BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh

PUPUT OCTAVIANI
1917031007

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA

Oleh

PUPUT OCTAVIANI

Graf bunga Aster $D(K_n)$ adalah konstruksi dari graf lengkap K_n dengan titik $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dan n titik $w_1, w_2, \cdots, w_n$ sehingga titik v_i dan v_{i+1} bertetangga di w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dengan $v_{n+1} = v_1$. Graf barbel bunga Aster, dinotasikan dengan $B_{D(K_n)}$ adalah graf yang dibentuk dari dua buah graf bunga Aster yang dihubungkan oleh suatu jembatan. Pada penelitian ini, dikaji tentang bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster dan barbelnya. Bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster, $\chi_L(D(K_n))$ adalah 4 untuk $n = 3$ sedangkan bernilai n untuk $n > 3$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Aster, $\chi_L(B_{D(K_n)})$ adalah $n + 2$ untuk $n = 3$ sedangkan untuk $n > 3$ adalah $n + 1$.

Kata kunci: graf bunga Aster, bilangan kromatik lokasi, graf barbel

ABSTRACT

LOCATING CHROMATIC NUMBER OF THE DAISY GRAPH AND ITS BARBELL

BY

PUPUT OCTAVIANI

The Daisy graph, $D(K_n)$ is a constructed from the complete graph K_n with vertices $v_1, v_2, \cdots, v_n$ and n isolated vertices $w_1, w_2, \cdots, w_n$ such that vertices v_i, v_{i+1} are connected to w_i for $i = 1, 2, \dots, n$ where $v_{n+1} = v_1$. The barbell graph of daisy graph, denoted by $B_{D(K_n)}$ is a graph formed from two daisy graps connected by a bridge. In the results, we determined the locating chromatic number of the daisy graph and its barbell. The locating chromatic number of the daisy graph $\chi_L(D(K_n))$ is 4 for $n = 3$ while the value is n for $n > 3$. The locating chromatic number for the barbell of the daisy graph, $\chi_L(B_{D(K_n)})$ is $n + 2$ for $n = 3$ while for $n > 3$ is $n + 1$.

Keywords: daisy graph, locating chromatic number, barbell graph

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA

Oleh

PUPUT OCTAVIANI

Skripsi

Sebagai Salah satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA**
Nama Mahasiswa	: ***Puput Octaviani***
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031007**
Program Studi	: **Matematika/S1 Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI,

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 197604112000122001

Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si
NIP. 199311062019032018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekertaris : **Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Sekripsi: **31 Mei 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	:	**Puput Octaviani**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1917031007**
Jurusan	:	**Matematika**
Judul Sekripsi	:	**BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA ASTER DAN BARBELNYA**

Dengan ini saya menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 31 Mei 2023

Puput Octaviani
NPM. 1917031007

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Puput Octaviani lahir di Sribhawono pada 02 Oktober 2000. Penulis merupakan anak pertama dari dua bersaudara dari pasangan Bapak Suyanto dan Ibu Partini.

Penulis mengawali Pendidikan di Taman Kanak-kanak (TK) Al-Islam Buana Sribhawono pada 2005-2007. Melanjutkan ke Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 1 Bandar Sribhawono pada tahun 2007-2013. Melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 1 Bandar Sribhawono pada tahun 2013-2016. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Bandar Sribhawono pada tahun 2016-2019. Selanjutnya, pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN dan menjadi mahasiswa penerima beasiawa Bidikmisi.

Pada tahun 2020 dan 2021 penulis aktif di Unit Kegiatan Mahasiawa (UKM) Tingkat Fakultas yaitu di UKM Natural, penulis diamanahkan sebgai Sekretaris Biro Usaha. Dan pada tahun 2022 penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Labuhan Ratu IV, Kecamatan Labuhan Ratu, Kabupaten Lampung Timur, sebagai bentuk pengabdian terhadap masyarakat. Pada tahun yang sama penulis juga melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Dinas Ketahanan Pangan, Tanaman Pangan, dan Hortikultura Provinsi Lampung sebagai bentuk pengaplikasian bidang ilmu yang dipelajari pada saat kuliah di dalam dunia kerja

KATA INSPIRASI

"*Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya*"

(Q.S Al-Baqarah: 286)

"Dan jangan kamu (merasa) lemah, dan jangan (pula) bersedih hati, sebab kamu paling tinggi (derajatnya), jika kamu orang yang beriman".

(Q.S Ali-Imran: 139)

"Tanda engkau sedang berada dalam perjalanan naik yang tepat adalah adanya masalah dan hambatan. Be Strong!"

(Mario Teguh)

"Sukses adalah Ketika kita bisa bersahabat dengan masalah".

"Setiap orang akan mempunyai jalan hidup dan skenarionya masing-masing. Fokuslah dengan jalan hidup sendiri, jangan toleh hidup orang lain. Jalani apa yang memang harus dijalani".

"Sejatinya kebahagiaan dan kesuksesan setiap orang itu berbeda".

