∞. Jika limit ini memang ada, dikatakan bahwa f terdiferensiasikan di c.

Contoh 2.2.1

Andaikan $f(x) = 26x - 12$. Akan ditentukan $f'(8)$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} f'(8) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(8+h) - f(8)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f[26(8+h) - 12] - [26(8) - 12]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{26h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 26 = 26 \end{aligned}$$

Teorema 2.2.1

Jika dimisalkan $f'(c)$ ada, maka f akan kontinu di c.

Bukti:

Diperlihatkan bahwa $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$. Lalu mulai dengan menuliskan $f(x)$,

$$f(x) = f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c), x \neq c.$$

Karenanya,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to c} f(x) &= \lim_{x\to c} \left[f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot (x - c) \right] \\ &= \lim_{x\to c} f(c) + \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x\to c} (x - c) \end{aligned}$$

$$= f(c) + f'(c) \cdot 0$$
$$= f(c)$$

Teorema 2.2.2

Jika dimisalkan $f(x) = x$, maka $f'(x) = 1$; yaitu,

$$D_x(x) = 1$$

Bukti:

$$f'(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{x \to c} \frac{x + h - x}{h} = \lim_{x \to c} \frac{h}{h} = 1$$

Teorema 2.2.3

Proses yang menentukan turunan fungsi maka disebut dengan diferensiasi. Diferensiasi dapat digunakan dengan tidak menggunakan Definisi 2.2.1, melainkan dengan menggunakan aturan-aturan sebagai berikut :

1. Aturan fungsi konstan

   Jika $f(x) = k$, dengan k adalah konstanta, maka untuk setiap $x, D_x(k) = 0$
2. Aturan fungsi identitas

   Jika $f(x) = x$, maka untuk setiap $x, D_x(x) = 1$.
3. Aturan pangkat

   Jika $f(x) = x^n, n$ adalah bilangan bulat positif, maka $D_x(x^n) = nx$.
4. Aturan pengali konstanta

$$D_x[k. f(x)] = k. D_x f(x)$$

5. Aturan jumlah

$$D_x[f(x) + g(x)] = D_x f(x) + D_x g(x)$$

6. Aturan selisih

$$D_x[f(x) - g(x)] = D_x f(x) - D_x g(x)$$

7. Aturan perkalian

$$D_x[f(x)g(x)] = f(x)D_x g(x) + g(x)D_x f(x)$$

8. Aturan pembagian

$$D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{g^2(x)}$$

2.3 Integral

Pada subbab ini akan dijelaskan definisi dan teorema mengenai integral Riemann.

Definisi 2.3.1 (Purcell and Varberg, 2006)

Integral adalah invers atau dapat dikatakan kebalikannya dari differensial. Integral juga terdiri dari dua macam yaitu integral tentu dan juga integral tak tentu. Integral tentu adalah suatu integral yang dimana integral dibatasi dengan suatu nilai tertentu yang juga sering disebut dengan batas atas serta batas bawah, sedangkan pula integral tak tentu dapat digunakan untuk mencari nilai fungsi asal dari turunan suatu fungsi.

Definisi 2.3.2 (Toheri, 2015)

Dimisalkan f terdefinisi $[a,b]$. Dan jika $\lim_{||p||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$ ada, maka kita katakan bahwa f terintegral pada selang $[a,b]$. Lalu selanjutnya $\int_a^b f\,(x)dx$ dapat dikatakan integral tentu (atau integral Riemann) fungsi f dari a ke b dimana

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{||p||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i\,.$$

2.3.1 Integral Riemann

Definisi 2.3.1.1 (Rudin, 1921)

Seperti yang di ketahui jika fungsi $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ terbatas dan jika P partisi pada $[a,b]$, maka dapat berakibat :

$$L(f\colon P) \leq S(f;P) \leq U(f;P)$$

Riemann menggunakan $S(f;P)$ untuk menyusun integralnya. Dengan $L(f;P)$ merupakan *lower* atau daerah dibawah garis kurva, dan $U(f;P)$ merupakan *upper* atau daerah diatas garis kurva.

$$L(f;P) = \sum_{i=0}^{n} \inf f(t)(x_{i+1} - x_i)$$

$$U(f;P) = \sum_{i=0}^{n} \sup f(t)(x_{i+1} - x_i)$$

Definisi 2.3.1.2 (Darmawijaya, 2007)

Fungsi $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terintegral Riemann *(Riemann Integrable)* pada $[a,b]$ jika ada bilangan A sehingga untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan $\delta > 0$. Jika $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ partisi pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ berakibat :

$$|A - S(f;P)| = \left| A - \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta_i x \right|$$

maka disebut nilai integral Riemann fungsi f pada $[a,b]$.

