

**PEMODELAN MATEMATIKA ARUS LALU LINTAS MENGGUNAKAN  
FUNGSI VELOSITAS PAPAGEORGIU**

**TESIS**

**Oleh**

**RAMADHANI**



**MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2023**

## ABSTRACT

### MATHEMATICS MODELING OF TRAFFIC FLOW USING THE PAPAGEORGIU VELOCITY FUNCTION

By

RAMADHANI

The mathematical model of traffic flow put forward by mathematicians James Lightill, Gerald B Whitham, and Richard in 1955, known as the LWR model, explains the phenomenon of traffic flow resulting from the interaction of vehicle volume with basic traffic variables such as density, speed, and flow. Vehicle traffic. One of the factors that greatly affect traffic density is the speed function. In this study, the velocity function used is Papageorgiou velocity, a general form of Underwood and Drake velocity. The approximate solution used is the numerical solution of the finite difference method of the *Lax-Friedrich* scheme, while the characteristic method is used to find the analytical solution. This study simulated the road sections for 60 minutes based on the initial and limit values given. Based on the results of calculations with known initial and boundary conditions, they are proven stable and consistent. While the results of numerical simulations show the trend of changes in density, speed, and flow of vehicle traffic by conditioning the value of the  $V_{max}$  parameter, which uses the maximum speed rule on traffic flow issued by the Ministry of Transportation (Kemenhub) and  $n_{cr}$  which will affect the value of parameter  $a$ .

**Key Word:** LWR Model, *Lax Friedrich* Finite Difference Method, Papageorgiou Velocity Function, Numerical Simulation.

## ABSTRAK

### PEMODELAN MATEMATIKA ARUS LALU LINTAS MENGGUNAKAN FUNGSI VELOSITAS PAPAGEORGIU

Oleh

**RAMADHANI**

Model matematika arus lalu lintas yang dikemukakan oleh para matematikawan James Lightill, Gerald B Whitham, dan Richard pada tahun 1955 dikenal sebagai model LWR menjelaskan tentang fenomena arus lalu lintas yang dihasilkan dari interaksi volume kendaraan dengan variabel dasar lalu lintas seperti kepadatan, kecepatan, dan arus lalu lintas kendaraan. Salah satu faktor yang sangat mempengaruhi kepadatan lalu lintas ialah fungsi kecepatan. Pada kajian ini fungsi kecepatan (velositas) yang digunakan adalah velositas Papageorgiou yang merupakan bentuk umum dari velositas Underwood dan Drake. Solusi hampiran yang digunakan ialah solusi numerik metode beda hingga skema *Lax Friedrich*, sedangkan metode karakteristik digunakan untuk mencari solusi analitiknya. Penelitian ini melakukan simulasi pada ruas jalan selama 60 menit berdasarkan nilai awal dan nilai batas yang telah diberikan. Berdasarkan hasil perhitungan dengan syarat awal dan syarat batas yang telah diketahui terbukti stabil dan konsisten. Sedangkan hasil simulasi numerik menunjukkan kecenderungan perubahan kepadatan, kecepatan, dan arus lalu lintas kendaraan dengan mengkondisikan besarnya nilai parameter  $V_{max}$  yang menggunakan aturan kecepatan maksimum pada arus lalu lintas yang diterbitkan oleh Kementerian Perhubungan (Kemenuh) dan  $n_{cr}$  yang akan mempengaruhi nilai parameter  $a$ .

**Kata Kunci:** Model LWR, Metode Beda Hingga Skema *Lax Friedrich*, Fungsi Velositas Papageorgiou, Simulasi Numerik.

**PEMODELAN MATEMATIKA ARUS LALU LINTAS MENGGUNAKAN  
FUNGSI VELOSITAS PAPAGEORGIU**

**Oleh**

**RAMADHANI**

**TESIS**

**Sebagai salah satu syarat untuk mencapai gelar  
MAGISTER MATEMATIKA**

**Pada  
Program Studi Magister Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**



**MAGISTER MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN  
UNIVERSITAS LAMPUNG  
BANDAR LAMPUNG  
2023**

Judul Tesis : **PEMODELAN MATEMATIKA ARUS LALU  
LINTAS MENGGUNAKAN FUNGSI  
VELOSITAS PAPAGEORGIU**

Nama Mahasiswa : **Ramadhani**

Nomor Pokok Mahasiswa : 2027031013

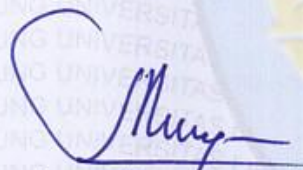
Program Studi : Magister Matematika

Jurusan : Matematika

Fakultas : Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

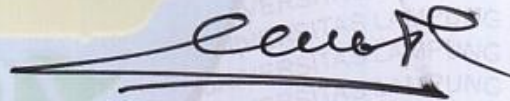
**MENYETUJUI**

**1. Komisi Pembimbing**



**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**

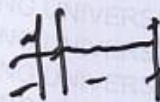
NIP 19740316 200501 1 001



**Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.**

NIP 19690213 199402 1 001

**2. Ketua Program Studi Magister Matematika**

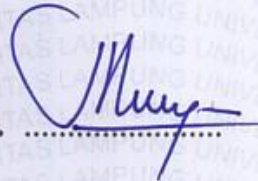


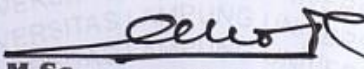
**Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.**


NIP 19760411 200012 2 001

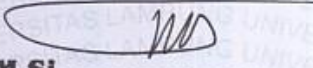
**MENGESAHKAN**

**1. Tim Penguji**

**Ketua : Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** 

**Sekretaris : Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** 


**Penguji Bukan Pembimbing : 1. Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** 

**: 2. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** 

**2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

  
**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**  
NIP 19711001 200501 1 002

**3. Direktur Program Pascasarjana**

  
**Prof. Dr. Ir. Murhadli, M.Si.**  
NIP 19640326 198902 1 001

**4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : 30 Mei 2023**

## PERNYATAAN

Nama : **Ramadhani**  
Nomor Induk Mahasiswa : **2027031013**  
Program Studi : **Magister Matematika**  
Jurusan : **Matematika**

menyatakan dengan sebenarnya bahwa tesis saya yang berjudul "**Pemodelan Matematika Arus Lalu lintas Menggunakan Fungsi Velocitas Papageorgiou**" merupakan hasil karya saya sendiri. Semua hasil tulisan yang tertuang dalam tesis ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila dikemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 30 Mei 2023  
Penulis



**Ramadhani**  
NPM. 2027031013

## **RIWAYAT HIDUP**

Penulis bernama Ramadhani, dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 24 Februari 1994 dan merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Edi (Alm) dan Ibu Asna.

