II. TINJAUAN PUSTAKA

Pada bagian ini akan disajikan beberapa teori dasar yang digunakan sebagai landasan teori penelitian ini yaitu teori grup dan teori graf. Pada bagian pertama akan dibahas tentang teori grup.

2.1 Grup

Operasi penjumlahan pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dapat dipandang sebagai suatu fungsi yang memetakan $\mathbb{Z}\ x\ \mathbb{Z}$ ke $\mathbb{Z}$. Dengan kata lain, pasangan terurut $(a, b) \in \mathbb{Z}\ x\ \mathbb{Z}$ akan dipetakan tepat satu kali ke $a + b\ \in \mathbb{Z}$. Operasi penjumlahan bilangan bulat ini merupakan salah satu contoh dari operasi biner. Diberikan himpunan tak kosong S, operasi biner * pada himpunan S didefiniskan sebagai suatu fungsi yang memetakan $S\ x\ S$ ke S. Untuk setiap $(a, b)\ \in SxS$, $*(a, b)$ dinotasikan sebagai $a * b$ (Fraleigh,1999).

Contoh 2.1.1

1. Misalkan $M_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks bujur sangkar berorde 2 dengan unsur-unsurnya adalalah bilang real. Penjumlahan matriks " + " adalah operasi biner pada $M_2(\mathbb{R})$.
2. Operasi penjumlahan biasa pada bilangan real $\mathbb{R}$ merupakan operasi biner.

Pada himpunan bilangan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan suatu operasi biner + (penjumlahan) dapat dilihat beberapa sifat yang terpenuhi di dalamnya. Salah satu sifatnya, penjumlahan bilangan bulat bersifat asosiatif. Di dalam himpunan bilangan bulat terdapat bilangan 0 dengan sifat untuk sebarang bilangan bulat jika ditambahakan dengan 0, maka hasilnya adalah bilangan bulat itu sendiri. Sifat selanjutnya untuk sebarang bilangan bulat terdapat bilangan bulat lain yang apabila dijumlahkan hasilnya adalah 0. Sifat-sifat himpunan bilangan bulat tersebut memotivasi lahirnya konsep teori grup.

Suatu grup $(G,*)$ adalah himpunan G yang tertutup terhadap operasi biner * , sedemikian sehingga memenuhi aksioma-aksioma berikut :

1. Untuk semua $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.
2. Terdapat suatu elemen identitas e sedemikian sehingga untuk semua $x \epsilon G$, berlaku $e * x = x * e = x$.
3. Untuk setiap $a \in G$ terdapat suatu elemen $a' \in G$ sedemikian sehingga $a * a' = a' * a = e$. (Adkins dan Weintraub, 1992) .

Contoh 2.1.2

1. Himpunan $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. $\mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\mathbb{Q} \backslash \{0\}$ dan $\mathbb{C} \backslash \{0\}$ adalah grup terhadap operasi perkalian.
2. Misalkan S adalah matriks ukuran 2 x 2 dan didefinisikan $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} ; a, b, c, d \in Z \right\}$. Operasi penjumlahan matriks $(S, +)$ adalah contoh dari grup.

3. Himpunan semua matriks berukuran nxn yang dapat dibalik merupakan grup terhadap operasi perkalian matriks. Grup ini dinamakan *general linear group* berderajat n dan dinotasikan $GL\ (n, \mathbb{R})$.

Dalam grup $(G,*)$ terdapat himpunan bagian yang lebih kecil, sebagai contoh grup $(\mathbb{Z}, +)$ adalah himpunan bagian dari grup $(\mathbb{Q}\ , +)$. Hal ini mendasari pendefinisian dari suatu subgrup. Subgrup diartikan sebagai himpunan bagian dari suatu grup yang juga merupakan grup terhadap operasi yang sama.

Jika H merupakan himpunan bagian dari grup G yang tertutup pada operasi biner pada G dan jika terhadap operasi biner yang sama pada G, maka H dikatakan subgrup G dan dinotasikan dengan $H\ \leq\ G$ atau $H\ <\ G$ tetapi $H\ \neq\ G$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh 2.1.3 :

1. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q}$ dan $\mathbb{Q}\ \leq \mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan.
2. Diketahui $\mathbb{Z}_6 = \{\ 0,1,2,3,4,5\ \}$ merupakan grup terhadap operasi biner $(+_6)$ penjumlahan modulo 6. Misalkan $A = \{0,2,4\}$. Jelas bahwa $A\ \subset \mathbb{Z}_6$. Dengan operasi biner yang sama $(+_6)$, A merupakan grup sehingga $A\ \leq\ \mathbb{Z}_6$.
3. P = { 0,1,2,3,4,5,6,7 }merupakan himpunan semua kelas bilangan bulat modulo 8. P dengan operasi penjumlahan modulo 8 adalah suatu grup. Maka $(M, +_8)$ merupakan subgrup dari $(P, +_8)$ dengan M = { 0, 2, 4, 6 }.