Definisi 2.3.1.3 (Royden, 1988)

Jika f adalah fungsi integral di $[a,b]$, kita mendefinisikan bahwa integral yang tak tentu dapat menjadi fungsi F yang didefinisikan di $[a,b]$ dengan

$$f(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Teorema 2.3.1.1 (Royden, 1988)

Jika f dapat diintegralkan di $[a,b]$, maka pada fungsi F dapat didefinisikan dengan

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Akan ditunjukkan fungsi kontinu dari variasi terbatas pada $[a,b]$.

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa F adalah variasi terbatas, misalkan $a = x_0 < x_1 < \cdots x_k = b$ adalah sebarang subdivisi dari $[a,b]$, lalu

$$\sum_{i=1}^{k} |F(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{k} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)dt \right| \leq \sum_{i=1}^{k} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(t)|dt$$

$$= \int_a^b |f(t)|\, dt$$

dengan demikian

$$T_a^b(F) \leq \int_a^b |f(t)\, dt < \infty.$$

2.4 Barisan

Barisan merupakan salah satu subbab yang mendukung inti dari permasalahan yang akan diselesaikan pada skripsi ini. Untuk itu akan dijelaskan mengenai definisi, teorema, serta contoh barisan.

Definisi 2.4.1 (Hernadi, 2015)

Barisan bilangan real merupakan suatu fungsi yang bernilai real dimana menggunakan domain himpunan dengan bilangan asli $\mathbb{N}$. Barisan ini dinotasikan dengan (x_n) dimana $n \in \mathbb{N}$. Suku – suku di barisan dapat pula menuju ke suatu bilangan tertentu ataupun tidak menuju ke suatu bilangan tertentu. Pada kasus sebelumnya ketika sukunya akan menuju ke bilangan tertentu yang dimana berhingga dikatakan konvergen sedangkan jika saat sukunya tidak menuju suatu bilangan tertentu dapat dikatakan divergen.

Definisi 2.4.2 (Mizrahi and Sulivan, 1982)

Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif $1, 2, 3, \dots, n, \dots$ yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ dikatakan barisan.

Definisi 2.4.3 (Yahya dkk., 1990)

Bilangan – bilangan $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ dikatakan sebagai bilangan barisan tak berhingga. Sedangkan c_n dapat dikatakan suku umum pada barisan. Bilangan $n, (n = 1,2,3, \dots)$ merupakan nomor urut dan dapat disebut indeks yang dimana menunjukkan letak bilangan dalam barisan.

Contoh 2.4.1

Berikut adalah contoh barisan

1. $A \coloneqq (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ adalah barisan bilangan genap, dapat pula ditulis dengan $A \coloneqq (2n; n \in \mathbb{N})$,

2. $B \coloneqq (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ adalah barisan pecahan, dapat pulaa ditulis dengan $B \coloneqq \left(\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right)$,
3. $F \coloneqq (1, 1, 2, 3, 5, 8)$ adalah barisan Fibonacci, dengan $x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, untuk $n \geq 3$.

Teorema 2.4.1 (Martono, 1984)

Disetiap barisan yang merupakan bilangan real konvergen dikatakan terbatas.

Bukti :

Dimisalkan barisan yang merupakan bilangan real $(x_n) \leq M$ dan untuk setiap $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$. Karena (x_n) tersebut konvergen ke α, maka dapat dilihat terdapat suatu $n_0 \,\epsilon\, N$ sehingga $n > n_0 \Rightarrow |x_n - x| < 1$. Dan akibatnya $|x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$ untuk setiap $n > n_0$. Lalu ambil $M = maks\left(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{l_0}|, |x| + 1\right)$, maka untuk setiap $n \,\epsilon\, M$ dapat berlaku $|x_n| \leq M$, yang artinya bahwa barisan yang merupakan bilangan real $\{x_n\}$ terbatas.