Penulis menempuh pendidikan di TK Aisyiah pada tahun 1999 lalu Sekolah Dasar Negeri (SDN) 2 Talang pada tahun 2000-2006, pendidikan menengah pertama di MTs Al Hikmah Kedaton Bandar Lampung pada tahun 2006-2009. Kemudian melanjutkan pendidikan di lembaga yang sama MA Al Hikmah Kedaton Bandar Lampung pada tahun 2009-2012. Selama menempuh pendidikan MTs dan MA, penulis sebagai santri di Pondok Pesantren Al Hikmah Bandar Lampung. Pada tahun 2012 penulis melanjutkan pendidikannya di Universitas Islam Negeri (UIN) Maulana Malik Ibrahim Malang S1 Matematika Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi melalui jalur Program Beasiswa Santri Berprestasi (PBSB) dan lulus pada tahun 2016.

Pada tahun 2020, penulis terdaftar sebagai mahasiswa program studi Magister Matematika di Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (UNILA).



## KATA INSPIRASI

الصَّبْرُ يَعِينُ عَلَى كُلِّ عَمَلٍ

*“Kesabaran itu menolong segala pekerjaan”*

(Muhafadzah Bahasa Arab)

*“Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya”*

(Q.S Al-Baqoroh: 286)

*“Dengan ilmu kita menuju kemuliaan”*

(Ki Hajar Dewantara)

*“Melekatnya ilmu dapat diperoleh dengan cara membaca, barokahnya ilmu dapat diraih dengan dengan cara berkhidmat, sedangkan manfaatnya ilmu dapat diperoleh dengan adanya restu dari guru”*

{Abuya Sayyid Muhammad bin Alwi bin Abbas Al Maliki”

*“Maka nikmat tuhan kamu yang manakah yang kamu dustakan”*

(QS. Ar-Rahman: 23)

## **PERSEMBAHAN**

**Alhamdulillahirabbil alamin**

**Dengan menyebut nama Allah Yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang  
dan Segala Puji dan Syukur kepada Allah SWT**

**Kupersembahkan Tesis ini teruntuk :**

*Kedua Orang tua ku, Ayahanda tercinta Alm. Edi Saputra dan Ibunda tercinta*

*Asna yang tak henti – hentinya memberikan kasih sayangnya, do'a, dan  
motivasi dalam segala hal serta kembaranku Ramayulis beserta suami, Adik*

*bungsu Mardiaty, keponakanku Ahmad Althaf Adhitama yang selalu*

*memberikan dukungan dan semangat.*

**Para Kiai dan Ibu nyai, Guru–guru yang selalu membagi ilmunya untukku**

**Seluruh keluarga ku**

**Teman dan sahabatku**

**Almamater Al Hikmah.**

## SANWACANA

Assalamualaikum Wr. Wb.

Dengan mengucap Alhamdulillah penulis panjatkan puji syukur kehadiran Allah SWT berkat Rahmat dan Hidayah-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis ini yang berjudul “Pemodelan Matematika Arus Lalu lintas Menggunakan Fungsi Velositas Papageorgiou”. Shalawat serta salam senantiasa tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad SAW, suri tauladan terbaik sepanjang masa.

Dalam proses penyusunan tesis ini tidak lepas dari bimbingan serta arahan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan dan ketulusan hati Penulis mengucapkan terima kasih kepada :

1. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan (FMIPA) Universitas Lampung, sekaligus Dosen Pembimbing Utama, serta Pembimbing Akademik yang telah sabar memberikan membimbing, arahan serta saran, doa, dan kesediaan waktu selama penyusunan tesis ini.
2. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Si. selaku Dosen Pembimbing Kedua yang telah memberikan bimbingan, nasihat, arahan, serta mengoreksi selama penulisan tesis ini.

3. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si. selaku Dosen Penguji Utama atas kesediaan waktunya dalam menguji dan mengevaluasi serta memberikan kritik dan saran selama penulisan tesis ini.
4. Dr. Muslim Ansori, S.Si., M. Sc. selaku Dosen Penguji Kedua atas kesediaan waktunya dalam menguji, mengevaluasi dan memberikan kritik, saran, dan arahan selama penulisan tesis ini.
5. Ibu Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
6. Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen dan Staff Administrasi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung .
8. Kedua orang tua ku yang aku sayangi (Ayahanda Alm. Edi Saputra & Ibunda Asna), adik kembaranku (Ramayulis) beserta suami, Adik bungsuku (Mardiati), Keponakanku (Ahmad Altaf Adhitama) serta seluruh keluarga yang selalu senantiasa mendoakan, memotivasi, dan memberikan dukungannya.
9. Seluruh Kiai dan Ibu Nyai, Guru-guru, Asatidz, Teman-teman pengurus pondok, dan santri-santri di lingkungan Yayasan Al Hikmah Bandar Lampung yang telah membantu mendoakan dalam penyelesaian penulisan tesis ini.
10. Seluruh Santri Tahfidz Al Hikmah yang telah membantu mendoakan dan memotivasi.

11. Seluruh teman – teman program Magister Matematika angkatan 2020, yang telah menerima suka duka selama kurang lebih 2 tahun.
12. Seluruh teman-teman, sahabat-sahabat IKA Al Hikmah Bandar Lampung yang selalu memberikan dukungan dalam penyelesaian tesis ini.
13. Almamater tercinta Universitas Lampung dan semua pihak yang terlibat dalam penyusunan tesis ini yang tidak dapat disebutkan satu-persatu namanya.

Penulis menyadari bahwa tesis ini masih terdapat banyak kekurangan. Oleh karena itu, penulis mengharapkan kritik dan saran demi perbaikan tesis ini. Semoga tesis ini dapat bermanfaat bagi penulis khususnya dan bagi pembaca pada umumnya. Terima kasih.

Bandar Lampung, 16 Juni 2023

Penulis

Ramadhani  
NPM. 2027031003

## DAFTAR ISI

Halaman

### DAFTAR GAMBAR .....xv

#### I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Tujuan Penelitian .....	3
1.3 Manfaat Penelitian .....	4

#### II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Klasifikasi Arus Lalu Lintas .....	5
2.2 Batas Kecepatan Berkendara Menurut Jenis Jalan .....	6
2.3 Model LWR .....	7
2.4 Fungsi Velositas .....	8
2.4.1 Fungsi Velositas Greenshield .....	10
2.4.2 Fungsi Velositas Underwood .....	11
2.4.3 Fungsi Velositas Drake .....	11
2.4.4 Fungsi Velositas Papageorgiou .....	12
2.5 Metode Karakteristik .....	12
2.6 Metode Beda Hingga .....	13
2.7 Metode <i>Lax-Friedrich</i> .....	16
2.8 Analisis Kestabilan Von Neuman .....	17
2.9 Teorema Ekuivalensi Lax .....	18
2.10 Analisis Konsistensi .....	18