Tidak semua grup $(G,*)$ memiliki subgrup. Subgrup memiliki beberapa kriteria yang harus dipenuhi. Himpunan bagian H dari grup G merupakan subgrup jika dan hanya jika :

1. $H \neq \emptyset$
2. Untuk setiap $x, y \in H, xy^{-1} \in H$ (Adkins dan Weintraub, 1992).

Contoh 2.1.4

1. Himpunan bilangan genap $H = \{ 2n | n \in \mathbb{Z} \}$ terhadap operasi penjumlahan adalah subgrup dari grup $\mathbb{Z}$.
2. Diberikan grup $M_2(R) = \{ A_{2x2} \,||A| \neq 0 \}$ terhadap operasi perkalian matriks dan $T = \{ A_{2x2} \,||A| = 1\}$. T adalah subgrup dari $M_2(R)$.

Misalkan $(G,*)$ adalah suatu grup, banyaknya unsur-unsur dari grup $(G,*)$ disebut orde dari grup $(G,*)$, dilambangkan dengan $|G|$. $(G,*)$ disebut grup hingga bila $|G|$ berhingga dan disebut grup tak hingga bila $|G|$ tak hingga (Dummit, 2004).

Contoh 2.1.5

1. Orde dari $\mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}$ adalah $|\mathbb{Z}_3| = 3$.
2. Orde dari grup simetri S_3 adalah sebanyak $|S_3| = 3! = 6$.

Beberapa contoh grup berhingga yaitu grup *Alternating* (A_n), grup sederhana (*simple group*), grup dihedral (D_{2n}), grup tipe Lie Chevalley (*Lie Type Chevalley*) yang terdiri dari $PSL\,(n,q), PSU(n,q), PsP(2n,q)$, dan $P\Omega^t(n,q)$

dan grup *sporadic* yang terdiri dari grup *Mathieu* $(M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{24})$, grup Tits (*Tits Group*) yang terdiri dari $^{3}D_4\ (q), E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q),\ ^{2}F_4(2^n),$

$G_2(q),\ ^{2}G_2\ (3^n),\ ^{2}B\ (2^n)$ Suzuki (Sz), grup Janko (J_n), grup McLaughin (*McL*).

Contoh 2.1.6

1. Grup dihedral D_n untuk $n = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah grup permutasi yang mempertahankan bentuk geometri dari segi-*n* beraturan terhadap rotasi (r) dan pencerminan (s). Orde dari grup dihedral D_n adalah sebanyak 2*n*.
2. Grup *Alternating* A_n untuk $n = 1, 2, 3, \dots, n$ adalah permutasi genap dari grup simetri S_n dengan orde sebanyak $\frac{n!}{2}$.

Selain orde grup, suatu elemen pada grup juga memiliki orde. Orde dari suatu elemen a dalam suatu grup $(G,*)$ adalah bilangan bulat positif terkecil n, sedemikian sehingga $a^n = e$ $(e = 1$, untuk perkalian) dan na = e (e = 0, untuk penjumlahan). Bila tidak ada bilangan seperti n tersebut, maka orde dari unsur tersebut tak hingga (Dummit, 2004).

Contoh 2.1.7

1. Z_7 = {0,1,2,3,4,5,6} , Orde dari 2 dengan operasi penjumlahan adalah 7.
2. Orde himpunan $\{i\}$ pada grup I_4 adalah 4 = $(-1, 1, i, -i\ )$.
3. Orde himpunan {1} dan {-1} pada grup $\mathbb{Q}/\{0\}$ adalah 1 dan 2.

Bila suatu grup $(G,*)$ memenuhi sifat komutatif, yaitu $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in G,$ maka grup G tersebut dinamakan grup komutatif. Selainnya disebut grup tidak komutatif (Fraleigh,1999).

