BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF MATAHARI
DAN BEBERAPA HASIL OPERASINYA

(Tesis)

Oleh

WENTY OKZARIMA
2127031009

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF MATAHARI DAN BEBERAPA HASIL OPERASINYA

Oleh

WENTY OKZARIMA

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk Memperoleh Gelar

MAGISTER MATEMATIKA

Pada

Program Studi Magister Matematika

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2023

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF MATAHARI DAN BEBERAPA HASIL OPERASINYA

Oleh

WENTY OKZARIMA

Graf matahari dinotasikan dengan S_n, $n \geq 3$ adalah graf yang memuat siklus $(C_n, n \geq 3)$, dan setiap titik pada graf siklus bertetangga dengan sebuah daun. Graf barbel matahari, B_{S_n} adalah graf sederhana yang diperoleh dari dua graf matahari yang dihubungkan oleh sebuah jembatan. Graf subdivisi dari graf barbel matahari, dinotasikan dengan $B_{S_n}^{*s}$ adalah graf yang diperoleh dari graf B_{S_n} dengan menyisipkan $s \geq 1$ titik pada jembatan. Misalkan $u \in V(H)$, operasi *comb* dari G dan H, dinotasikan $G \rhd H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil salinan H sebanyak $|V(G)|$ dan menempelkan titik *u* pada setiap titik di G. Misalkan $G = (V, E)$ graf terhubung dan c suatu pewarnaan di graf G. Misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ adalah k – pasang terurut $(d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$ dengan $d(v, C_i) = \min \{d(v, x) | \ x \in c_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi. Bilangan kromatik lokasi graf matahari S_n, untuk $n \geq 3$ adalah 4, demikian juga dengan operasi barbel atau subdivisinya. Bilangan kromatik lokasi $S_n \rhd K_n$ dan $K_{1,n-1} \rhd K_n$ adalah $n + 1$. Bilangan kromatik lokasi $K_n \rhd K_{1,n-1}$ adalah n, tetapi untuk $K_n \rhd S_n$ diperoleh untuk beberapa nilai n saja.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf matahari, operasi *comb*

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF THE SUN GRAPH AND SOME OPERATIONS

By

WENTY OKZARIMA

The sun graph, denoted by S_n $n \geq 3$ is obtained from the cycle graph $(C_n, n \geq 3)$, where every vertex on the cycle graph is adjacent to a leave. The barbell graph of the sun graph, B_{S_n}, is a simple graph formed from two sun graphs connected by a bridge. The subdivision graph of a barbell sun graph, denoted by $B_{S_n}^{*s}$, is obtained from a barbell sun graph by inserting $s \geq 1$ vertices on the bridge. Let $u \in V(H)$, the comb product between G and H, denoted by $G \rhd H$, is a graph obtained by taking one copy of H and $|V(G)|$ copies of H and grafting the copy of G at the vertex u to i-th vertex of H. Let $G = (V, E)$ is a connected graph and let c be a proper $k -$ coloring of G. Let $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ be partition of $V(G)$. The color code $c_\Pi(v)$ is the ordered $k -$tuple $\big(d(v, C_1), d(v, C_2), \dots, d(v, C_k)\big)$, where $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) |\ x \in c_i\}$ for $1 \leq i \leq k$. If all vertices of G have distinct color codes, then c is called a $k -$ coloring of G. The locating chromatic number is the smallest k such that G has a locating $k -$ coloring. The locating chromatic number of sun graph S_n, $n \geq 3$ is 4, as well as for barbell or subdivision. The locating chromatic number of $S_n \rhd K_n$ and $K_{1,n-1} \rhd K_n$ is $n + 1$. The locating chromatic number of $K_n \rhd K_{1,n-1}$ is n, but $K_n \rhd S_n$ was obtained for some values of n only.

Keywords: the locating chromatic number, sun graph, comb product

Judul Tesis : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF MATAHARI DAN BEBERAPA HASIL OPERASINYA**

Nama Mahasiswa : *Wenty Okzarima*

Nomor Pokok Mahasiswa : **2127031009**

Program Studi : **Magister Matematika**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Dr. Notiragayu, S. Si., M. Si.**
NIP. 19760411200012200 1	NIP. 197311092000122000 1

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411200012200 1

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**	....
Sekretaris	: **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**	....
Penguji Bukan Pembimbing	: **1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**	....
	2. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.	....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP. 196403261989021001

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **22 Mei 2023**

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama : **Wenty Okzarima**

Nomor Pokok Mahasiswa : **2127031009**

Program Studi : **Magister Matematika**

Jurusan : **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul, **"BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF MATAHARI dan BEBERAPA HASIL OPERASINYA"** adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua tulisan yang tertuang dalam tesis ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudia hari terbukti bahwa tesis ini merupakan salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 27 Mei 2023

Penulis,

WENTY OKZARIMA

NPM. 2127031009

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 21 Oktober 1999. Sebagai anak pertama dari Bapak Suwandi Pisol dan Ibu Agusliawati, serta kakak dari Wenda Yozarima.