<b>III.</b>	<b>METODOLOGI PENELITIAN</b>	
3.1	Waktu dan Tempat Penelitian .....	19
3.2	Metode Penelitian .....	19
<b>IV.</b>	<b>HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
4.1	Fungsi Velositas Papageorgiou.....	21
4.2	Model LWR menggunakan Fungsi Velositas Papageorgiou.....	23
4.3	Metode Karakteristik .....	24
4.4	Skema <i>Lax-Friedrich</i> pada Model LWR.....	27
4.4.1	Solusi Hampiran Metode Beda Hingga .....	28
4.4.2	Skema <i>Lax Friedrich</i> .....	29
4.5	Kekeonvergenan Skema Numerik .....	30
4.5.1	Analisis Kestabilan .....	30
4.5.2	Analisis Kekonsistenan .....	33
4.6	Simulasi Numerik .....	34
4.6.1	Data Penelitian .....	34
4.6.2	Algoritma Model LWR dengan fungsi Velositas Papageorgiou .....	37
4.6.3	Simulasi .....	37
<b>V.</b>	<b>KESIMPULAN DAN SARAN</b>	
5.1	Kesimpulan .....	51
5.2	Saran .....	51

## DAFTAR PUSTAKA

## DAFTAR TABEL

Tabel	Halaman
4.1 Observasi Jumlah Kendaraan Sepanjang 10 KM.....	34



## DAFTAR GAMBAR

Gambar	Halaman
2.1 Batas Kecepatan Kendaraan Menurut Jenis Jalan.....	7
2.2 Stensil pada sumbu $x$ dan $t$ .....	13
2.3 Metode Beda Maju pada Ruang ( $x$ ) .....	14
2.4 Metode Beda Maju pada Waktu ( $t$ ).....	14
2.5 Metode Beda Pusat pada Ruang ( $x$ ) .....	15
2.6 Metode Beda Pusat pada Waktu ( $t$ ) .....	16
4.1 Grafik Fungsi Kecepatan terhadap Kepadatan.....	22
4.2 Profil Fluks Kendaraan .....	22
4.3 Observasi Jumlah Kendaraan Sepanjang 10 KM.....	35
4.4 Peta Jalan Tol Cikarang Sepanjang 20 KM .....	36
4.5 Gerbang Tol Cikarang Timur.....	36
4.6 Grafik Kepadatan Lalu Lintas untuk Nilai $a = 0.5$ .....	38
4.7 Grafik Kecepatan Kendaraan untuk Nilai $a = 0.5$ .....	39
4.8 Fluks Kendaraan untuk Nilai $a = 0.5$ .....	40
4.9 Grafik Kepadatan Lalu Lintas untuk Nilai $a = 1$ .....	41
4.10 Grafik Kecepatan Kendaraan untuk Nilai $a = 1$ .....	41
4.11 Fluks Kendaraan untuk Nilai $a = 1$ .....	42
4.12 Grafik Kepadatan Lalu Lintas untuk Nilai $a = 2$ .....	43
4.13 Grafik Kecepatan Kendaraan untuk Nilai $a = 2$ .....	43
4.14 Fluks Kendaraan untuk Nilai $a = 2$ .....	44
4.15 Grafik Kepadatan Lalu Lintas dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 0.5$ .....	45
4.16 Grafik Kecepatan Lalu Lintas dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 0.5$ .....	46

4.17 Fluks Kendaraan dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 0.5$ .....	46
4.18 Grafik Kepadatan Lalu Lintas dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 1$ .....	47
4.19 Grafik Kecepatan Lalu Lintas dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 1$ .....	47
4.20 Fluks Kendaraan dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 1$ .....	48
4.21 Grafik Kepadatan Lalu Lintas dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 2$ .....	49
4.22 Grafik Kecepatan Lalu Lintas dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 2$ .....	50
4.23 Fluks Kendaraan dengan $V_{max} = 30KM/jam$ untuk Nilai $a = 2$ .....	50

## I. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Transportasi diadakan untuk mempermudah dalam mengerjakan aktivitas sehari-hari. Revolusi transportasi beriringan dengan kemajuan infrastruktur dari masa ke masa sehingga memberikan dampak pada kecepatan pendistribusian barang, menghindari kemacetan, dan menghemat waktu dalam perjalanan (Islam, dkk., 2019). Setidaknya ada tiga faktor yang menyebabkan terjadinya kemacetan lalu lintas yaitu bertambahnya kendaraan bermotor, terbatasnya kemampuan dalam pembangunan jalan raya, dan belum optimalnya pengoperasian transportasi massal (Dahlan, 2021).

Kehadiran model lalu lintas sangat membantu dalam menangani manajemen lalu lintas kendaraan baik di perkotaan ataupun luar kota. Pengaturan arus lalu lintas yang efisien dan meminimalisir kemacetan lalu lintas menjadi daya tarik para peneliti untuk terus mengkaji solusi dari permasalahan yang terjadi. Manajemen lalu lintas yang baik akan memberikan dampak sosial ekonomi yang besar bagi masyarakat. Itulah sebabnya dalam beberapa tahun ini penelitian di bidang pemodelan arus lalu lintas terus berkembang. Model matematika arus lalu lintas yang paling relevan dalam masalah ini adalah model Matematika Lighthill Witham Richard atau yang biasa dikenal model LWR.

Model LWR ini diperkenalkan oleh ahli Matematikawan James Lightill, Gerald B Whitham, dan Richard pada tahun 1955. Model LWR didasari dari hukum konservasi kendaraan pada jalan satu arah, dimana kendaraan bereaksi terhadap kecepatan kendaraan pada kepadatan disekitarnya, sehingga kecepatan kendaraan merupakan fungsi atas kepadatan. Model ini merekayasa fenomena kepadatan lalu lintas serta mengantisipasi masalah kemacetan.

Seorang insinyur riset dari biro lalu lintas di Departemen Jalan Raya Negara bagian Ohio menjelaskan tentang fenomena arus lalu lintas yang diperoleh dari interaksi volume kendaraan dengan variabel dasar pada lalu lintas seperti kepadatan, kecepatan (velositas), dan arus lalu lintas kendaraan guna memastikan waktu yang terbuang selama kemacetan. Salah satu yang sangat mempengaruhi kepadatan lalu lintas ialah fungsi kecepatan (velositas). Misalnya, memeriksa hubungan antara kecepatan dengan kepadatan kendaraan dari arus lalu lintas yang terganggu (Yudkk., 2016).

Greenshield mengasumsikan bahwa hubungan kecepatan dan kepadatan merupakan fungsi yang linier, dimana saat kondisi arus lalu lintas lengang atau tidak ada kendaraan, maka kendaraan dapat melaju dengan kecepatan maksimal dan saat kondisi arus lalu lintas macet atau dipenuhi dengan kendaraan, maka kendaraan tidak dapat melaju atau kendaraan tidak dapat bergerak sehingga kecepatan menurun menuju nol (Greenshield,1934).

Pada model hubungan kecepatan kepadatan, Underwood mengasumsikan bahwa hubungan kecepatan kepadatan kendaraan dalam bentuk fungsi eksponensial. Model Underwood menerangkan bahwa pada saat kepadatan lalu lintas maksimal

atau arus lalu lintas dalam kondisi dipenuhi kendaraan, maka kecepatan kendaraan mendekati nol (Underwood, 1961).