Contoh 2.1.8

1. Himpunan $Q_8 = \{-1,1,i,-i,j,-j,k,-k\}$ terhadap operasi perkalian merupakan contoh dari grup tidak komutatif.
2. Himpunan $D_3 = \{ 1, r, r^2, s, sr, sr^2 \}$ terhadap operasi perkalian adalah contoh grup tidak komutatif.
3. Himpunan matriks nxn dengan determinan sama dengan satu (SL $(n$, $\mathbb{R}))$ bersama dengan operasi biner perkalian matriks adalah contoh grup tidak komutatif.

Berdasarkan elemen-elemen yang membangun suatu grup , grup juga dapat dibangun oleh satu elemen dari grup itu sendiri yang disebut grup siklik.
Jika G adalah grup dan $a \in G,$ ditulis

$$\langle a \rangle = \{ a^n | \mathrm{n} \in \mathbb{Z} \}$$

$\langle a \rangle$ disebut subgrup siklik dari G yang dibangun oleh a. G disebut grup siklik jika terdapat $a \in G$ dengan $G = \langle a \rangle$, a disebut sebagai generator atau pembangun dari G (Dummit, 2004).

Contoh 2.1.9

1. Himpunan $I_4 = \{1, -1, i, -i\}$ adalah grup bilangan kompleks terhadap perkalian $(I_4 .)$. i dan $-i$ adalah generator dari I_4.

2. ($\mathbb{Z}$, +) merupakan grup siklik dengan generator 1 dan -1 karena $\mathbb{Z}$ = {n(1) | $n \in \mathbb{Z}$} dan $\mathbb{Z}$ = {n(-1) | $n \in \mathbb{Z}$}.
3. $(\mathbb{Z}_5, +)$ adalah grup siklik dengan generator 1 atau 2 atau 3 atau 4.

Selanjutnya akan diperkenalkan keluarga subgrup dari sebarang grup $(G,*)$. Misalkan $(G,*)$ suatu grup dan $\mathrm{Z} \subset G$, *centralizer* dari elemen z dalam grup G adalah himpunan semua elemen G yang komutatif dengan z, dinotasikan $C_G(Z)$. Jadi $C_G(Z)$ = $\{x \in G | xzx^{-1} = z, \forall\, z \in \mathbb{Z}\}$. Diberikan H subgrup dari G, *centralizer* dari subgrup G adalah himpunan semua elemen G yang komutatif dengan semua elemen dalam himpunan H, dinotasikan $C_G(H)$. Jadi $C_G(H)$ = $\{\, x \epsilon\, G | xh = hx\ , \forall\, h \in H\}$ (Dummit, 2004).

Contoh 2.1.10

1. Misalkan G suatu grup yang terdiri dari himpunan fungsi bijektif bernilai riil yang berbentuk $ax + b$, dengan operasi biner komposisi fungsi. Misal $f \in G$, maka $C_G(f)$ =$\{i, f^{-1}\}$, dengan i adalah fungsi identitas dan f^{-1} fungsi invers dari f.
2. Elemen dari grup dihedral $D_4 = \{\, 1, r, r^2, r^3, s, rs, r^2s, r^3s\}$. *Centralizer* dari r adalah $C_{D_4}(r) = \{1, r, r^2, r^3\ \}$.

Jika $(G,*)$ adalah grup komutatif, maka $C_G(A) = G$ untuk setiap himpunan bagian $A \subseteq G$. Misalkan $(G,*)$ suatu grup , *center* dari grup G adalah himpunan semua elemen G yang komutatif dengan semua elemen G, dinotasikan $Z(G)$. Jadi $Z(G) = \{\, g \in G | gx = xg\ , \forall\, x \in G\}$. Ekuivalen dengan irisan semua *centralizer* elemen grup G (Dummit, 2004).

Contoh 2.1.11

1. *Center* dari grup dihedral D_n adalah $\{1, r^n\}$ untuk *n* berderajat genap. Jika *n* berderajat ganjil maka *center*nya adalah {1}.
2. Jika grup G suatu grup yang berisi himpunan bernilai riil, maka $Z(G) = \{i\}$, dengan *i* adalah fungsi identitas sedemikian sehingga $i(x) = x$, untuk setiap $x \in G$.

Selanjutnya diperkenalkan juga subgrup maksimal komutatif dari suatu grup G. Jika G grup dan H adalah subgrup G, H dikatakan subgrup maksimal komutatif dari G jika :

1. H adalah $C_G(H)$, dimana $C_G(H)$ adalah *centralizer* H dari pada G
2. $C_G(H) \leq G$ dan H komutatif
3. H komutatif jika dan jika $H \leq K \leq G$ dengan K komutatif, maka $H = K$.