Penulis menempuh pendidikan Sekolah Dasar Negeri (SDN) 1 Penumangan Baru lulusan pada tahun 2011, Sekolah Menengah Pertama Negeri (SMPN) 1 Tulang Bawang Tengah lulusan pada tahun 2014, Sekolah Menengah Atas Negeri (SMAN) 1 Tulang Bawang Tengah lulusan pada tahun 2017. Penulis melanjutkan pendidikan di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan Lulus pada tahun 2021.

Pada tahun 2021, penulis terdaftar sebagai mahasiswa program studi magister Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

PERSEMBAHAN

Puji syukur kepada Allah SWT, atas hidayah dan kasih sayang-Nya.
Kupersembahkan sebuah karya sederhana dengan penuh perjuangan ini kepada oarang terkasih :

Walid Suwandi Pisol dan Walida Agusliawati
Serta
Adik kutersayang Wenda Yozarima

Terimakasih atas limpahan do’a yang tulus, kasih sayang, pengorbanan, semangat, serta motivasi yang selalu diberikan kepada saya, karena atas do’a dan ridho kalian, Allah memudahkan setiap perjalanan hidup ini.

Terimalah bukti kecil ini sebagai hadiah keseriusanku untuk membalas semua pengorbanan, keikhlasan, dan kesabaran yang selama ini yang telah diberikan.

KATA INSPIRASI

" Jangan kecewa apabila hasil yang diperoleh tidak seperti yang diharapkan, percayalah bahwa semua adalah kesuksesan, bukanlah kegagalan. "
(Thomas Alfa Edison)

"... Orang yang hebat tidak dihasilkan melalui kemudahan, kesenangan dan kenyamanan. Melainkan Mereka dibentuk melalui kesukaran, tantangan dan airmata..."
(Dahlan Iskan)

" Berlarilah ketika kamu bisa, berjalanlah jika harus, merangkak jika perlu, jangan pernah menyerah."

" Jangan lelah mencoba. Tidak ada jaminan kesuksesan, tetapi memilih untuk tidak mencoba adalah jaminan kegagalan."

" Kesuksesan adalah milik mereka yang ingin berusaha, lakukan yang terbaik dan tetap jadi diri sendiri."
-Wenty Okzarima -

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT atas segala ridho, rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan Tesis ini. Tesis dengan judul " Bilangan Kromatik Lokasi Graf Matahari dan Beberapa Hasil Operasinya " disusun untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Magister Matematika di Universitas Lampung.

Pada kesempatan ini penulis mengucpakan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Dosen pembimbing I yang telah meluangkan waktu untuk membimbing dan memberikan saran kepada penulis selama proses pembuatan tesis ini hingga selesai.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen pembimbing II yang telah memberikan bimbingan, serta saran kepada penulis.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Dosen pembahas I dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, yang telah bersedia dalam menguji dan dengan sabar memberi kritik atau saran untuk penulis.
4. Bapak Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si selaku Dosen pembahas II atas kesediannya dalam menguji dan memeberi masukan kepada penulis..
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh civitas akademik, dosen dan staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Walid, Walida dan Orin yang selalu memberikan dukungan dan do'a terbaik agar penulis diberikan kelancaran serta kemudahan dalam menyelesaikan tesis ini.
8. Papi, Makwo, Kanda, Nanggem, Hadapan, Asli, dan Ponakan ku tersayang Ses Illa, bung Qory, dan Uci Gia yang selalu memberikan inspirasi dunia perkuliah serta selalu memberikan semangat untuk penulis dalam menyelesaikan tesis ini.
9. Teman-teman seperjuangan Ali Amin, Sartika, Risa, Rinaldi yang selalu memberikan dukungan, pelajaran hidup, waktu luang, dan nasihat selama perkuliahan.
10. Seluruh teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2021, Indah Suciati, Desiana Putri, Amanah Yulianti, Wardhani Utami Dewi, Juanda, Miftahul Irfan, Dira Dini K, Marschel, Saiful Rohman, dan seluruh rekan – rekan program studi magister matematika atas kebersamaanya dalam canda tawa dan semangatnya dalam menjalani program magister bersama - sama.
11. Alamamater tercinta Universitas Lampung

Penulis menyadari bahwa penyusunan tesis ini masih banyak kekurangan. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat dibutuhkan untuk penyempurnaan tesis ini.

Bandar Lampung, 08 Juni 2023
Penulis,

Wenty Okzarima

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar **Halaman**

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan pengembangan dari konsep pewarnaan titik dan dimensi metrik. Pewarnaan titik berawal dari permasalahan pewarnaan peta. Francis Guthrie pada tahun 1852, menemukan konjektur empat warna (*The Four color Conjecture*) yang menyatakan setiap negara di sebuah peta dapat diwarnai menggunakan maksimal empat warna sedemikian sehingga dua wilayah yang berbatasan mempunyai warna yang berdeda. Konjektur tersebut dibuktikan oleh Arthur Cayley pada tahun 1878 yang dikenal dengan *On the Colorig of Maps.* Permasalahan konjektur empat warna tersebut mengakibatkan muculnya konsep pewarnaan titik, sisi, dan daerah, dengan demikian konsep tersebut yang digunakan untuk mewarnai graf secara umum.