Selain itu, persoalan lalu lintas dapat diselesaikan dengan mencari solusi analitik atau solusi numerik dan mendalami fenomena pada arus lalu lintas menggunakan berbagai fungsi velositas seperti solusi numerik model arus lalu lintas dengan skema volume hingga (Pudjaprasetya dan Kamalia, 2018), penyelesaian masalah arus lalu lintas jalan satu jalur yang diselesaikan dengan menggunakan metode karakteristik dan metode beda hingga yaitu skema FTCS (Forward Time Central Space) (Puzi, 2014), penyelesaian model arus lalu lintas jalan satu jalur dengan skema beda hingga Lax-Friedrichs dan skema beda hingga Upwind (Sri, 2017), serta simulasi numerik model arus lalu lintas satu arah dengan fungsi velositas Underwood menggunakan metode beda hingga skema implisit untuk konstruksi numeriknya (Pratama, 2016).

Dari pemaparan penelitian yang dikaji oleh (Pratama, 2016), maka akan dikaji model LWR menggunakan fungsi yang berbeda yaitu velositas Papageorgiou. Peneliti akan menggunakan solusi numerik metode beda hingga skema Lax-Friedrichs serta dilakukan simulasi numerik dengan memperhatikan pergerakan kepadatan kendaraan. Fungsi ini mempertimbangkan beberapa parameter seperti kepadatan kritis  $n_c$ , kecepatan maksimum  $V_m$  dan nilai parameter  $a$  dengan mengasumsikan ada beberapa kendaraan di jalan raya.

## **1.2 Tujuan Penelitian**

Dari latar belakang yang telah dipaparkan, tujuan dari penelitian ini adalah.

1. Mengkaji model LWR menggunakan fungsi velositas Papageorgiou secara analitik dengan metode karakteristik.
2. Menentukan solusi hampiran model LWR secara numerik dengan menggunakan skema Lax-Friedrich dan mensimulasikannya dengan variasi parameter yang terkait serta menginterpretasikannya.

### **1.3 Manfaat Penelitian**

Manfaat dari penelitian ini adalah.

1. Membuka cakrawala dan pemahaman mengenai aplikasi matematika pada arus lalu lintas.
2. Sebagai salah satu referensi untuk dasar penelitian selanjutnya.

## **II. TINJAUAN PUSTAKA**

Pada bab ini akan disajikan materi-materi yang berkaitan dengan fenomena arus lalu lintas seperti model matematika LWR dan beberapa fungsi velositas. Selain itu solusi analitik dengan metode karakteristik dan solusi numerik sebagai teori pendukung dalam menyelesaikan penelitian ini

### **2.1 Klasifikasi Arus Lalu Lintas**

Ada dua kelompok model yang menjelaskan arus lalu lintas, yaitu model makroskopik dan model mikroskopik. Pada penelitian ini, model yang digunakan adalah model makroskopik. Model ini menghubungkan arus keluar dan volume serta waktu tempuh. Model makroskopik juga dapat dilihat sifat-sifatnya seperti kepadatan lalu lintas (kendaraan/satuan jarak), arus (kendaraan/satuan jarak), dan kecepatan (satuan jarak/satuan waktu). Model makroskopik merupakan model yang paling relevan untuk kerangka model LWR dalam menyelesaikan persoalan arus lalu lintas. Model ini diperoleh dari persamaan fundamental dinamika fluida dimana lalu lintas digambarkan sebagai alira fluida dan model matematika diturunkan dari persamaan kontinuitas dan/atau momentum. Model-model tersebut berupa persamaan diferensial parsial dengan dua variabel bebasnya adalah kepadatan lalu lintas dan laju arus lalu lintas (fluks) (Helbing, 2001; Chowdhury, dkk., 2000).

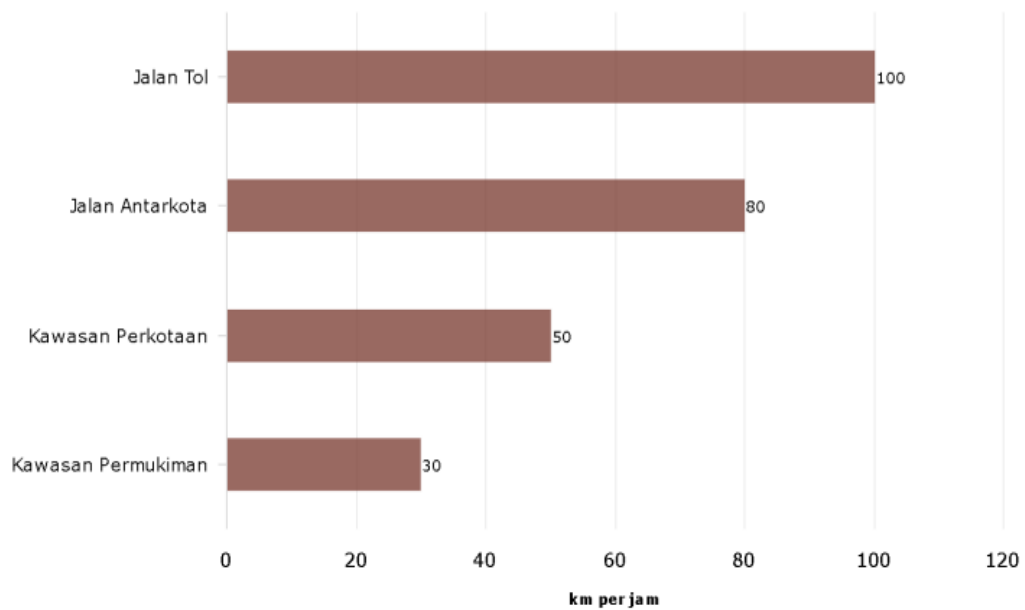
Dalam menentukan karakteristik arus lalu lintas pada suatu ruas jalan terdapat tiga parameter utama yang diperlukan yaitu volume, kecepatan, dan kepadatan. Untuk memudahkan penerapan teori arus lalu lintas maka untuk memahami karakteristik tersebut dengan mendeskripsikannya dalam suatu model hubungan matematis dan grafis. (Jabeena, 2013).

## **2.2 Batas Kecepatan Berkendara Menurut Jenis Jalan**

Kehadiran transportasi darat dan infrastruktur jalan mulai dari jalan lintas hingga jalan tol memudahkan manusia untuk berpindah dari satu tempat ke tempat lain. Namun, masih ada sebagian dari masyarakat Indonesia yang belum mengetahui batasan kecepatan berkendara yang diperbolehkan.