(Puput Octaviani)

PERSEMBAHAN

Dengan mengucapkan Alhamdulillah sebagai rasa syukur kepada Allah SWT atas nikmat dan hidayah yang telah diberikan sehingga saya dapat menyelesaikan skripsi dengan baik dan selesai pada waktunya.

Ayah Suyanto dan Ibu Partini

Teima Kasih untuk kedua orang tuaku untuk semua doa, motivasi, arahan, saran pengorbanaan, dan dukungan yang selalu diberikan. Sehingganya anakmu ini dapat menyelesaikan pendidikan dengan baik. Semoga anakmu ini bisa menjadi anak yang membanggkan bagi ayah dan ibu.

Dosen Pembimbing dan Penguji

Terimakasih kepada Ibu/Bapak dosen pembimbing dan penguji yang telah sabar membimbing, memberikan arahan, dukungan, dan ilmu yang sangat bermanfaat.

Keluarga dan Sahabat

Terima kasih kepada seluruh keluarga Adikku Andhika. Mak Wek, Pak Wek, Kakek, Nenek, Pakde Bude dan Om, Tante, Kak Reza Arif Pahlipi, dan semua sahabat serta orang-orang baik yang telah memberikan motivasi, dan dukungan.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur penulis ucapkan atas kehadirat Allah SWT yang melimpahkan rahmat, taufik, hidayah serta inayahnya kepada penulis sehingga penulis dapat membuat skripsi dengan judul **"Bilangan Kromatik Lokasi Graf Bunga Aster dan Barbelnya"** diselesaikan dengan baik. Tak lupa shalawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Agung Muhammad SAW, keluarga, sahabat, dan umatnya serta yang selalu kita nantikan syafaatya nanti di Yaumil Kiyamah. Amin Ya Robbal Aalamin.

Penyelesaian skripsi ini tidak terlepas dari dukungan, motivasi, semangat bantuan dan kerja sama dari berbagai pihak. Untuk itu dalam kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing satu skripsi yang telah memberikan dukungan, arahan, motivasi, semangat, dan bimbingan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dengan baik.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku dosen pembimbing dua skripsi yang telah memberikan dukungan, arahan, semangat, dan bimbingan.
3. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen pembahas skripsi yang telah memberikan dukungan, arahan, semangat, dan bimbingan.
4. Bapak Prof. Dr. Lazakaria, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matemematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

7. Ayah, Ibu yang selalu memberikan doa, semangat, motivasi, dan dukungannya selama penyusunan skripsi ini dari awal hingga akhir.
8. Adikku Andhika Dwi Ananta yang selalu menghibur, dan memberikan penulis semangat untuk segera menyelesaikan skripsi.
9. Seluruh keluarga besar, Kakek, Nenek, Om, Tante, Pakde, Bude, dan pihak-pihak lain yang selalu memberikan dukungan.
10. Kak Eza yang selalu memberikan doa, dukungan, motivasi, dan semangatnya serta mendengarkan keluh kesah penulis.
11. Lidwina, Listra teman seperbimbingan. Sahabat sahabat yang selalu memberikan dukungan yaitu, Amel, Silvia, Sidiq, Erika, Peni, Novi.
12. Seluruh saudara di PT Puspa Jaya Transport, dan Bapak Nyoman sekeluarga yang telah memberikan doa dan dukungannya.
13. Serta seluruh pihak terkait lainnya yang telah membantu penulis dalam menyelsaikan skripsi ini.
14. Seluruh teman-teman sejurusan matematika Angkatan 2019 yang selalu memberikan semangat yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Dalam hal penulisan skripsi ini penulis menyadari masih adanya kekurangan dalam penulisan karena keterbatasan pengetahuan, kemampuan, serta pengalaman yang dimiliki penulis. Oleh karena itu, penulis meminta maaf dan siap menerima segala kritik dan saran yang bersifat membangun. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi penulis dan pembaca.

Bandar Lampung, 31 Mei 2023

Penulis

Puput Octaviani

DAFTAR ISI

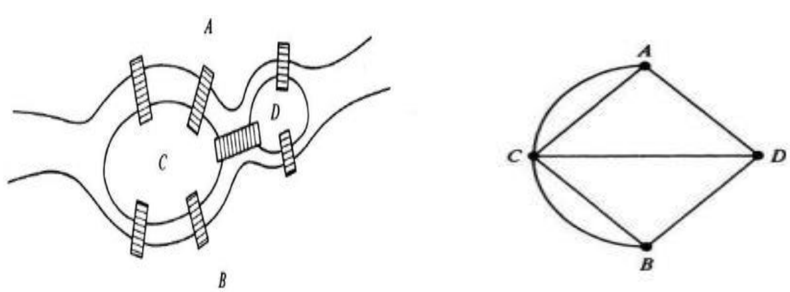
DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang Masalah

Dalam era kemajuan ini banyak permasalahan yang bisa diselesaikan dengan menggunakan beberapa pengaplikasian teori dalam cabang ilmu matematika diantaranya ialah teori graf. Teori graf adalah salah satu cabang ilmu matematika yang banyak mendapat perhatian karena dapat diaplikasikan dalam kehidupan sehari-hari, diantaranya pada jaringan komunikasi, transportasi, ilmu komputer, riset operasi dan masih banyak aplikasi lainnya (Nasir dkk., 2022).