Bilangan kromatik lokasi graf merupakan penggabungan dari konsep dimensi partisi dan pewarnaan titik yang dikenalkan pada tahun 2002 oleh Chartrand dkk., Pada tahun 1998 Chartrand dkk., yang merupakan pengembangan konsep dimensi metrik dari suatu graf telah diperkenalkan secara terpisah oleh Harary dan Melter, pada tahun 1976. Dimensi partisi untuk setiap titik yang bertetangga diberikan warna yang sama, selanjutnya syarat pewarnaan titik dimana setiap dua titik yang bertetangga diberikan warna yang berbeda, dengan demikian himpunan pembeda tersebut merupakan konsep dari bilangan kromatik lokasi.

Bilangan kromatik lokasi pada suatu graf diperkenalkan oleh Chratrand dkk. pada tahun 2002, topik bahasan ini sangat menarik untuk dikembangkan dalam menentukan bilangan kromatik lokasi pada sebarang graf secara umum. Pada tahun 2002 Chratrand dkk., telah menentukan bilangan kromatik lokasi pada beberapa kelas graf, yaitu graf siklus, lengkap, lintasan, dan multipartite.

Pada tahun 2011, Asmiati dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang seragam dan tak seragam, kemudian Behtoei dkk., juga berhasil memperoleh bilangan kromatik lokasi Kneser graf. Pada tahun 2014 Asmiati mendapatkan bilangan kromatik lokasi pada graf amalgamasi bintang tak homogen.

Selanjutnya, Asmiati (2016) telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi graf ulat dan graf kembang api, dan ditahun yang sama Behtoei dkk., juga berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi hasil kali kartesian dari lintasan dan graf lengkap. Asmiati pada tahun 2017 berhasil mengkaji bilangan kromatik lokasi *n* amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. Ditahun 2018 Asmiati dkk., telah menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dengan graf pembentukannya adalah graf lengkap. Asmiati dkk., di tahun 2019 kembali berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel yang memuat graf Petersen diperumum. Damayanti dkk., (2021) telah menentukan bilangan kromatik lokasi dari beberapa modifikasi graf lintasan dengan siklus dan di tahun 2021, Irawan dkk., telah berhasil menentukan bilangan kromatik lokasi pada graf Origami.

Sejauh penelusuran literatur yang telah dilakukan, belum ada penelitian yang membahas penentuan bilangan kromatik lokasi pada graf matahari untuk beberapa operasinya. Operasi diantara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf – graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi dalam graf, misalnya barbel, subvidisi, dan *comb*. operasi *comb* dari G dan H dinotasikan dengan $G \rhd H$ adalah graf yang diproleh dengan mengambil salinan H sebanyak $|V(G)|$ dan menempekan titik *u* pada setiap titik di G. Pada penelitian ini akan dikaji bilangan kromatik lokasi graf matahari, dan beberapa hasil operasinya.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi dari graf matahari;
2. Menentukan bilangan kromatik lokasi dari hasil operasi matahari, yaitu graf barbel, subdivisi dan operasi *comb* mathari dan graf lengkap;
3. Menentukan bilangan kromatik lokasi operasi *comb* graf bintang dan graf lengkap serta graf lengkap dan graf bintang.

1.3 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah :

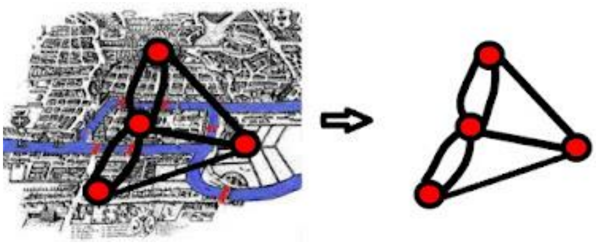
1. Memberi pemahaman dan wawasan mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya graf matahari dan operasi *comb* graf bintang dan graf lengkap serta graf lengkap dan graf bintang.
2. Sebagai referensi untuk penelitian lanjutan mengenai bilangan kromatik lokasi graf matahari dan operasi *comb* dari suatu graf lainnya.

BAB II

TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Definisi dan Notasi Dasar Graf

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh metamatikawan berkebangsaan Swiss, bernama Leonhard Euler, Euler berhasil menungkapkan masalah jembatan Konigsberg di sungai Pregal yang sangat terkenal di Eropa pada tahun 1736. Euler berhasil memodelkan masalah tersebut ke dalam bentuk suatu graf, dimana pulau yang terdapat di sungai Pregal dinyatakan sebagai titik ($V(G)$ dan ketujuh jembatan yang menghubungkan dinyatakan sebagai sisi $E(G)$. Pada permasalahn tersebut dengan merepresentasikan graf, Euler dapat membuktikan bahwa tidak mungkin melewati setiap jembatan tepat satu kali dan kembali ke posisi semula.