Dalam Peraturan Pemerintah Nomor 79 Tahun 2013 tentang Jaringan Lalu Lintas dan Angkutan Jalan Pasal 23 Ayat 1 dan 2 disebutkan setiap jalan memiliki batas kecepatan paling tinggi yang ditetapkan secara nasional meliputi batas kecepatan jalan bebas hambatan, batas kecepatan jalan antarkota, batas kecepatan jalan pada kawasan perkotaan, dan batas kecepatan jalan pada kawasan permukiman. Pada ayat 4, dijelaskan bahwa paling rendah sebesar 60 KM/Jam dan paling tinggi 100 KM/Jam untuk jalan bebas hambatan seperti jalan tol 100 KM/Jam, kecepatan paling tinggi di jalan antarkota 80 KM/Jam, kecepatan paling tinggi di kawasan perkotaan 50 KM/Jam, dan kecepatan paling tinggi di kawasan permukiman 30 KM/Jam. Peraturan tersebut diperkuat dengan Peraturan Menteri Perhubungan Nomor PM 111 Tahun 2015 Tentang Tata Cara Penetapan Batas Kecepatan pada pasal 3 ayat 4.





Dkatadata.co.id

databoks

Sumber : Kementerian Perhubungan (Kemenhub),

**Gambar 2.1.** Batas Kecepatan Kendaraan Menurut Jenis Jalan

<https://databoks.katadata.co.id/datapublish/2022/04/18/agar-aman-di-jalan-patuhi-batas-kecepatan-berkendara-ini>.

### 2.3 Model LWR

Model LWR diperkenalkan oleh Lighthill, Whitham (1955) dan Richards (1956) merupakan salah satu model makroskopik orde pertama yang paling relevan untuk arus lalu lintas. Model LWR merupakan sebuah persamaan kinematik yang digunakan pada fenomena arus lalu lintas. Model ini menganalogikan kondisi lalu lintas sebagai aliran fluida dengan mengasumsikan kendaraan sebagai partikel yang berada pada aliran tersebut dengan menggunakan hukum konservasi yang bertujuan

untuk mendeskripsikan kondisi lalu lintas kendaraan di suatu ruas jalan. Model LWR dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f(n)}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$n(x, 0) = n_0(x)$$

dan

$$f(n) = n(t, x) \cdot V(n(t, x)) \quad (2.2)$$

dimana  $n(t, x)$  menyatakan kepadatan kendaraan (jumlah kendaraan/satuan jarak) yang terjadi pada waktu  $t$  dan posisi  $x$ ,  $f$  menyatakan fluks lalu lintas (kendaraan/menit) pada posisi  $x$  dan waktu  $t$  tertentu.  $f(n)$  merupakan fluks lalu lintas yang menunjukkan hubungan antara kecepatan, kepadatan, dan arus lalu lintas kendaraan.  $V(n)$  adalah fungsi velositas yang nilainya bergantung pada kepadatan kendaraan. Artinya ketika kecepatan kendaraan berkurang beriringan dengan itu maka kepadatan kendaraan semakin meningkat. Sedangkan jika kepadatan kendaraan rendah, maka kendaraan akan melaju dengan kecepatan tinggi. Sedangkan nilai fluks kecil (mendekati nol) pada saat kondisi jalan sepi dan kondisi jalan padat merayap.

## 2.4 Fungsi Velositas

Fungsi velositas merupakan model yang menggambarkan rata-rata kecepatan yang diukur dalam satuan jarak per satuan waktu (meter/jam) dengan menggambarkan hubungan antara kecepatan dengan kepadatan kendaraan dan arus lalu lintas. Hubungan fungsional kecepatan dan kepadatan dibagi menjadi 3 kategori yaitu (Hari dan Rao, 2019):

### 1. Model linier

Model linier merupakan hal yang paling sederhana dari semua bentuk fungsional dan dikembangkan berdasarkan asumsi bahwa kecepatan menurun secara linier dengan kepadatan. Model ini adalah bentuk umum dari semua model linier dan parameternya seperti kecepatan aliran bebas ( $v_f$ ), kepadatan kendaraan ( $k_j$ ) dan parameter  $m$  dan  $n$  dimana ( $m > 0, n > 0$ ) (May dan Keller, 1967). Model lain seperti (Greenshields dkk, 1967), (Drew, 1968), dan (Pipes, 1967) yang diambil dari bentuk umum dengan mensubstitusi  $m = 1$  dan/atau  $n = 1$ .

### 2. Model logaritma

Model logaritma merupakan model arus lalu lintas diperkenalkan oleh (Greenberg, 1959), yang diturunkan menggunakan prinsip hidrodinamika. Parameter yang terlibat dalam model ini adalah kecepatan optimal ( $v_m$ ) dan ( $k_j$ ), keduanya sulit diamati dari data lapangan. Selain itu, model ini menghasilkan kecepatan tak terhingga pada kondisi aliran bebas.

### 3. Model eksponensial

Model eksponensial merupakan model arus lalu lintas yang diperkenalkan oleh (Papageorgiou, dkk., 1989), (Underwood, R.T., 1961), (Drake, J.S., dkk., 1967), dalam hal merepresentasikan data empiris dan memenuhi sifat-sifat hubungan aliran kecepatan kepadatan. Berikut ditampilkan hubungan fungsi kecepatan dan kepadatan pada tabel dibawah ini

Tabel 2.1. Hubungan Fungsi Kecepatan-Kepadatan

Author	Fungsi	Parameter
<i>Linear</i>		
Greenshields et al. [7]	$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$	$v_f, k_j$
Drew [9]	$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^m\right]$	$v_f, k_j, m$
Pipes [10]	$v = v_f \left(1 - \frac{k}{k_j}\right)^n$	$v_f, k_j, n$
May and Keller [8]	$v = v_f \left[1 - \left(\frac{k}{k_j}\right)^m\right]^n$	$v_f, k_j, m, n$
<i>Logarithmic</i>		
Greenberg [12]	$v = v_m \ln \frac{k_j}{k}$	$v_m, k_j$
<i>Exponential</i>		
Underwood [13]	$v = v_f \exp(-k/k_m)$	$v_f, k_m$
Drake et al. [14]	$v = v_f \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{k_m}\right)^2\right]$	$v_f, k_m$
Papageorgiou et al. [2]	$v = v_f \exp\left[-\frac{1}{a} \left(\frac{k}{k_m}\right)^a\right]$	$v_f, k_m, a$

### 2.3.1 Fungsi Velocitas Greenshield

Fungsi velocitas lalu lintas pertama kali diperkenalkan oleh Greenshield pada tahun 1939. Greenshield merumuskan bahwa hubungan matematis antara kecepatan dan kepadatan diasumsikan linear (Ofyar, 2000). Model ini adalah model paling awal yang tercatat dalam mengamati perilaku arus lalu lintas. Greenshields mendapatkan hasil bahwa hubungan antara kecepatan dan kepadatan berbentuk kurva linier dengan bentuk sebagai berikut (McShane dan Roes,1990).

$$V(n) = V_{max} \left(1 - \frac{n}{n_{max}}\right) \quad (2.3)$$

dengan  $n_{max}$  merupakan kepadatan maksimum dan  $V_{max}$  merupakan kecepatan maksimum lalu lintas pada waktu (Pratama, 2016).