(Chen, 2006).

Contoh 2.1. 12

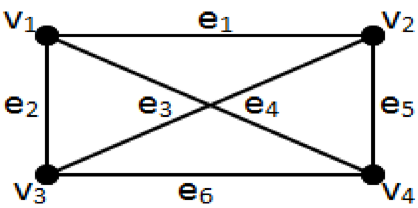
Subgrup maksimal komutatif dari grup semetri $S_3 = \{\, \boldsymbol{\rho_0}, \boldsymbol{\rho_1}, \boldsymbol{\rho_2} \}$.

Setelah dikaji tentang dasar-dasar teori grup, bagian kedua ini dibahas tentang teori graf yaitu pengertian graf, graf isomorfis, *independent set* dari suatu graf , graf prima dan graf tidak komutatif.

2.2 Graf

Sebuah graf $G = (V, E)$ didefinisikan sebagai pasangan terurut (V, E) dengan V adalah himpunan berhingga yang tak kosong dan memuat elemen-elemen yang disebut *vertex*. E (mungkin kosong) adalah himpunan elemen-elemen graf yang berupa garis yang disebut *edge* yang menghubungkan pasangan *vertex* (Deo,1989).

Contoh 2.2.1 :

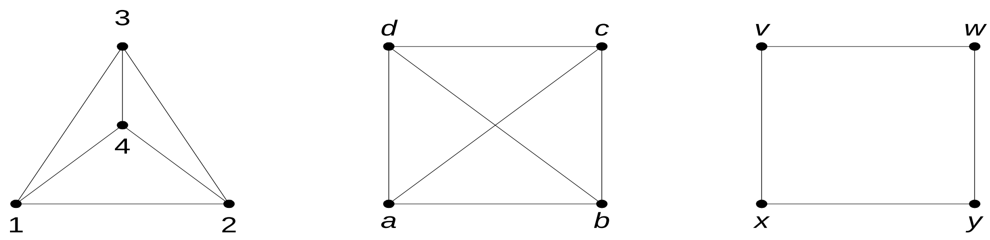


Gambar 2.1 Graf dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

Dalam geometri, dua bangun atau bidang dikatakan ekuivalen (kongruen) jika keduanya memiliki bentuk yang sama. Begitupun dalam graf, dua graf dikatakan ekuivalen (isomorfis) jika secara visual memiliki bentuk yang sama. Hal ini yang memotivasi munculnya konsep graf isomorfis.

Misalkan $G = (V, E)$ dan $G' = (V', E')$ adalah dua graf terhubung, G dan G' dikatakan isomorfis dan ditulis $G \cong G'$ jika ada fungsi bijektif $\varphi : V \to V'$ dengan $x, y \in E \ni \varphi(x)\varphi(y) \in E'$ untuk setiap $x, y \in V$. Jika G tidak isomorfis dengan G', dinotasikan dengan $G \ncong G'$ (Deo, 1989).

Contoh 2.2.2



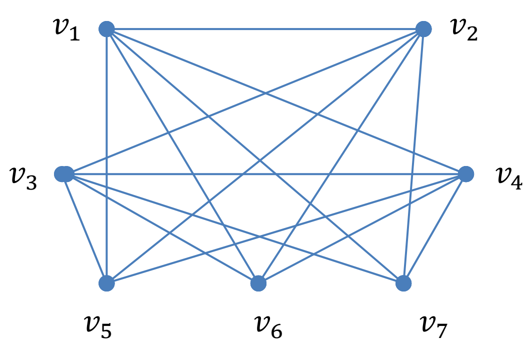
(a) G_1 (b) G_2 (c) G_3

Gambar 2.2 G_1 isomorfis dengan G_2 tapi tidak isomorfis dengan G_3

G_1 dan G_2 isomorfis karena memiliki jumlah *vertex* dan *edge* yang sama serta setiap titiknya saling mempertahankan ketetanggaan. Sedangkan G_1 dan G_3 tidak isomorfis karena jumlah sisinya tidak sama.

Selain isomorfis, graf juga memiliki himpunan titik yang saling bebas atau yang biasa disebut *independent set. Independent set* adalah subset dari himpunan titik suatu graf $G(E, V)$ sedemikan sehingga dua titik pada subset graf tersebut tidak terhubung dengan sebuah garis (Herzt, 2005).