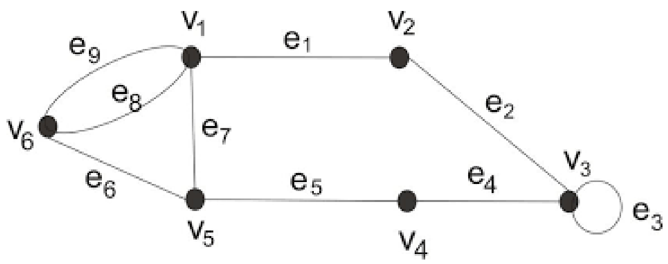


Gambar 1. Representasi permasalahan jembatan konigsberg

(sumber : https://www.knkland.com/2020/09/pengantar-teori-graf.html)

Beberapa konsep dasar yang digunakan dalam penelitian ini diambil dari (Deo, 1989). Suatu graf G adalah himpunan terurut $V(G), E(G)$, dengan $V(G)$menyatakan menyatakan himpunan titik $\{v_{1,}v_{2,} \dots, v_n\}$ dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi $\{e_{1,}e_{2,} \dots, e_m\}$ yaitu pasang tak terurut dari

$V(G)$. Banyaknya $|V(G)|$ disebut dengan orde dari graf. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel pada sisi e begitu juga dengan sisi e menempel pada titik v_1 dan v_2, sehingga titik v_1 dan v_2 saling bertetangga. Suatu titik v dinotasikan dengan $N(v)$ adalah himpunan titik–titik yang bertetangga dengan .



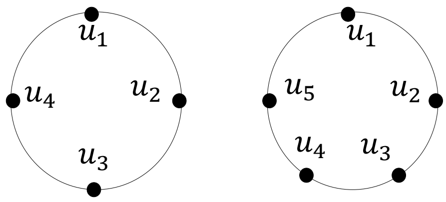
Gambar 2. Contoh graf dengan 6 titik dan 9 sisi

Pada Gambar 2. merupakan graf $G(V, E)$ dengan himpunan titik $V(G)=$ $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ dan himpunan sisi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$. Titik yang bertangga dengan titik v_1 adalah titik v_2, v_5, dan v_6, sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_1 adalah e_1, e_7, e_8 dan e_9. Derajat (*degree*) dari suatu titik v pada graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan *d(v)*, pada Gambar 2 $d(v_1) = 4$, $d(v_2) = 2$ dan $d(v_3) = 4$. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awalan dan titik akhir yang sama, sedangkan sisi paralel atau *multi edges* adalah dua sisi atau lebih yang mempunyai titik awal dan akhir yang sama. Pada Gambar 2 sisi paralel adalah e_8 dan e_9, sedangkan *loop* terdapat pada e_3.

Jalan adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi yang menempel dengan titik sebelumnya dan sesudahnya pada suatu graf. Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda – beda dimana titik – titik yang dilewati tepat satu kali. Pada Gambar 2 yang merupakan jalan adalah $v_1 - e_7 - v_5 - e_5 - v_4 - e_4 - v_3$, sedangkan contoh lintasan pada Gambar 2. adalah $v_2 - e_2 - v_3 - e_4 - v_4 - e_5 - v_5 - e_6 - v_6$.

2.2 Kelas – Kelas Graf

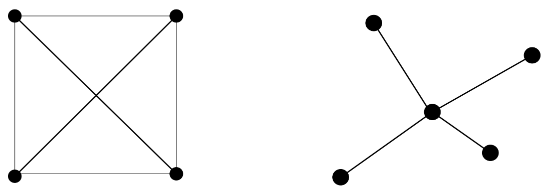
Graf siklus merupakan lintasan tertutup dimana setiap titik masing-masing berderajat dua, graf siklus dinotasikan dengan $C_n$dengan n menyatakan orde dari graf *G*.



(a) (b)

Gambar 3. Contoh (a) Graf siklus dengan orde 4 dan (b) orde 5

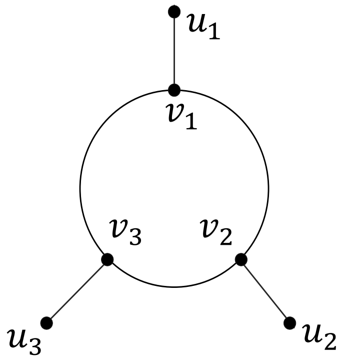
Graf lengkap adalah suatu graf dengan n titik dimana setiap titiknya saling terhubung ke titik lainnya, graf lengkap dinotasikan dengan K_n. Setiap titik pada K_n berderajat $n - 1$. Suatu graf dikatakan graf bintang adalah graf sederhana yang memiliki n titik dan $n - 1$ sisi. Satu titik pada graf bintang disebut sebagai titik pusat berderjat n -1, sedangkan titik yang lainnya berderajat satu, dan di notasikan dengan $K_{1,n-1}$.



(a) (b)

Gambar 4. (a) Graf lengkap K_4, (b) Graf bintang $K_{1,4}$

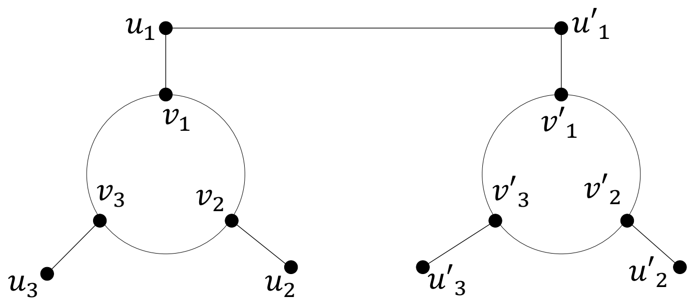
Graf matahari dinotasikan dengan S_n, $n \geq 3$ adalah graf yang memuat siklus ($C_n, n \geq 3$), dimana setiap titik pada graf siklus diberikan penambahan titik terhubung sedemikian sehingga setiap titik pada graf siklus menjadi berderajat tiga.