Definisi 2.4.4 (Hernadi, 2015)

Misalkan (x_n) merupakan barisan bilangan real, dan bilangan real x dikatakan limit yang diperoleh dari (x_n), jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli $\mathbb{N}$ sehingga dapat berlaku :

$$|x_n - x| < \varepsilon, \text{untuk setiap } n \geq \mathbb{N}.$$

Jika x limit adalah dari barisan $(x_n\ )$ maka (x_n) dapat dikatakan barisan konvergen ke x dan dapat ditulis dengan $\lim(x_n) = x$. Suatu barisan yang konvergen hanya pada satu limit saja.

Definisi 2.4.5 (Martono, 1984)

Pada suatu barisan yang memiliki limit dapat disebut barisan konvergen sedangkan barisan yang tidakk konvergen dapat disebut barisan divergen.

2.5 Ruang Barisan

Subbab ini menjelaskan ruang barisan menurut Darmawijaya (2007).

Definisi 2.5.1

Diberikan σ yaitu koleksi semua barisan bilangan real, jadi :

$$\sigma = \{\bar{x} = \{x_k\}: x_k \in \mathbb{R}\}$$

a) Untuk setiap bilangan real p dengan $1 \leq p < \infty$ didefinisikan :

$$l^p = \left\{x \in \{x_j\} \in \sigma: \sum_{j-1}^{\infty} |x_j|^p < \infty\right\}$$

norm pada l^p yaitu :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j-1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

b) Untuk $p = \infty$ didefinisikan :

$$l^\infty = \{x \in \{x_j\} \in \omega: s \;\; j \geq 1||x_j| < \infty\}$$

norm pada l^p yaitu :

$$\|x\|_\infty = s \;\; j \geq 1|x_j|.$$

2.6 Ruang Vektor

Berikut akan dijelaskan definisi tentang ruang vector.

Definisi 2.6.1 (Maddox, 1970)

Ruang vektor adalah suatu himpunan tak kosong X yang dilengkapi dengan fungsi penjumlahan $(+): X \quad \to X$ dan fungsi perkalian skalar $(.): F \quad \to X$ sehingga untuk setiap skalar λ, μ dengan elemen $x, y, z \epsilon X$ berlaku:

(1) $x + y = y + x$

(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(3) terdapat $\theta \epsilon X$ sehingga $x + \theta = x$

(4) terdapat $-x \epsilon X$ sehingga $x + (-x) = \theta$

(5) $1. x = x$

(6) $\lambda(x + y) = \lambda + \lambda$

(7) $(\lambda + \mu)x = \lambda + \mu$

(8) $\lambda(\mu) = (\lambda)x$.

Definisi 2.6.2 (Royden, 1988)

Sebuah ruang vektor bernorma lengkap jika dan hanya jika setiap barisan yang benar-benar dapat dijumlahkan.

2.7 Ruang Bernorm

Pada subbab ini akan dijelaskan materi mengenai ruang bernorm.

Definisi 2.7.1 (Rudin, 1921)

Fungsi nonnegatif $||.||: X \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan norm jika setiap $x, y \in X$ dan untuk setiap skalar $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ dapat berlaku :

a) $\|x\| \geq 0$, untuk setiap $x \in X$.
   $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = \theta$.

b) $\|\alpha\| = |\alpha| \, \|x\|$, untuk setiap skalar $\alpha \epsilon \mathbb{R} d \quad x \epsilon X$.

c) $\|x + y\| \leq$||x||+||y||, untuk setiap $, y \in X$.

Ruang linear X dimana dilengkapi dengan suatu norm ||.||, dapat ditulis $(X, ||.||)$ dapat dikatakan ruang bernorm.

Teorema 2.7.1 (Maddox, 1970)

Didalam ruang linear bernorma X dapat berlaku $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ dan untuk setiap $x, y \epsilon X$.

Bukti:

Saat $x, y \epsilon X$ maka diperoleh :

$\|x\| - \|y\|$

$= \|x - y + y\| - \|y\| \leq \|x - y\| + \|y\| - \|y\|$

$= \|x - y\|$.