Teori graf pertama kali diperkenalkan oleh ilmuan matematika dari Swis yaitu Leonardo Euler pada tahun 1736. Euler berhasil menyelesaikan permasalahan Jembatan Konigsberg yang menghubungkan daratan Konigsberg dengan pulau di sungai Pregel yang dihubungkan dengan tujuh buah jembatan.



Gambar 1. Jembatan Konigsberg dan representasi pada graf

Seiring dengan kemajuan, teori graf mengalami perkembangan yang begitu signifikan. Salah satu konsep teori graf yang sedang berkembang akhir-akhir ini adalah bilangan kromatik lokasi. Konsep bilangan kromatik lokasi merupakan perkembangan kusus dari dimensi partisi dan pewarnaan graf. Konsep pewarnaan graf menghasilkan konsep bilangan kromatik. Bilangan kromatik ini memiliki aplikasi yang menarik untuk dikaji dalam berbagai masalah (Welyyanti, 2018).

Bilangan kromatik adalah bilangan bulat terkecil k sehingga graf G memiliki pewarnaan titik sejati dengan k warna. Pewarnaan titik sejati adalah pemetaan $c: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, k\}$ sedemikian sehingga $c(u) \neq c(v)$ untuk setiap u dan v bertetangga di G. Bilangan kromatik biasanya dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Welyyanti, 2018).

Bilangan kromatik lokasi merupakan gabungan dari konsep dimensi partisi suatu graf dengan pewarnaan graf. Bilangan kromatik lokasi graf adalah pengelompokkan titik berdasarkan kelas-kelas warna dengan syarat pada setiap titik graf memiliki kode warna yang berbeda (Chartrand dkk., 2002). Di antara penelitian yang sudah ada yaitu, bilangan kromatik graf berorde n dengan bilangan kromatik lokasi $(n-1)$ (Chartrand dkk., 2003), bilangan kromatik lokasi amalgamasi bintang (Asmiati dkk., 2011), bilangan kromatik lokasi graf split lintasan (Rahmatalia dkk., 2022), bilangan kromatik lokasi graf pohon pisang (Asmiati, 2017). Bilangan kromatik lokasi graf pohon (Asmiati, 2016), bilangan kromatik lokasi graf gabungan (Behtoei dkk., 2011), dan bilangan kromatik lokasi graf kneser (Behtoei dkk., 2011), serta masih banyak penelitian terkait hal tersebut.

Graf bunga Aster adalah graf yang dikonstruksi dari graf lengkap K_n. Graf bunga Aster dinotasikan $D(K_n)$ memiliki n titik yang berderajat 2 dan n titik lain berderajat $n+1$ (Sugeng dkk., 2022).

Graf Barbel dinotasikan $B_{n,n}$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan dua buah sebarang graf terhubung G dan H dengan sebuah jembatan (Asmiati dkk., 2018). Penelitian bilangan kromatik lokasi graf barbel $\chi_L(B_{n,n})$ diantaranya bilangan kromatik lokasi graf barbel *shadow* lintasan (Asmiati dkk., 2021), dan bilangan kromatik lokasi graf barbel origami tertentu (Irawan dkk., 2020),

Sejauh penelusuran literatur yang dilakukan belum ada kajian yang membahas terkait bilangan kromatik lokasi dari salah satu keluarga graf bunga yaitu graf bunga Aster. Oleh karena itu, pada penelitian ini akan dibahas mengenai bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster dan barbelnya.

1.2. Tujuan

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster dan barbelnya.

1.3. Manfaat

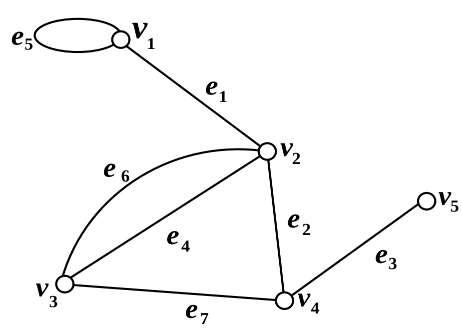
Manfaat dari peneliatian ini adalah sebagai berikut:

1. Menambah ilmu pengetahuan terkait teori graf khususnya pada bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster dan barbelnya.
2. Sebagai referensi tambahan bagi peneliti selanjutnya terkait bilangan kromatik graf bunga aster dan barbelnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1. Konsep Dasar Graf dan Kelas-kelas Graf

Pada bagian ini akan diberikan definisi graf dan sifat-sifatnya yang diambil dari (Deo, 1989). Graf G adalah himpunan terurut $\left(V(G), E(G)\right)$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik dari G dengan $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ yang menyatakan himpunan sisi dari G yakni pasangan tak terurut $V(G)$. Banyaknya himpunan titik $V(G)$ disebut dengan orde dari graf. Jika titik v_1 dan v_2 dihubungkan oleh sisi e, maka titik v_1 dan v_2 dikatakan menempel pada sisi e, begitu juga dengan e menempel pada titik v_1 dan v_2. Titik v_1 dikataka bertetangga dengan titik v_2. Himpunan dari suatu titik yang bertetngga dengan v dinotasikan dengan $N(v)$.