Gambar 5. Graf matahari S_3

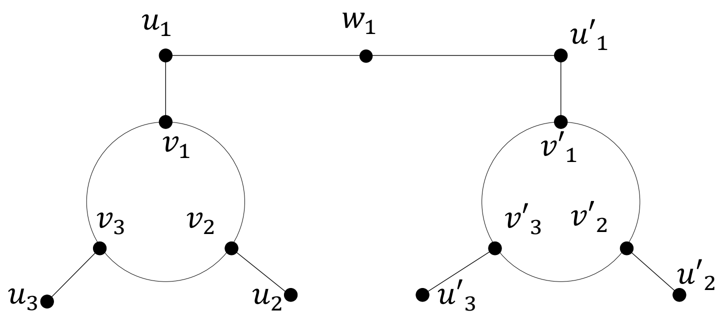
2.3 Operasi – Operasi Graf

Graf Barbel matahari adalah graf sederhana yang dibetuk dengan menghubungkan dua tiruan atau jiplakan dari matahari yang dihubungkan dengan sebuah sisi yaitu sisi (u_1, u'_1) dinotasikan dengan B_{S_n}.



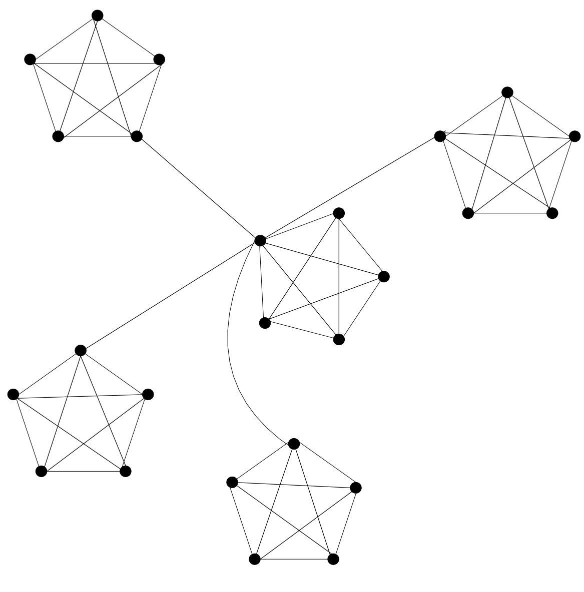
Gambar 6. Graf barbel matahari B_{S_3}

Graf subdivisi dari graf barbel matahari B_{S_n} yang dinotasikan dengan $B_{S_n}^{*s}$ adalah graf yang diperoleh dari graf B_{S_n} dengen menyisipkan $s \geq 1$ titik pada jembatan graf barbel B_{S_n}.



Gambar 7. Graf $B_{S_3}^{*s}$ dengan subdivisi sebanyak 1 titik

Misalkan $u \in V(H)$, operasi *comb* dari G dan H dinotasikan dengan $G \rhd H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil salinan H sebanyak $|V(G)|$ dan menempelkan titik *u* pada setiap titik di G.



Gambar 8. Operasi *comb* graf $K_{1,4} \rhd K_5$

2.4 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Definisi dari bilangan kromatik lokasi graf menurut Chatrand dkk., pada 2002. Bilangan kromatik lokasi didefinisikan misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik u dan v yang bertetangga di graf G. Misalkan C_i adalah himpunan titik – titik yang diberi warna i, selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas – kelas warna dari $V(G)$. Kode warna $c_\Pi(v)$ adalah k – pasang terurut $(d(v,C_1),d(v,C_2),\dots,d(v,C_k))$ dengan $d(v,C_i) = \min\{d(v,x)|\ x\ \in\ c_i\}$ untuk $1 \le i \le k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G, dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi.

Berikut ini diberikan Teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., (2002)

Teorema 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Misal *c* adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung *G*. Jika titik *u* dan titik *v* adalah dua titik yang berbeda pada graf *G* sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w\ \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Dalam hal khusus, jika titik *u* dan titik *v* adalah titik – titik yang tidak bertetangga di *G* sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

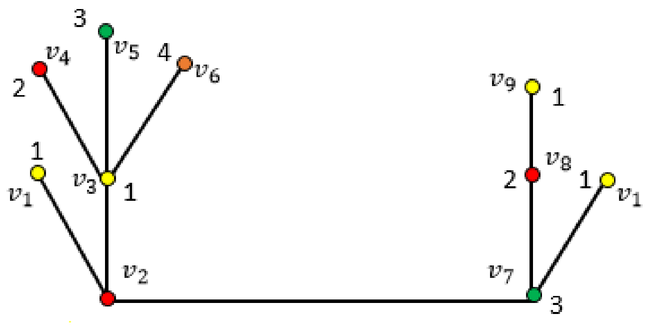
Bukti : Misalkan *c* adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\Pi = \{c_1\ ,c_2\ ,\dots,c_k\}$ adalah partisi dari titik – titik *G* ke dalam kelas warna c_i. Untuk semua , $v \epsilon V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal c_i dari Π. Akibatnya, $(u\ ,c_i) = d(v,c_i\ ) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w\,\epsilon\,V(G) - \{u,v\}$ maka $(u\ ,c_i) = d(v,c_i\ )$ untuk setiap $j \neq i\ , 1 \le j \le k$. Akibatnya $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga *c* bukan pewarnaan lokasi. Jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 (Chartrand dkk., 2002)

Jika *G* adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan *k* daun, maka $\chi_L(G) \ge k + 1$.