Definisi 2.7.2 (Mizrahi and Sulivan, 1982)

Barisan (x_n) yang berada di dalam ruang bernorm dapat dikatakan barisan Cauchy jika setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan terdapat bilangan asli N maka untuk setiap bilangan asli $m, n \geq N$ dapat berlaku

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \ .$$

Definisi 2.7.3 (Mizrahi and Sulivan, 1982)

Barisan (x_n) yang berada di dalam ruang bernorm dapat dikatakan barisan yang konvergen jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli N sehingga jika $n \geq N$ maka berlaku

$$|x_n - x| < \varepsilon \ .$$

Definisi 2.7.4 (Robert and Ronald, 2000)

Barisan (x_l) yang berada di dalam ruang bernorma $(X, ||.||)$ dapat disebut barisan Cauchy atau dapat disebut barisan fundamental jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ maka terdapat bilangan asli n_0, dan sehingga untuk setiap dua bilangan asli $m, n \geq n_0$ dapat berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Contoh 2.7.1

Jika $I \coloneqq [0,4]$, hitung norm dari partisi $P = (0,1,2,4)$.

Penyelesaian

Diketahui sub-interval partisi P adalah

$I_1 = [0,1]$

$I_2 = [1,2]$

$I_3 = [2,4]$

Maka $\|P\| = \max\{[x_1 - x_0], [x_2 - x_1], [x_3 - x_2]\}$

$= \max\{1,1,2\}$

$= 2$

Jadi, norm dari partisi $P = (0,1,2,4)$ jika $I \coloneqq [0,4]$ adalah 2.

2.8 Ruang Banach

Berikut beberapa teori mengenai ruang banach.

Definisi 2.8.1 (Darmawijaya, 2007)

Ruang banach atau *Banach Space* merupakan ruang bernorma lengkap atau sebagai ruang metriks yang lengkap dan jika didalam suatu ruang bernorma X maka berlaku kondisi setiap barisan Cauchy di X dikatakan konvergen.

Definisi 2.8.2 (Maddox, 1970)

Suatu ruang bernorm X dinamakan ruang Banach jika X lengkap. Kelengkapan berarti bahwa setiap barisan Cauchy dalam X konvergen jika

$$\|x_n + x_m\| \to 0(n, m \to \infty), x_n \in x$$

Maka terdapat $x \in X$ sehingga

$$\|x_n - x\| \to 0(n \to \infty).$$

2.9 Operator Linear

Definisi 2.9.1 (Kreyszig, 1989)

Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorma disebut operator.

Definisi 2.9.2 (Kreyszig, 1989)

Diberikan ruang bernorm X dan Y atas field yang sama.

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.

b. Operator $A : X \to Y$ dikatakan linier jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha) = \alpha$ dan $A(x + y) = A + A$.

Teorema 2.9.1 (Maddox, 1970)

Jika dimisalkan Y adalah ruang Banach, maka $\mathcal{L}_c((X, Y), ||.||)$ merupakan ruang Banach.

Bukti:

Dapat di ambil sebarang barisan Cauchy $\{A_i\} \subset \mathcal{L}_c((X, Y), ||.||)$.

Sehingga untuk setiap bilangan ε_0 itu terdapat $n_0 \in N$ jadi jika $m, n \geq n_0$ dapat berlaku

$$\|A_m - A_n\| < \varepsilon_0.$$

Dimisalkan untuk setiap $x \in X$ dan juga $m, n \geq n_0$ dapat diperoleh

$$\|A_m x - A_n x\| = \|(A_m - A_n)x\|$$
$$\leq \|A_m - A_n\|\|x\| < \ \varepsilon_0\|x\| \ .$$

Maka untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ (dapat di pilih bilangan $\varepsilon_0 > 0$ sampai $\varepsilon_0\|x\| \ < \varepsilon$) ada $n_0 \ \in \ N$ jadi untuk setiap $m, n \ \in \ N$ dimana $m, n \ \geq n_0$ dapat berlaku

$$\|A_m x \ - A_n x \ \| \ < \varepsilon_0\|x|| \ < \ \varepsilon_0||x|| < \varepsilon$$

Selanjutnya, dapat diperoleh barisan Cauchy $\{ \ A_i x\} \ \subset Y$ dengan Y lengkap, atau dapat dikatakan $\{A_i x\}$ konvergen, katakan ke $Y_x \in Y$.