Gambar 2. Contoh graf dengan 5 titik dan 7 sisi

Graf pada gambar diatas merupakan graf $G = (V, E)$, dengan himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan sisinya adalah $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$.

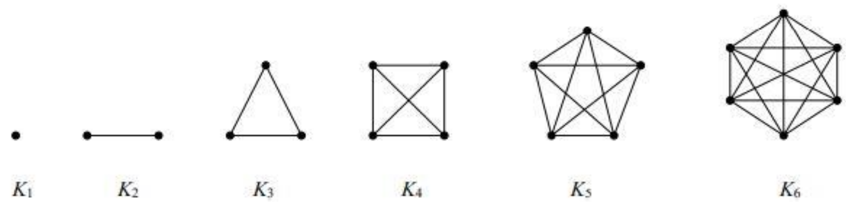
Titik yang brtetangga dengan titik v_1 adalah v_2, sedangkan sisi yang menempel dengan titik v_1 adalah sisi e_1. Derajat suatu titik v adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v yang dinotasikan dengan $d(v)$. Daun adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 2, yang dikatakan sebagai daun adalah titik v_5. Derajat pada masing-masing graf pada Gambar adalah $d(v_1) = d(v_3) = d(v_4) = 3, d(v_2) = 4,$ dan $d(v_5) = 1$. Derajat suatu titik biasanya juga disebut sebagai *valensi.* Sisi paralel adalah beberapa sisi yang memiliki titik ujung yang sama. *Loop* adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Pada Gambar 2 adalah tedapat sisi paralel pada titik v_2 dan v_3. Dan terdapat *loop* pada sisi e_5.

Jalan adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi yang menempel dengan titik sebelumnya dan sesudahnya pada suatu graf. Pada Gambar 2 yang merupakan jalan adalah v_4, e_2, v_2, e_6, v_3, e_7, v_4, e_3, v_5. Lintasan adalah jalan yang melewati titik yang berbeda-beda dimana titik-titik yang dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Pada Gambar 2 yang merupakan lintasan adalah v_1, e_1, v_2, e_4, v_3, e_7, v_4, e_3, v_5. Sirkuit adalah lintasan tertutup, yaitu memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sirkuit dibedakan menjadi dua macam, yaitu sirkuit ganjil dan sirkuit genap. Sirkuit ganjil adalah sirkuit yang memuat banyaknya jumlah titik berjumlah ganjil, sedangkan sirkuit genap sirkuit yang memuat banyaknya titik berjumlah genap. Contoh sirkuit ganjil pada Gambar 2 adalah v_2, e_4, v_3, e_7, v_4, e_2, v_2.

Graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Jika tidak, maka graf G disebut graf tak terhubung. Pada graf terhubung G, jarak yang dinotasikan dengan $d(v_i, v_j)$ antara dua titik v_i dan v_j adalah panjang lintasan terpendek antara dua titik (yakni banyaknya sisi pada lintasan terpendek) dalam suatu graf.

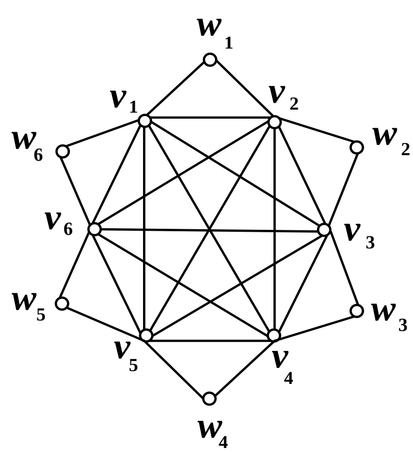
Graf sederhana yang terdiri atas sebuah sisi dari setiap pasangan titik disebut graf lengkap. Graf lengkap dengan n buah titik dinotasikan dengan K_n. Karena pada setiap titik dihubungkan dengan semua titik lainnya dengan sebuah sisi, derajat dari tiap titik adalah $n - 1$ untuk graf lengkap G dengan n titik dan banyaknya sisi di G adalah $\frac{n(n-1)}{2}$.