### 2.3.2 Fungsi Velositas Underwood

Fungsi ini diperkenalkan oleh Underwood pada tahun 1961 yang menjelaskan fungsi hipotesis hubungan eksponensial antara kepadatan dan kecepatan. Pada model ini, kecepatan kendaraan tidak pernah mencapai nol walaupun situasi macet total. fungsi velositas Underwood dapat dituliskan sebagai berikut:

$$V(n) = V_{max} \exp\left(-\frac{n}{n_{max}}\right) \quad (2.4)$$

dengan  $n_{max}$  menyatakan kepadatan maksimum dan  $V_{max}$  menyatakan kecepatan maksimum kendaraan pada waktu (Kumar dkk., 2018). Fungsi ini umumnya lebih realistis daripada fungsi Greenshield dan Greenberg karena memiliki nilai koefisien determinasi terbesar diantara fungsi velositas lainnya (Ardekani, dkk., 2011).

### 2.3.3 Fungsi Velositas Drake

Fungsi ini dikembangkan oleh Drake pada tahun 1961. Fungsi ini merupakan fungsi velositas yang berbentuk fungsi eksponensial yang merupakan pengembangan dari fungsi velositas Underwood. Persamaan ini memperkirakan kecepatan berdasarkan kepadatan dan aliran kendaraan yang dituliskan sebagai berikut:

$$V(n) = V_{max} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{n_{max}}\right)^2\right] \quad (2.5)$$

dengan  $n_{max}$  dan  $V_{max}$  berturut-turut adalah kepadatan maksimum dan kecepatan maksimum lalu lintas pada waktu (Kumar dkk., 2018).

### 2.3.4 Fungsi Velositas Papageorgiou

Fungsi velositas Papageorgion diperkenalkan oleh Papageorgion, B. Jean Marc, dan H. Hadj-Salem pada tahun 1989 dengan melakukan modifikasi dari fungsi velositas May and Keller. Fungsi ini merupakan bentuk umum dari fungsi velositas *Underwood* dan *Drake*. Papageorgiou mengusulkan fungsi velositas berbentuk sebagai berikut:

$$V(n) = V_{max} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{n}{n_{cr}} \right)^a \right] \quad (2.6)$$

dengan  $n_{cr}$  dan  $V_{max}$  berturut-turut adalah kepadatan kritis dan kecepatan maksimum lalu lintas pada waktu dan  $a$  adalah parameter konstan yang bernilai positif (Papageorgiou dkk, 1989).

## 2.5 Metode Karakteristik

Diberikan persamaan linear adveksi satu dimensi yang disebut persamaan gelombang sebagai berikut.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

dengan

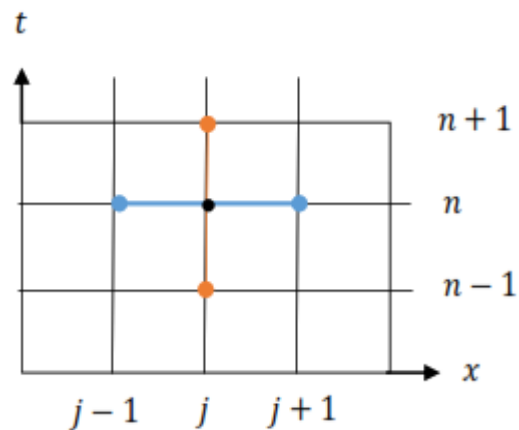
$$u(x, 0) = F(x) \quad (2.8)$$

dan  $u(t, x)$  adalah fungsi yang tidak diketahui dari  $(t, x)$  dan  $a$  adalah kecepatan seragam persamaan adveksi.  $F(x)$  adalah syarat awal  $t = 0$  dan persamaan (2.14) adalah kondisi awal (Salih, 2016).

## 2.6 Metode Beda Hingga

Metode beda hingga adalah suatu metode yang sangat populer dalam penyelesaian persamaan differensial biasa ataupun persamaan differensial parsial yang mempunyai dasar pada ekspansi deret Taylor (Strauss, 2007). Metode beda hingga dapat diterapkan untuk mendekati nilai suatu titik sebagai turunan dari titik lain dengan menggunakan deret Taylor. Pendekatan menggunakan deret Taylor ini dapat dilakukan dari kiri, kanan, dan pusat yang biasa disebut dengan beda maju, beda mundur, dan beda pusat (Sasongko, 2010).

Perhatikan gambar berikut untuk lebih memahami beda maju, beda mundur, dan beda pusat.

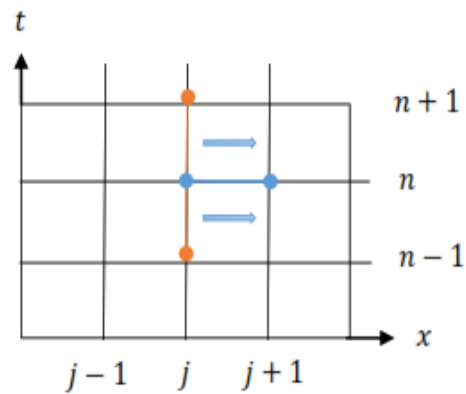


**Gambar 2.2.** Stensil pada sumbu  $x$  dan  $t$

### 1. Metode beda maju

Berdasarkan pada Gambar 2.1, bentuk metode beda maju digambarkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

- a. Metode beda maju pada ruang ( $x$ )



**Gambar 2.3.** Metode Beda Maju pada Ruang ( $x$ )

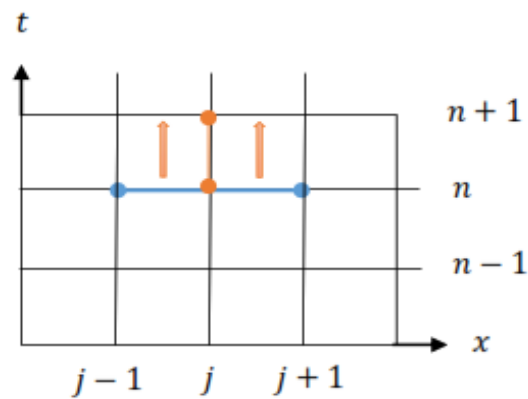
i. Turunan pertama

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x}.$$

ii. Turunan kedua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j - u_i^j}{\Delta x^2}.$$

b. Metode beda maju pada waktu ( $t$ )



**Gambar 2.4.** Metode Beda Maju pada Waktu ( $t$ )

Berdasarkan gambar di atas diperoleh turunan sebagai berikut:

i. Turunan pertama

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}.$$



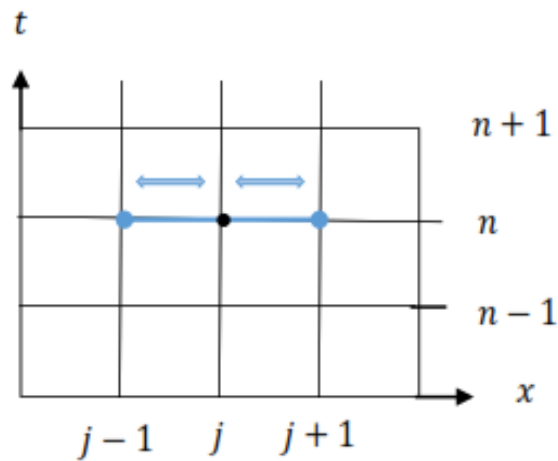
ii. Turunan kedua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j - u_i^j}{(\Delta t)^2}.$$