Sehingga $\lim_{n\to\infty} A_n x = y_x$ dan x dapat menentukan suatu operator A dan diperoleh $= Y_x$.

Proses itu dapat diulang pada $z \ \in \ X$ yang tetap, dimana $z \ \neq \ x$.

Dan diperoleh $\lim_{n\to\infty} A_n z = y_z$ dan z menentukan suatu operator A maka $A = y_x$.

Untuk disetiap skalar a dan b, dapat diperoleh $ax + \ bz \ \in \ X$.

$\lim_{n\to\infty} A_n \ (a \ + b \ ) \ = y_{a+b}$ lalu $ax + \ bz$ dapat menentukan suatu operator A sehingga diperoleh

$$A(ax + \ bz) \ = y_{a+b} \ .$$

Sehingga $A(a \ + b \ ) \ = \ \lim_{n\to\infty} A_n \ \ (a \ + b \ )$

$$= \ \lim_{n\to\infty}(aA_n x + bA_n z)$$
$$= \ \lim_{n\to\infty}(aA_n x) + \ \lim_{n\to\infty}(bA_n z)$$
$$= \ a \lim_{n\to\infty}(A_n x) + \ b \ \lim_{n\to\infty}(A_n z)$$
$$= ay_x + by_z$$
$$= aA_x + bA_z$$

Jadi operator A bersifat linear.

Untuk $n \to \ \infty$ diperoleh

$$\|(\ A_m - A_n \ )x \ \| = \ \|A_m x - A_n x \ \|$$
$$= \ \|A_m x - A \ \|$$
$$= \ \|(A_m x - A)x \ \| < \varepsilon_0\big||x|\big|$$

Jadi operator $(A_m \ - A \ )$ dengan $m \geq n_0$ bersifat linear terbatas.

Karena $A_m$dan $(A_m \ - A \ )$ tersebut masing-masing adalah terbatas, dan $A = A_m \ - A \ (A_m \ - A \ )$ maka A terbatas atau kontinu.

Sehingga $A \in \mathcal{L}_c\ ((X,Y)), \|.\|)$ atau dapat dikatakan $\mathcal{L}_c\ ((X,Y)), \|.\|)$ ruang Banach.

2.10 Ruang Barisan Selisih

Ruang barisan selisih merupakan salah satu pendukung pengkontruksian integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat tak hingga ini, maka dijelaskanlah definisi menurut Kizmaz, 1981.

Definisi 2.10 (Kizmaz, 1981)
Ruang barisan dengan selisih $l_\infty\ (\Delta)$, $c(\Delta)$ dan $c_0\ (\Delta)$ adalah sebagai berikut:

$$X(\Delta) = \{\tilde{x} = \{x_k\} \subset \Re/C : \{\Delta_k\} \in X\},$$

dimana $X = \ell_\infty, c, c_0$ berturut-turut adalah barisan terbatas, barisan konvergen serta barisan konvergen menuju nol dengan norm pada X , dimana $\|x\|_x = \sup_k\{|x_k|\}$ dan $\Delta x = \{\Delta x_k\} = \{x_k - x_{k+1}\ \}$
untuk seluruh $k \in N$.
Ruang tersebut adalah ruang Banach pada norm $\|x\|_{x(\Delta)} = |x_1| + \sup_k\{|\Delta x_k|\}$.
Perumusan ruang-ruang tersebut dikerjakan oleh (Tripathy and Esi 2006).

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil pada tahun akademik 2022/2023 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengatuhuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah – langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. mencari literatur tentang integral Riemann;
2. mencari literatur tentang barisan selisih tingkat tak hingga;
3. menganalisis integral riemann bernilai pada barisan selisih tingkat tak hingga.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Setelah mendapatkan hasil dan pembahasan dari penelitian yang telah dilakukan sebelumnya, diperoleh kesimpulan terkait integral Riemann bernilai barisan selisih $\ell_\infty(\Delta)$, yaitu sebagai berikut.