Contoh :



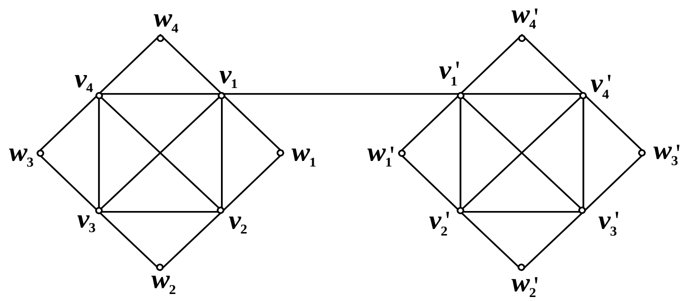
Gambar 3. Graf lengkap

Graf bunga Aster $D(K_n)$ adalah konstruksi dari graf lengkap K_n dengan titik $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dan n titik $w_1, w_2, \cdots, w_n$ sehingga titik v_i dan v_{i+1} bertetangga di w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ dengan $v_{n+1} = v_1$. Graf bunga Aster $D(K_n)$ memiliki n titik yang berderajat 2 dan n titik yang berderajat $n + 1$ (Sugeng dkk., 2022).



Gambar 4. Contoh graf bunga Aster dari K_6

Graf barbel $B_{m,n}$ terbentuk dengan menghubungkan dua graf terhubung sembarang G dan H oleh sebuah sisi sebagai jembatan, untuk $m, n \geq 3$ dengan G dan H adalah graf lengkap dengan masing-masing graf memiliki m dan n titik (Asmiati dkk., 2018).
Graf barbel bunga Aster adalah graf yang terbentuk dari dua buah graf bunga Aster yang dihubungkan dengan sebuah sisi sebagai jembatan. Graf barbel bunga Aster dinotasikan dengan $B_{D(K_n)}$.



Gambar 5. Contoh Graf barbel bunga Aster $B_{D(K_4)}$

2.2. Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Menurut (Chartrand dkk., 2002), bilangan kromatik lokasi didefinsikan misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c merupakan suatu pewarnaan sejati di graf G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk titik yang bertetangga u dan v di G. Secara ekuivalen, c merupakan sebuah partisi Π dari $V(G)$ pada kelas warna $C_1, C_2, \ldots, C_k$ dimana titik C_i diwarnai dengan i untuk $1 \leq i \leq k$. Kode warna $c_\Pi(v)$ dari sebuah titik v di G adalah k – pasang terurut. $c_\Pi(v) = (d(v, C_1), d(v, C_2), \ldots, d(v, C_k))$ dengan, $d(v, C_i) = \min\{d(v, x) | x \in C_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika pada setiap titik pada graf G memiliki kode warna yang berbeda , maka c disebut pewarnaan lokasi pada graf G. Pewarnaan lokasi pada sebuah graf G merupakan pewarnaan yang membedakan jarak pada setiap titik pada graf G pada kelas warna yang dihasilkan. Bilangan kromatik lokasi pada graf G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$ adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi. Dalam penelitiannya juga (Chartrand et al., 2002) telah membuktikan teorema terkait dasar sebuah bilangan kromatik lokasi.

Teorema 2.1

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G. Sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v adalah titik–titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:

Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G ke dalam kelas warna C_i. Untuk semua titik $u, v \,\epsilon\, V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, C_i) = d(v, C_i) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \,\epsilon\, V(G) - \{u,v\}$ maka, $d(u, C_i) = d(v, C_i)$ untuk setiap $j \neq i, 1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. ■

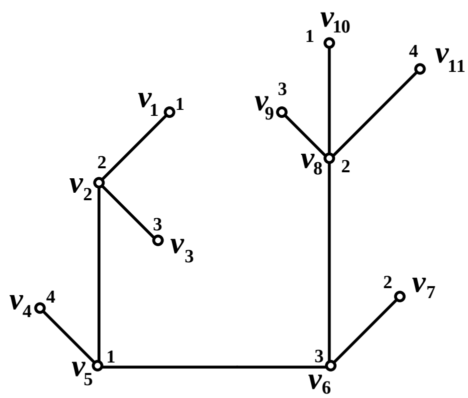
Akibat dari Teorema 2.1 di atas diperoleh sebuah batas bawah dari bilangan kromatik lokasi pada suatu graf.

Akibat 2.1

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu $x_1, x_2, \dots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, di mana $i = 1,2, \dots, k$.
Karena v bertetangga dengan semua $x_{i,}$ maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun $x_{i.}$ Akibatnya $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■



Gambar 6. Minimum pewarnaan pada suatu graf G dengan $\chi_L(G) = 4$.