Contoh 2.2.3



Gambar 2.3 Graf dengan $V = \{ v_1 , v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

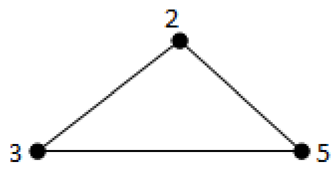
Himpunan bebas (*independent set*) dari Gambar 2.3 adalah $\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4\}$ dan $\{v_5, v_6, v_7\}$.

Jika dilihat dari unsur pembentuknya , graf dapat divisualisasikan dari suatu grup. Sebagai contoh yaitu graf prima dan graf tidak komutatif.

Graf Prima $GK(G)$ dari suatu grup hingga G adalah suatu graf dengan himpunan *vertex* $\pi(G)$ yaitu himpunan semua pembagi prima dari orde G dan dua bilangan prima berbeda *p* dan *q* dihubungkan dengan suatu garis jika dan hanya jika G memuat suatu elemen dengan orde *pq* (Abdollahi, 2006).

Contoh 2.2.4

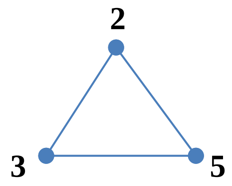
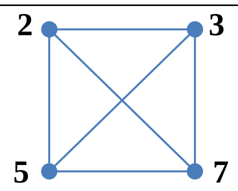
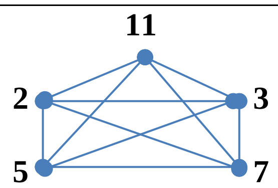
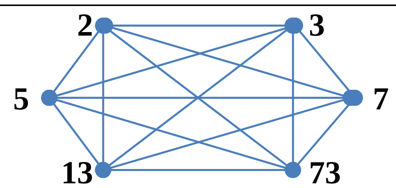
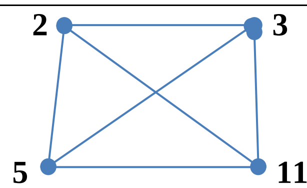
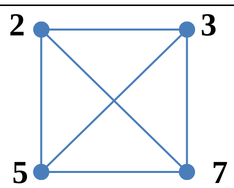
1. Diberikan grup siklik $C_{30} = \{\, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 28, 29 \,\}$. Orde dari grup C_{30} adalah 30. Himpunan pembagi prima $\pi(C_{30}\,)$ = { 2, 3, 5 }. Akibatnya diperoleh $V(GK(C_{30}\,)) = \{\,(2, 3, 5)\}$ dan $E\;(GK(C_{30}\,))$ = { (2,3), (2,5), (3,5) }



Gambar 2.4 Graf prima $GK(C_{30}\,)$

2. Berikut akan ditampilkan beberapa contoh graf prima yang dibentuk dari berbagai macam grup berhingga seperti grup simetri (S_n), grup alternating (A_n), grup Mathieu (M_n) dengan $n = 11, 12, 22,$, grup siklik (C_n), Grup Janko (F_n), gup Lie $(L_n(M)$.

Tabel 2.1 Contoh graf prima $GK(G)$

Grup (G)	Orde |G|	Graf Prima $GK(G)$
S_3	$6 = 2.\ 3$	
A_5	$60 = 2^2.\ 3.\ 5$	
C_{210}	$210 = 2.\ 3.\ 5.\ 7$	
C_{2310}	$2310 = 2.\ 3.\ 5.\ 7.\ 11$	
$L_4(8)$	$2^{18}.3^4.5.7^3.13.73$	
M_{11}	$7920 = 2^7.3^2.5.11$	
J_2	$2^7.3^3.5^2.7$	

(William, 1981).

Setelah definisi graf prima $GK(G)$, selanjutnya didefinisikan graf tidak komutatif $(\Gamma(\mathrm{G}))$. Misalkan $(G,*)$ adalah grup tidak komutatif berhingga, graf tidak komutatif $\Gamma(\mathrm{G})$ adalah suatu graf dengan himpunan titik $V(\Gamma(\mathrm{G})) = G\backslash Z(G)$ dimana $Z(G)$ adalah *center* dari G dan himpunan garis $E(\Gamma(\mathrm{G})) = \{(x,y)|xy \neq yx, \forall\, x,y\ \in\ V(\Gamma(\mathrm{G}))$ (Abdollahi, 2006).