Bukti : Misalkan *v* adalah suatu titik yang bertetangga dengan *k* daun, yaitu $x_1, x_2\ ,\dots, x_k$ di *G*. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari *G* mempunyai warna yang berbedda untuk setiap x_i, dimana *i* = 1,2,3, ... , *k*. Karena *v* bertangga dengan semua x_i, maka *v* harus mempunyai warna yang berbeda sengan semua daun x_i. Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■

Berikut ini diberikan graf *G* dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf *G* tersebut.



Gambar 9. Pewarnaan lokasi minimum pada *G* dengan $\chi_L(G) = 4$

Diberikan graf *G* yang dapat dilihat Gambar 9, akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi graf *G*. Karena terdapat titik v_3 yang mempunyai tiga daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh

$$\chi_L(G) \geq 4 \tag{2.1}$$

Misalkan *c* adalah adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna, pada graf *G* diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3, v_9, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_5, v_7\}$ dan C_4=$\{v_6\}$,oleh karena itu , diperoleh kode warna sebagai berikut :

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,2,0)$

$c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_7) = (2,1,0,3)$

$c_\Pi(v_3) = (0,1,1,1)$; $c_\Pi(v_8) = (1,0,1,4)$

$c_\Pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_9) = (0,1,2,5)$

$c_\Pi(v_5) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_{10}) = (0,2,1,4)$.

Karena kode warna dari semua titik di *G* berbeda , maka *c* adalah pewarnaan lokasi. Jadi ,$X_L(G) \leq 4$ (2.2). Berdasarkan (2.1) dan (2.2), maka Π adalah pewarnaan lokasi dati *G* sehingga $X_L(G) = 4$ ■

Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Untuk lingkaran C_n dari orde $n \geq 3$

$$\chi_L = \begin{cases} 3 \text{ ; jika n adalah ganjil} \\ 4 \text{ ; jika n adalah genap} \end{cases}$$

Bukti : Pertimbangan Dua Kasus

Kasus 1. $n \geq 3$ adalah ganjil. Misalkan $C_n : v_1, v_2, \dots, v_n$, dimana v_1 diberi warna 1, v_i untuk i genap diberi warna 2 dan v_i untuk $i \geq 3$ ganjil diberi warna 3. Berdasarkan untuk setiap graf terhubung G dari orde $n \geq 3$ yang dimana $3 \leq \chi_L(G) \geq n$ dengan bilangan kromatik lokasi memenuhi batas tersebut , hanya perlu menunjukan bahwa ini adalah pewarnaan lokasi $\chi_L(G) = 3$ dengan mempertimbangkan 2 subkasus sebagai berikut :

Sub kasus 1.1

Jika $n \geq 4k + 1$, dimana $k \geq 1$ untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1{,}0{,}1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2k + 2 - 2_i, 0{,}1)$. Juga untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1{,}0{,}1)$ dan untuk $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2k - 2_i, 1{,}1{,}0)$. Karena vektor –vektor $c_\Pi(v_i)$ berbeda pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi $\chi_L(C_{4k+1}) = 3$.

Sub kasus 1.2

$n = 4k + 3$, dimana $k \geq 0$. Membuktikan bahwa $\chi_L(C_{4k+3}) = 3$ dengan cara yang sama pada subkasus 1.1 .

Kasus 2. $n \geq 3$ adalah genap. Misalkan $C_n : v_1, v_2, \dots, v_n$, dimana v_1 diberi warna 1, warna 2 untuk v_2, warna 3 untuk v_i, jika $i \geq 3$ ganjil, dan warna 4 untuk v_i, jika $i \geq 4$ genap. Ditunjukan bahwa pewarnaan lokasi dari C_n adalah $\chi_L(C_n) = 4$.

Sub kasus 2.1

Jika $n = 4k$, dimana $k \geq 1$ untuk $1 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (2i, 2i - 1{,}0{,}1)$, dimana $k + 1 \leq i \leq 2k - 1$, $c_\Pi(v_{2i+1}) = (4k - 2i, 4k - 2i + 1{,}0{,}1)$. Untuk $2 \leq i \leq k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2i - 1{,}2i - 1{,}1{,}0)$, dimana $k + 1 \leq i \leq 2k$, $c_\Pi(v_{2i}) = (2k + 1 -$

$2i, 4k+2-2i, 1{,}0)$. Karena vektor-vektor $c_\Pi(v_i)$ berbeda pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi

Sub kasus 2.2

Jika $n = 4k+2$, dimana $k \geq 1$. Pembuktian bahwa pewarnaan tersebut adalah pewarnaan lokasi sama seperti sub kasus 2.1. Selanjutanya ini hanya perlu membuktikan bahwa $\chi_L(G) = 4$, jika n adalah genap. Asumsikan, sebaliknya bahwa terdapat pewarnaan lokasi c dari C_n memerlukan 3 warna, misalkan 1,2,3, untuk $n \geq 4$. Setidaknya terdapat satu warna , misalkan 2 adalah warna bilangan genap t dari titik C_n, dimana $2 \leq t \leq n/2$. Seperti proses lingkaran pada C_n. Dimulai v_1 misalkan $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in}$, titik-titik dari $C_n$bahwa berwarna 2. Karena tidak ada 2 titik yang bertetangga , termasuk untuk setiap bilangan bulat dengan $1 \leq j \leq t$, interval $I_j = \{v_{ij+1}, v_{ij+2}, \dots, v_{ij+1} - 1\}$.