Diberikan suatu graf G pada Gambar 6 kemudian akan dicari bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut. Maka terlebih dahulu akan ditentukan batas bawah dari graf G. Karena pada titik v_8 terdapat 3 buah daun, maka berdasarkan Akibat 2.1 $\chi_L(G) \geq 4$. Misalkan c adalah pewarnaan titik empat warna pada graf G sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna yaitu: $\Pi = \{C_{1,}C_2, C_{3,}C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_5, v_{10}\}$, $C_2 = \{v_2, v_7, v_8\}$, $C_3 = \{v_{3,}v_6, v_9\}$, dan $C_4 = \{v_4, v_{11}\}$. Setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,3)$	$c_\Pi(v_5) = (0,1,1,1)$	$c_\Pi(v_9) = (2,1,0,2)$
$c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2)$	$c_\Pi(v_6) = (1,1,0,2)$	$c_\Pi(v_{10}) = (0,1,2,2)$
$c_\Pi(v_3) = (2,1,0,3)$	$c_\Pi(v_7) = (2,0,1,2)$	$c_\Pi(v_{11}) = (1,1,2,0)$
$c_\Pi(v_4) = (1,2,2,0)$	$c_\Pi(v_8) = (1,0,1,1)$	

Karena kode warna pada setiap titik pada graf G berbeda maka c adalah pewarnaan lokasi, Jadi $\chi_L(G) \leq 4$. Akibatnya, $\chi_L(G) = 4$.

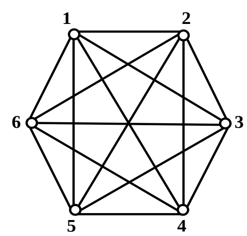
Teorema 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Bilangan kromatik lokasi graf lengkap adalah n untuk suatu graf $n \geq 2$.

Bukti:

Karena pada setiap sisi graf lengkap saling bertetangga dan pada setiap titiknya saling terhubung satu sama lain. Maka setiap titik pada graf lengkap harus diberikan warna yang berbeda. Jadi diperoleh $\chi_L(K_n) = n$ untuk $n \geq 2$.■

Di bawah ini diberikan contoh pewarnaan lokasi pada graf lengkap K_6 menggunakan 6 warna



Gambar 7. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada graf lengkap K_6

Diberikan suatu graf G pada Gambar 7 akan dicari bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut. Terlebih dahulu ditentukan batas bawah dari graf G. Karena gambar graf G di atas merupakan graf lengkap maka berdasarkan Teorema 2.1, $\chi_L(K_6) \geq 6$. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna pada graf G sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna yaitu: $\Pi = \{C_{1,} C_2, C_{3,} C_4, C_{5,} C_6\}$ dengan $C_1 = \{v_1\}$, $C_2 = \{v_2\}$, $C_3 = \{v_3\}$, $C_4 = \{v_4\}$, $C_5 = \{v_5\}$, dan $C_6 = \{v_6\}$. Setiap titik pada graf memiliki kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = (0,1,1,1,1,1)$ $c_\Pi(v_3) = (1,1,0,1,1,1)$ $c_\Pi(v_5) = (1,1,1,1,0,1)$

$c_\Pi(v_2) = (1,0,1,1,1,1)$ $c_\Pi(v_4) = (1,1,1,0,1,1)$ $c_\Pi(v_6) = (1,1,1,1,1,0)$

Karena kode warna pada setiap titik pada graf G berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(K_n) \geq 6$. Akibatnya, $\chi_L(K_n) = 6$.

Selanjutnya, teorema pembuktian bilangan kromatik lokasi graf barbel $B_{n,n}$.

Teorema 2.3. (Asmiati dkk., 2018)
Misalkan $B_{n,n}$ graf Barbel untuk $n \geq 3$. Maka bilangan kromatik lokasi dari $B_{n,n}$ adalah $\chi_L(B_{n,n}) = n + 1$.

Bukti:

Misal $B_{n,n}, n \geq 3$, adalah graf barbel dengan himpunan titik $V(B_{n,n}) = \{u_i, v_i : 1 \leq i \leq n\}$ dan himpunan sisi $E(B_{n,n}) = \bigcup_{i=1}^{n-1}\{u_i, v_{i+j} : 1 \leq j \leq n - i\} \cup \bigcup_{i=1}^{n-1}\{u_i, v_{i+j} : 1 \leq j \leq n - i\} \cup \{u_n, v_n\}$.

Pertama, ditentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel $B_{n,n}$ untuk $n \geq 3$. Karena graf barbel berisi dua salinan yang isomorfis dari graf lengkap K_n maka sesuai dengan Teorema 2.2, diperoleh $\chi_L(B_{n,n}) \geq n$.

Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dan andaikan menggunakan n warna. Maka terdapat dua titik pada graf barbel $B_{n,n}$ yang memiliki kode warna yang sama, suatu kontradiksi. Jadi, $\chi_L(B_{n,n}) \geq n + 1$.
Untuk menunjukkan bahwa $n + 1$ adalah batas atas untuk bilangan kromatik lokasi graf barbel $B_{n,n}$ cukup dibuktikan dengan adanya pewarnaan lokasi yang optimal $c : V(B_{n,n}) \rightarrow \{1,2,3, \ldots, n + 1\}$. Untuk $n \geq 3$ konstruksikan fungsi c sebagai berikut:

$c(u_i) = i, 1 \leq i \leq n$

$$c(v_i) = \begin{cases} n, & \text{untuk i} = 1 \\ i, & \text{untuk } 2 \leq \text{i} \leq \text{n} - 1 \\ n + 1, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

dengan menggunakan pewarnaan c, kita memperoleh kode warna $V(B_{n,n})$ sebagai berikut:

$$c_{\Pi}(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{untuk } i \text{ komponen } 1 \leq i \leq n \\ 2, & \text{untuk } n+1 \text{ komponen } 1 \leq i \leq n-1 \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases}$$

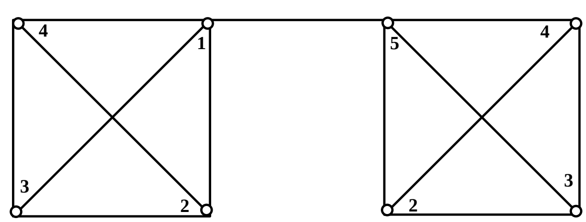
$$c_{\Pi}(u_i) = \begin{cases} 0, & \text{untuk i komponen }, 2 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}-1 \\ & \text{untuk n komponen }, \mathrm{i} = 1 \text{ dan} \\ & \text{untuk n} + 1 \text{ komponen}, \mathrm{i} = \mathrm{n}, \\ 3, & \text{untuk 1 komponen}, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n} - 1 \\ 2, & \text{untuk 1 komponen}, \mathrm{i} = \mathrm{n} \\ 1, & \text{lainnya} \end{cases}$$

Karena semua titik di $V(B_{n,n})$ memiliki kode warna yang berbeda, maka pewarnaan c adalah pewarnaan lokasi. Maka $\chi_L(B_{n,n}) = n+1$. ■

Akibat 2.3. Untuk $n, m \geq 3$, dan $m \neq n$, bilangan kromatik lokasi dari graf barbel $B_{m,n}$ adalah:

$$\chi_L(B_{n,n}) = \max\{m, n\}.$$

Berikut ini diberikan contoh pewarnaan lokasi graf barbel dari graf lengkap $B_{K_{4,4}}$, yaitu:



Gambar 8. Contoh pewarnaan lokasi minimum pada graf barbel $B_{K_{4,4}}$

Diberikan graf G pada Gambar 8 akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf tersebut. Terlebih dahulu akan ditentukan batas bawah dari graf G. Karena graf barbel di atas terbentuk dari dua buah graf lengkap K_4, maka berdasarkan Teorema 2.3, $\chi_L(B_{n,n}) \geq 5$. Misalkan c adalah pewarnaan titik dengan 5 warna pada graf G

sedemikian sehingga diperoleh kelas-kelas warna yaitu: $\Pi = \{C_{1,}C_2, C_{3,}C_4, C_5\}$ dengan $C_1 = \{v_1\}, C_2 = \{v_{2,}v_2'\}, C_3 = \{v_3, v_3'\}, C_4 = \{v_4, v_4'\}$, dan $C_5 = \{v_1'\}$. Setiap titik pada graf tersebut memiliki kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = (0,1,1,1,1)$ $\quad$ $c_\Pi(v_1') = (1,1,1,1,0)$

$c_\Pi(v_2) = (1,0,1,1,2)$ $\quad$ $c_\Pi(v_2') = (2,0,1,1,1)$

$c_\Pi(v_3) = (1,1,0,1,2)$ $\quad$ $c_\Pi(v_3') = (2,1,0,1,1)$

$c_\Pi(v_4) = (1,1,1,0,2)$ $\quad$ $c_\Pi(v_4') = (2,1,1,0,1)$

Karena kode warna pada setiap titik pada graf G berbeda maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(B_{K_4}) \geq 5$. Akibatnya, $\chi_L(B_{K_4}) = 5$.

III. METODE PENELITIAN

3.1. Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung pada semester ganjil tahun akademik 2022/2023.

3.2. Langkah - langkah Penelitian

Langkah–langkah yang dilakukan dalam penelitian ini yaitu:

1. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster.
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf bunga Aster yang merupakan kontruksi dari graf lengkap K_n dengan titik $v_1, v_2, \cdots, v_n$ dan n titik isolasi $w_1, w_2, \cdots, w_n$ sehingga titik v_i, v_{i+1} terhubung di w_i untuk $i = 1, 2, \dots, n$ di mana $v_{n+1} = v_1$. Dimulai dengan $n \geq 3$. Karena graf bunga Aster memuat graf lengkap K_n maka sekurang–kurangnya menggunakan pewarnaan dari graf lengkap tersebut. Apabila batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi yang ditentukan maka akan dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster $D(K_n)$ yang memuat graf lengkap K_n untuk $n \geq 3$ dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi syarat pewarnaan lokasi dengan memperhatikan struktur grafnya. Pewarnaan ini dimulai dengan memberi warna pada setiap titik pada graf lengkap dan kemudian pewarnaan titik di luar graf lengkap dengan label terkecil , yang selanjutnya menghasilkan beberapa kelas-kelas warna hingga minimum warna yang digunakan dalam pewarnaan graf tersebut yang memenuhi syarat dari pewarnaan lokasi.

c. Jika batas atas bilangan kromatik graf bunga Aster $\chi_L(D(K_n)) \leq n$ dan batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf bunga Aster $\chi_L(D(K_n)) \geq n$, maka akan diperoleh bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster, adalah $\chi_L(D(K_n)) = n$.

d. Memformulasikan hasil yang didapatkan ke dalam suatu pernyataan matematika.

e. Membuktikan hasil yang didapat pada langkah d.

2. Menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dari bunga Aster.

a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf barbel bunga Aster $B_{D(K_n)}$ dengan $n \geq 3$. Karena graf barbel bunga Aster $B_{D(K_n)}$ memuat dua buah graf bunga Aster maka batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf barbel bunga Aster $B_{D(K_n)}$ sekurang–kurangnya menggunakan pewarnaan pada graf bunga Aster. Apabila batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi yang telah ditentukan, maka akan dilakukan penambahan terhadap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Aster $B_{D(K_n)}$ untuk $n \geq 3$. Mengkontruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan memberi warna pada label terkecil sedemikian rupa sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

c. Jika batas atas dari bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Aster $\chi_L\left(B_{D(K_n)}\right) \leq n+1$ dan batas bawah bilangan kromatik lokasi pada graf barbel bunga Aster $\chi_L\left(B_{D(K_n)}\right) \geq n+1$, maka akan diperoleh bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Aster, adalah $\chi_L\left(B_{D(K_n)}\right) = n+1$.
d. Memformulasikan hasil yang diperoleh ke dalam suatau pernyataan matematika.
e. Membuktikan hasil yang didapatkan pada langkah d.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1. Kesimpulan

Pada penelitian ini telah berhasil ditentukan dan dibuktikan bilangan kromatik lokasi graf bunga Aster, $\chi_L(D(K_n))$ adalah 4 untuk $n = 3$ dan n untuk $n > 3$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel bunga Aster, $\chi_L\left(B_{D(K_n)}\right)$ adalah $n + 2$ untuk $n = 3$ dan $n + 1$ untuk $n > 3$.

5.2. Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan bilangan kromatik lokasi hasil operasi lain pada graf bunga Aster.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati. 2016. The Locating-Chromatic Number For Certain Of Trees. *Bulletin of Mathematics*. **08(02)**: 125-131

Asmiati. 2017. Locating Chromatic Number of Banana Tree. *International Mathematical Forum*. **12(1)**: 39–45.

Asmiati, Assiyatun, H., dan Baskoro, E. T. 2011. Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars. *ITB J. Sci*. **43A(1)**: 1-8

Asmiati, Yana, I. K. S. G., dan Yulianti, L. 2018. On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*. **2018**: 1-5

Asmiati, Damayantia, M., dan Yulianti, L. 2021. On the locating chromatic number of barbell shadow path graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*. **5(2)**: 82-93.

Behtoei, A., Omoomi, dan Behnaz. 2011. The Locating Chromatic Number of the Join of Graphs. *Departement of Mathematical Sciences*. **84156-83111**: 1-11.

Behtoei, Omoomi, A., dan Behnaz. 2011. On the locating chromatic number of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematic*. **159(2011)**: 2214–2221.

Chartrand, G, Erwin, D, Henning, MA, Slater, P. J., dan Zhang, P. 2003. Graph of order n with locating chromatic number n-1. *Discrete Mathematics.* **269**: 65-79.

Chartrand, G, Hening, MA., Slater, P. J., dan Zhang., P. 2002. The Locating Chromatic Number of a Graph. *Bull. Inst. Combin. Appl.* **36**: 89-101.

Deo, N. 1989. *Graph Theory with Applocation to Engineering & Computer Science*. Prentice Hall of India Prive Limited, New Delhi.

Irawan, A, Asmiati, Suharsono, S., dan Muludi, K. 2021. The Locating-Chromatic Number of Certain Barbell Origami Graphs. *Journal of Physics: Conference Series*. **5(1)**: 012017.

Nasir, A. M., Faisal, dan Setyawan, D. 2022. Optimalisasi Penjadwalan Mata Kuliah Menggunakan Teori Pewarnaan Graf. *Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika*. **5(1)**: 57-69.

Rahmatalia, S., Asmiati, dan Notiragayu. 2022. Bilangan Kromatik Lokasi Graf Split Lintasan. *Jurnal Matematika Integratif*. **18(1)**: 73-80.

Sugeng, K. A., Johna, P., Lawrencea, M. L., Anwara, L. F., Baca, M., dan Semanocova-Fenovcikova, A. 2023. Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal of Graph Theory and Applications.* **11(1)**: 27-38.

Welyyanti, D. 2018. Beberapa Syarat Cukup Untuk Bilangan Kromatik Lokasi Hingga Pada Graf Tak Terhubung. *Eksakta*. **19(1)**: 76-82.