2. Metode beda pusat

Berdasarkan pada Gambar 2.1, bentuk metode beda pusat ini digambarkan dalam bentuk dua arah sebagai berikut:

a. Metode beda pusat pada ruang ( $x$ )



**Gambar 2.5.** Metode Beda Pusat pada Ruang  $x$

Berdasarkan gambar diatas didapatkan turunan sebagai berikut:

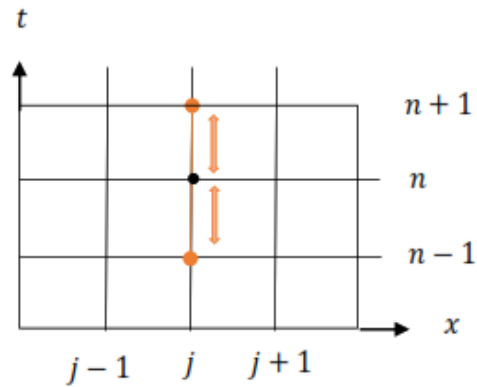
i. Turunan pertama

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2\Delta x}.$$

ii. Turunan kedua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j - u_{i+1}^j}{\Delta x^2}.$$

b. Metode beda pusat pada waktu ( $t$ )



**Gambar 2.6.** Metode Beda Pusat pada Waktu ( $t$ )

Berdasarkan gambar diperoleh turunan sebagai berikut:

- i. Turunan pertama

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{j+1} - u_i^{j-1}}{2\Delta t}.$$

- ii. Turunan kedua

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t^2}.$$

(Irfan, 2022)

## 2.7 Metode Lax Friedrich

Metode Lax Friedrichs merupakan salah satu metode numerik yang termasuk dalam metode beda hingga (Halik, 2015). Dalam penyelesaiannya, metode Lax Friedrichs dapat digunakan karena metode ini merupakan salah satu metode pendekatan numerik dengan menerapkan metode beda hingga. Metode Lax Friedrichs mempunyai dasar yang sangat sederhana yaitu mengganti nilai  $u_i^j$  dengan nilai rata-rata dari  $u_{i+1}^j$  dan  $u_{j-1}^j$ .

Tahapan yang digunakan metode Lax Friedrichs dalam menyelesaikan persamaan differensial parsial adalah dengan menerapkan metode beda maju dan metode beda pusat. Hal ini dikarenakan metode Lax Friedrichs merupakan suatu metode perkembangan dari metode FTCS. Metode beda maju yang diterapkan yakni untuk turunan waktunya dan metode beda pusat yang diterapkan yakni untuk turunan ruang.

## 2.8 Analisis Kestabilan Von Neumann

Analisis Von Neumann biasa digunakan untuk menentukan syarat perlu dan syarat cukup agar suatu skema numerik stabil. Analisis Von Neumann paling banyak digunakan karena pada umumnya mudah diterapkan secara langsung. Akan tetapi, analisis Von Neumann hanya dapat digunakan untuk menemukan syarat stabilitas pada masalah nilai awal persamaan linier dengan koefisien konstan, sementara pada kenyataannya permasalahan biasanya juga melibatkan koefisien variabel, nonlinier, dan memiliki kondisi batas yang rumit. Dengan menggunakan analisis kestabilan Von Neumann pada metode Lax Friedrichs bertujuan bahwa jika solusi numerik yang didapatkan kurang dekat dengan nilai eksaknya, maka kestabilan dari persamaan beda dapat dicari dengan mensubstitusikan  $n_i^j = \rho^j e^{kui}$  pada persamaan beda tersebut, dengan superskrip  $i$  yang artinya menunjukkan posisi,  $j$  merupakan waktu,  $u$  merupakan vektor dan untuk semua  $k$  dalam interval  $[0, 2\pi]$ . Syarat kestabilan Von Neuman yaitu

$$|\rho| \leq 1$$

$\rho$  adalah faktor amplifikasi. (Hellevik, 2020)

## 2.9 Teorema Ekuivalensi Lax

Diberikan sebuah persamaan differensial parsial linear dengan masalah nilai awal yang *well-posed* dan suatu metode beda hingga yang konsisten terhadap persamaan differensial tersebut, maka kestabilan merupakan syarat perlu dan syarat cukup agar metode beda hingga tersebut konvergen (Noye, 1983).

## 2.10 Analisis Konsistensi

Sebuah PBH dari sebuah PDP dikatakan konsisten dengan PDP yang didekati jika selisih antara PBH dengan PDPnya (suku-suku truncation error) menuju nol jika lebar grid menuju nol, yaitu  $(\Delta x, \Delta t) \rightarrow 0$  (Noye, 1983).

### III. METODOLOGI PENELITIAN

#### 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester genap tahun akademik 2022/2023 di Program Studi Magister Matematika Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

#### 3.2 Metode Penelitian

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menyelesaikan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengumpulkan bahan literatur dan studi kepustakaan yang berkaitan dengan fenomena arus lalu lintas.
2. Menggunakan data kepadatan kendaraan pada gerbang tol Cikarang sampai 10 KM ke arah Jakarta.
3. Menentukan nilai parameter  $n_{cr}$  dan  $V_{max}$  dan simulasi nilai parameter  $a$  agar grafik fungsi velositas dan fungsi fluks yang dihasilkan mendekati kejadian sebenarnya.
4. Mengkontruksi formula diskrit skema Lax-Friedrichs pada persamaan LWR dengan menggunakan velositas Papageorgiou.

5. Memeriksa kekonvergenan skema numerik menggunakan teorema ekuivalensi Lax.
6. Melakukan simulasi numerik model arus lalu lintas LWR agar mendapatkan gambaran fenomena arus lalu lintas pada sebuah ruas jalan dengan menggunakan data awal yang diperoleh dan parameter yang berbeda-beda.

## V. KESIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan, dapat diperoleh kesimpulan bahwa pemodelan matematika arus lalu lintas menggunakan fungsi velositas *Papageorgiou* dengan syarat awal dan syarat batas yang telah diketahui solusi dari model LWR dengan fungsi velositas *Papageorgiou* menggunakan Lax-Friedrich telah terbukti stabil dan konsisten. Sedangkah hasil simulasi numerik menunjukkan kecenderungan perubahan kepadatan, kecepatan, dan arus lalu lintas kendaraan dengan mengkondisikan besarnya nilai parameter  $V_{max}$  dan  $n_{cr}$  yang mempengaruhi nilai parameter  $a$ .