Pertama, ditunjukan bahwa tidak ada interval yang memilki kardinalitas ganjil untuk 3 atau lebih, untuk asumsi sebaliknya beberapa selang I_j memuat bilangan ganjil pada titik 3 atau lebih . Tanpa menghilangkan umum, asumsikan bahwa v_{ij+1} dan $v_{ij+1} - 1$ diberi warna 1. Meskipun demikian, $c_\Pi(v_{ij}+1)$ = $c_\Pi(v_{ij+1}-1)$ = (0,1,1) tetapi tidak mungkin.

Kedua, ditunjukan bahwa tidak ada selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya, untuk asumsikan sebaliknya, bahwa terdapat selang-selang yang memuat bialngan genap di titik –titiknya. Karena c_{2k} memilki orde genap, pasti terdapat bilangan genap dari selang yang memuat bilangan genap pada titik-titiknya. Misal I_j dan I_k menjadi 2 selang berbeda memuat bilangan genap dititik-titiknya. Asumsikan, tanpa kehilangan keumuman, bahwa $v_{ij}+1$ diberi pewarnan 1. Tepat hanya 1 dari $v_{ik}+1$ dan $v_{ik}-1$ diberi warna 1, maka $c_\Pi(v_{ij}+1)$ = $c_\Pi(v_{ij+1}-1)$ = (0,1,1) kontradiksi. Akibatnya, semua selang *t = n/2* memuat tepat satu titik. Sehingga, terdapat bilangan bulat terkecil I_j $(1 \leq j \leq n/2)$, maka $v_{ik}+1$ dan $v_{ik}-1$ diberi warna yang berbeda, misalkan 1 dan 3, secara berturut-turut. Perntingnya,terdapat bilangan bulat $I_k > I_j$ bahwa $v_{ik}-1$ diberi warna 3 dan $v_{ik} +$

1 diberi warna 1. Meskipun demikian $c_\Pi\left(v_{ij}+1\right)$ = $c_\Pi\left(v_{ij+1}-1\right)$ = (0,1,1). Hasil akhir kontradiksi oleh karena itu $\chi_L(C_n) = 4$ jika n adalah genap . ■

Teorema 2.3 (Chartrand dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lengkap (k_n) adalah n untuk $n \geq 2$

Bukti: Karena setiap titik pada graf saling bertetangga maka setiap titik diberi warna yang berbeda, jadi $\chi_L(K_n) = n$ untuk $n \geq 2$. ■

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2022/2023 di Program Studi Magister Matematika, Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah – langkah Penelitian

Langkah – langkah yang dilakukan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf matahari, graf barbel matahari, subdivisi dari graf barbel matahari, dan operasi *comb* graf matahari dan lengkap, lengkap graf matahari, serta graf bintang dan lengkap dengan $n \geq 3$ adalah sebagai berikut:

1) Langkah - langkah menentukan bilangan kromatik lokasi graf matahari sebagai berikut :
   a) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf matahari S_n untuk $n \geq 3$, karena graf matahari memuat graf siklus dengan n titik maka dibutuhkan sekurang – kurangnya memuat warna dari graf siklus n titik. Jika batas bawah tersebut belum terpenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.
   b) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf matahari S_n untuk $n \geq 3$. Mengkontruksi pewarnaan titik – titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga

diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi.

c) Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi S_n sama, misalkan x maka diproleh bilangan kromatik lokasi $\chi_L(S_n) = x$
d) Memformulasikan hasil – hasil yang diperoleh dalam suatu pernyataan umum
e) Membuktikan hasil – hasil yang diperoleh pada langkah d.

2) Langkah - langkah menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel matahari (B_{S_n}) sebagai berikut:
   a) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel matahari $\left(B_{S_n}\right)$ dengan $n \geq 3$ menggunakan batas bawah, karena graf barbel matahari memuat graf matahari maka sekurang – kurangnya memuat warna dari graf matahari. Jika batas bawah tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaan sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.
   b) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel matahari $\left(B_{S_n}\right)$ dengan $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titik – titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syrat pewarnaan lokasi.
   c) Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L\left(B_{S_n}\right) = x$,
   d) Memformulasikan hasil – hasil yang diperoleh ke bentuk perumuman
   e) Membuktikan hasil – hasil yang diperoleh pada langkah d.

3) Langkah – langkah menentukan bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel matahari $(B_{S_n}^{*s})$ sebagai berikut:
   a) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi subdivisi graf barbel matahari $(B_{S_n}^{*s})$ dengan $n \geq 3$ dan $s \geq 1$ menggunakan batas bawah, karena subdivisi dari graf barbel matahari memuat graf barbel matahari maka sekurang – kurangnya memuat warna dari graf barbel matahari. Jika

batas bawah tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaan sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi subdivisi dari graf barbel matahari $B_{S_n}^{*s}$) dengan $n \geq 3$ dan $s \geq 1$. Mengkonstruksi pewarnaan titik – titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syrat pewarnaan lokasi.

c) Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L\left(B_{S_n}^{*s}\right) = x$.

d) Memformulasikan hasil – hasil yang diperoleh ke bentuk perumuman

e) Membuktikan hasil – hasil yang diperoleh pada langkah d.