1. Suatu fungsi $\bar{f} = (f_k) : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \ell_\infty(\Delta)$ dapat di katakan terintegral Riemann pada selang $[a,b]$, ditulis singkat dengan menggunakan $\bar{f} \in \mathcal{R}[a,b]$ jika terdapat suatu barisan $\bar{u} \in \ell_\infty(\Delta)$ sedemikian sehingga $\forall \varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b\}$ partisi pada selang $[a,b]$ dengan norm $\|P\| < \delta$ dan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, maka berlaku

$$\left\|S(\bar{f};P) - \bar{u}\right\|_{\ell_\infty(\Delta)} = \left\|\sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*)\Delta_i x - \bar{u}\right\|_{\ell_\infty(\Delta)}$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_1(x_i^*)\,\Delta x_i - u_1\right| +$$

$$= \left(\sup_{K \geq 1} \left|\left(\sum_{i=1}^{\infty} f_{k+1}(x_i^*)\Delta x_i - u_{k+1}\right) - \left(\sum_{i=1}^{\infty} f_k(x_i^*)\Delta x_i - u_k\right)\right|\right)$$

$$< \varepsilon$$

dimana $\bar{u} = \int_a^b \bar{f} = \int_a^b \bar{f}(x)\,dx$.

2. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \ell_\infty(\Delta)$ dapat dikatakan terintegral Riemann pada selang $[a, b]$ jika dan hanya jika fungsi $(f_k): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = 1,2, \ldots$ masing-masing terintegral Riemann pada selang $[a, b]$.

3. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [a, b] \subset \mathbb{R} \to \ell_\infty(\Delta)$ dapat dikatakan terintegral Riemann pada selang $[a, b]$ jika dan hanya jika

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(\bar{f}; P) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*)\, \Delta x_i = \bar{u}$$

   dengan $\bar{u} = (u_k) \in \ell_\infty(\Delta), k = 1,2, \ldots.$

5.2 Saran

Berdasarkan pembahasan skripsi integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat tak hingga ini hanya difokuskan dengan barisan selisih yang terintegral Riemann di $\ell_\infty(\Delta)$, sehingga penulis sangat menyarankan agar dilakukannya penelitian dan pembahasan hal ini untuk dikembangkan dengan materi lain.

DAFTAR PUSTAKA

Aji, Purnomo. 2016. *Integral Riemann Bernilai Barisan* ℓ_1. Lampung : Universitas Lampung.

Alhidayah, Dzawin Nuha. 2010. *Ekuivalensi Integral Riemann dan Integral Darboux.* Malang : Universitas Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Bartle, R. G., and D. R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis : Third Edition.* John Willey & Sons, Inc, 605 Third Avenue. New York.

Darmawijaya, Soeparna. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak*. Yogyakarta : Universitas Gajah Mada.

Hernadi, J. 2015. *Analisis Real Elementer dengan Ilustrassi Grafis dan Numeris*. Jakarta: Erlangga.

Kizmaz, H. 1981. On Certain Sequence Space. *Journals Canadian Mathematical Bulletin.* 24(2):169-176.

Kreyszig, E. 1989. *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York: Willey Classic Library.

Maddox, I. J. 1970. *Elements of Functional Analysis*,Cambridge **:** Cambridge University Press.

Martono, K. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik 2.* Angkasa : Bandung.

Mizrahi, Abe. Michael Sullivan. 1982. *Calculus and Analytic Geometry*, California: Belmont.

Pirade, Septian Mosal, Tohap Manurung dan Jullia Titaley. 2019. *Integral Riemann-Stieltjes pada Fungsi Bernilai Real*, Manado: Universitas Sam Ratulangi.

Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* John Wiley & Sons, inc, New York.

Royden, H. L., 1988. *Real Analysis.* California: Stanford.

Rudin, Walter. 1921. *Real and Complex Analysis*, California: University Of California.

Toheri, 2015. *Kalkulus Integral*. Cirebon: Eduvision.

Tripathy, Binod Chandra and Ayhan Esi. 2006, A new type of Difference Sequence Spaces, Intl. *Journal of Science and Tech.*, 1(1), 11-14.

Varberg, Purcell and Rigdon. 2006. *Calculus 9th Edition*, Pearson.

Yahya, Yusuf, D. Suryadi S.H. dan Agus S. 1990. *Matematika Dasar untuk Perguruan Tinggi*. Jakarta: Ghalia Indonesia.