### 5.2 Saran

Penelitian ini dapat diteruskan dengan mempertimbangkan *On-ramp* (bagian jalan masuk dari jalur utama) atau *Off-ramp* (bagian jalan keluar dari jalur utama) yang biasa ditemui disepanjang jalan tol. Adapun bentuk persamaan model LWR dengan fungsi velositas *Papageorgiou* pada persamaan (4.6) menjadi

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( n(t, x) V_{max} \cdot \exp \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{n(t, x)}{n_{cr}} \right)^a \right] \right) = s(x, t)$$

dengan  $s(x, t)$  menggambarkan arus masuk dan keluar pada pertengahan ruas jalan.

## DAFTAR PUSTAKA

- Ardekani SA, Mostafa G, Shiva M. (2011). Macroscopic speed-flow models for characterization of freeway and managed lanes. *Publicat de Universitatea Tehnica. I*: 149-159.
- B.D. Greenshield. (1935). *A study of traffic capacity*. In proc 14th meeting of the highway Res. Board: 448-477.
- D. Helbing. (2001). *Traffic and Related Self-Driven Many-Particle Systems*. Reviews of Modern Physics, vol. 73, pp. 1067-1141.
- Dahlan, E. (2021). *Evaluasi Kecepatan Rata-Rata terhadap Kendaraan Arus Bebas*. (Studi Kasus: Jalan Kolonel Abunjani Kotdaha Jambi). *Jurnal Talenta Sipil*, 4(2).
- Drake, J.S., Schofer, J.L., and May, Jr, A.D. (1967). *A statistycal analysis of speed-density hypotheses in vehicular traffic science*. *Highw Res Rec* (154): 112-117.
- Drew, D.R. (1968). *Traffic flow theory and control*. McGraw-Hill: New York.
- Greenberg, H. (1959). *An analysis of traffic flow*. *Oper Res* 7(1): 79-85.
- Halik, M. (2015). *Penyelesaian Numerik Gelombang Tali Menggunakan Metode Lax-Friedrichs*. Skripsi tidak dipublikasikan. Malang: UIN Maulana Malik Ibrahim Malang.
- <https://folk.ntnu.no/leifh/teaching/tkt4140/.main000.html> .
- <https://databoks.katadata.co.id/datapublish/2022/04/18/agar-aman-di-jalan-patuhi-batas-kecepatan-berkendara-ini>.
- Irfan, M. A. (2022). *Implementasi Metode Lax-Friedirch pada Penyelesaian Persamaan Burgers*. UIN Malang.
- Islam, M., Ali, R.B., Chowdhury, F.K. and Sobhan, M. (2019). *Road Accident Analysis and Prevention Measures of Rajshahi-Sirajganj Highway in Bangladesh*. *World Scientific News*, 126, pp.209-221.



- Kabir, M.H, Gani M.O., Andallah L.S. (2010). Numerical Simulation Of A Mathematical Traffic Flow Model Based On A Nonlinear Velocity-Density Function. *Journal of Bangladesh Academy of Sciences*, Vol. 34. 2010:15-22.
- Jabeena, M. (2013). Comparative Study Of Traffic Flow Models And Data Retrieval Methods From Video Graphs. 3(6), 1087–1093.
- Kumar, P., Arkatkar, S., and Joshi, G. (2018) *Calibration of Traffic Stream Models Onhigh-speed Urban Roads with Hererogeneous Traffic Conditions*. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Transport*, 173(5), 321-332.
- La Pipes. (1967). *Car following models and the fundamental diagram of road traffic*. *Trans Res* 1(1): 21-29
- Lighthil Mj, Witham GB. (1955). *On Kinematic Waves I. Flood Movement in Long Rivers*. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 229(1178), 281-316.
- May, A.D. Jr., dan Harmut, E.M.K. (1967). *Non integer car following models*. *Highway Res Rec* 199: 19-32.
- Mcshare dan Roes. (1970). Model Persamaan Greenshield, Greenberg, dan Underwood. Universitas Gajah Mada Press: Yogyakarta.
- Noviantri, V. (2019). Tinjauan Makroskopik Kepadatan Lalu Lintas Berdasarkan Dinamika Fluida. *Media Bina Ilmiah*, 14(4), 2407-2414.
- Noye, John. (1983). *Computational Techniques for Differential Equation*. Australia: Faculty of Mathematical Sciences The University of Adelaide.
- Ofyar, Tamin. (2000). Hubungan Matematis Kecepatan Kepadatan Lalu Lintas, Universitas Gajah Mada Press: Yogyakarta.
- Raqib, A., Ghani, A., Hashim, W., Ibrahim, W., dan Mohd, F. (2006). Penentuan Hubungan Laju-Aliran Lalu Lintas Jalan Arteri. *Jurnal Kejuruteraan*, 18, 117-133
- Papageorgiou, M., Jean-Marc, B., and Hadj-Salem, H. (1989). *Macroscopic Modelling Of Traffic Flow On the Boulevard Peripherique in Paris*. *Transp Research Part B: Methodological*, Elseiver. Vol 23(1), 29 – 47.
- Pratama, M. I. (2016). Simulasi Numerik Model Arus Lalu Lintas Satu Arah Berbasis Fungsi Velositas Underwood. Institut Pertanian Bogor.

- Pudjaprasetya, S.R., dan Kamilia, P.Z. (2018). Finite Volume Method for Simulations of traffic dynamics with Exist and entrances. *ANZIAM Journal*, 10, 1.
- Putra, Y.M., dan Gunawan, P.H. (2018). Simulasi Berbagai Situasi *Traffic Flow* menggunakan Persamaan Kinematik dan Implementasi Metode Finite Volume. *Indonesia Journal on Computing (Indo-JC)*, Vol.3(2), 45-58.
- Puzi, Nurassikin Binti Sahain, & Shazirawati binti Mohd. (2014). A Numerical Solution of Traffic Flow Problem for One Lane Roadway. *Prosiding PSM*,: 46-53.
- Sri, M. (2017). Solusi Numerik Model Arus Lalu Lintas Jalan Satu Jalur Menggunakan Metode Beda Hingga Skema Lax-Friedrichs Dan Skema Upwind. *Digilib Universitas Hasanuddin*: 1-15.
- Salih, A. (2016). *Method of Characteristics*. Thiruvananthapuram: Indian Institute of Space and Technology.
- Sasongko, B. (2010). *Metode Numerik dengan Scilab*. Yogyakarta: C.V. Andi Offset.
- Strikwerda, J.C. (1989). *Finite Difference Scheme and Partial Differential Equation* (first edition). London (GB): Chapman & Hall.
- Strauss, A.W. 2007. *Partial Differential Equations and Introduction Second Edition*. New York: John Willey & Sons, Ltd.
- Underwood, R.T. (1961). *Speed, Volume, and Density Relationship: Quality and Theory of Traffic Flow*. Yale Bureau of Highway Traffic, 141-188.
- W. Knospe, L. Santen, A. Schadschneider, and M. Schreckenberg. (2001). *Human Behavior as Origin of Traffic Phases*. *Physical Review E*, vol. 65.
- Yu, C., Zhang, J., Yao, D., Zhang, R., dan Jhin, H. (2016). Speed Density Model Of Interrupted Traffic Flow Based on Coil Data. *Mobile Information Systems*, 2016, 1-12.