4) Langkah – langkah menentukan bilangan kromatik lokasi pada operasi *comb* $S_n \rhd K_n$, $K_n \rhd S_n$ sebagai berikut:

a) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi operasi *comb* dengan $n \geq 3$ menggunakan batas bawah, karena pada $S_n \rhd K_n$, $K_n \rhd S_n$, dengan $n \geq 3$ memuat graf lengkap (K_n) maka sekurang –kurangnya memuat warna dari graf lengkap Jika batas bawah tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaan sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi *comb* $S_n \rhd K_n$, $K_n \rhd S_n$, dengan $n \geq 3$. Mengkonstruksi pewarnaan titik – titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syrat pewarnaan lokasi.

c) Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L(G) = x$.

d) Memformulasikan hasil – hasil yang diperoleh ke bentuk perumuman

e) Membuktikan hasil – hasil yang diperoleh pada langkah d.

5) Langkah – langkah menentukan bilangan kromatik lokasi pada operasi *comb* $K_{1,n-1} \rhd K_n, K_n \rhd K_{1,n-1}$ sebagai berikut:

f) Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi operasi *comb* dengan $n \geq 3$ menggunakan batas bawah, karena pada $K_{1,n-1} \rhd K_n, K_n \rhd K_{1,n-1}$ dengan $n \geq 3$ memuat graf lengkap (K_n) maka sekurang – kurangnya memuat warna dari graf lengkap. Jika batas bawah tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaan sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

g) Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi *comb* $K_{1,n-1} \rhd K_n$, $K_n \rhd K_{1,n-1}$ dengan $n \geq 3$.Mengkonstruksi pewarnaan titik – titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sedemikian sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik yang memenuhi syrat pewarnaan lokasi.

h) Jika batas bawah dan batas atas bilangan kromatik lokasi sama, misal x maka diperoleh bilangan kromatik lokasinya, yaitu $\chi_L(G) = x$.

i) Memformulasikan hasil – hasil yang diperoleh ke bentuk perumuman

j) Membuktikan hasil – hasil yang diperoleh pada langkah d.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan, penelitian ini telah menentukan bilangan kromatik lokasi graf matahari dan beberapa hasil operasinya. Bilangan kromatik lokasi graf matahari S_n, untuk $n \geq 3$ adalah 4, demikian juga dengan operasi barbel atau subdivisinya. Bilangan kromatik lokasi $S_n \rhd K_n$ dan $K_{1,n-1} \rhd K_n$ adalah $n + 1$. Bilangan kromatik lokasi $K_n \rhd K_{1,n-1}$ adalah n, tetapi untuk $K_n \rhd S_n$ diperoleh untuk beberapa nilai n saja.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkankan lagi untuk menentukan bilangan kromatik lokasi pada beberapa hasil operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun H, Baskoro E T. 2011. Locating-chromatic number of amalgamation of stars. ITB *J.Sci.* **43A** : 1 – 8.

Asmiati. 2014. The locating-chromatic number of non homogeneus amalgamation of stars. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* **93(1)** : 89 – 96.

Asmiati. 2016. On the locating-chromatic number of non homogeneus caterpillars and firecracker graphs. *Far East Journal of Mathematical Sciences.* **100(8)**: 1305 – 1316.

Asmiati. 2017. Bilangan kromatik lokasi *n* amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh suatu lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **13(2)**: 115 – 121.

Asmiati, Yanan I.K.S.G., dan Yulianti. 2018. On locating-chromatic number of certain barbel graphs. *Internasional Journal of Mathematical Sciences.* **100(8):** 1- 5.

Asmiati, Yanan I.K.S.G., dan Yulianti. 2019. On locating-chromatic number of subdivision of barbell graphs containing generlized petersen graphs. *international Journal of Computer Sciences and Network Security.* **19(7):** 45-50.

Behtoei A, Omoomi B. 2016. On the locating-chromatic number of cartesian product of graphs.*Ars Combinatoria*.**126**: 221-235.

Chartrand G, Salehi e, Zhang P. 1998. On the partition dimension of graph. *Congr. Numer.* **130:** 157 – 168.

Chartran G, Erwin D, Henning, M.A., Slater P.J., Zhang, P. 2002. The locating-chromatic number of graphs. *Bull. Inst.Combin. Appl.* **36:** 89 – 101.

Deo, N. 1989. *Graph theory with application to engineering and computer science.* Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi.

Damayanti, M., Asmiati, Fitriani, Ansori, dan Fadila, A. 2021. The locating chromatic number of some modifed path with cycle having locating number four. *Journal of Physics: Conference Series*

Irawan, A., Asmiati, Zakaria, L., dan Muludi, K. 2021. The locating-chromatic number of origami graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics.* **14(167)** : 1 – 15.

Saputro, S. W., Mardiana, N., dan Purwasi, I.A. 2013. The metric dimension of comb product graph. *Graph Teory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday.*