Contoh 2.2.5

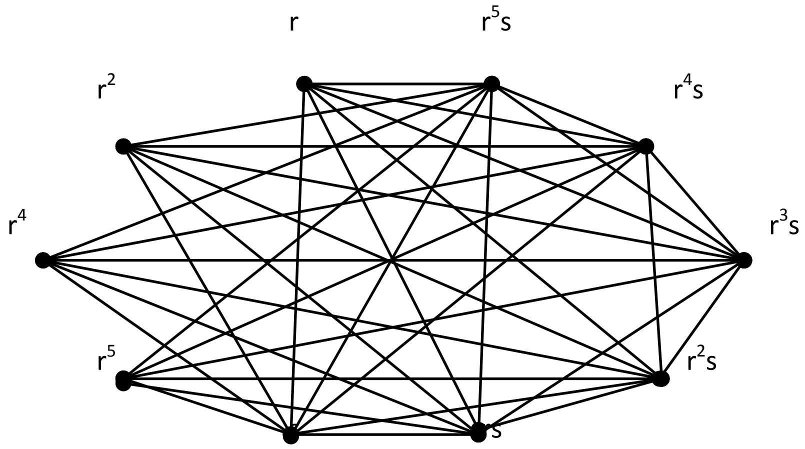
1. Grup dihedral $D_6 = \{1, r, r^2, r^3 r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\}$, di mana r adalah rotasi sebesar $\frac{360^0}{6} =\ 60^0$ berlawanan arah jarum jam dan s adalah refleksi terhadap sumbu-sumbu simetri segi-enam sebanyak 6 kali. Adapun hasil operasi komposisi pada setiap elemen grup dihedral D_6 dalam bentuk tabel *Cayley* dan diperoleh $Z(D_6)$ =$\{1, r^3\}$, sehingga graf tidak komutatif dari grup D_6 memiliki himpunan titik-titik Γ_{D_6}= $\{\ r, r^2, r^4, r^5, s, rs, r^2s, r^2s, r^3s, r^4s, r^5s\ \}$. Kemudian hasil di atas digambarkan ke dalam bentuk graf tidak komutatif pada Gambar 2.5

Tabel 2.2 Tabel *Cayley* Grup Dihedral D_6

o	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
1	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s
r	r	r^2	r^3	r^4	r^5	1	rs	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s
r^2	r^2	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2s	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs
r^3	r^3	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3s	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s
r^4	r^4	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4s	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s

r^5	r^5	1	r	r^2	r^3	r^4	r^5s	s	rs	r^2s	r^3s	r^4s
s	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	1	r^5	r^4	r^3	r^2	r
rs	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	r	1	r^5	r^4	r^3	r^2
r^2s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2	r	1	r^5	r^4	r^3
r^3s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4s	r^3	r^2	r	1	r^5	r^4
r^4s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5s	r^4	r^3	r^2	r	1	r^5
r^5s	r^5s	r^4s	r^3s	r^2s	rs	s	r^5	r^4	r^3	r^2	r	1

Dari tabel *Cayley* diatas diperoleh *center* $Z(D_6)=\{1, r^3\}$. Dengan menghilangkan *center* dari grup dihedral $Z(D_6)$ diperoleh Gambar 2.5



Gambar 2.5 Graf tidak komutatif grup D_6

2. Diberikan grup simetri S_3 dengan orde sebanyak 6. Elemen-elemen dari grup S_3 dituliskan ke dalam perkalian permutasi. Dengan menggunakan tabel Cayley 4.1 diperoleh *center* dari grup $S_3 = \{\boldsymbol{\rho_0}\}$.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mu_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

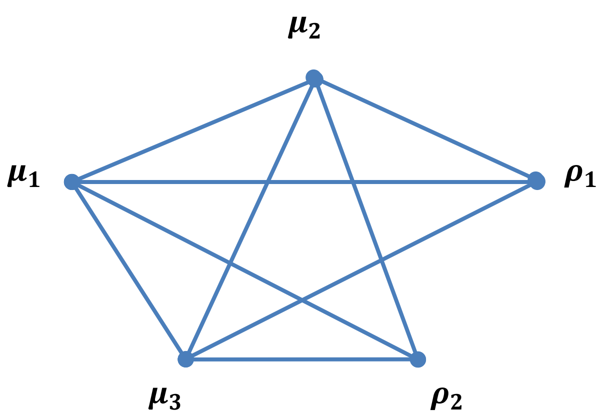
$$\rho_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mu_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Tabel 2.3 Tabel *Cayley* grup simetri S_3

*	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	μ_1	μ_2	μ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_0	μ_3	μ_1	μ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_3	μ_1
μ_1	μ_1	μ_2	μ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2
μ_2	μ_2	μ_3	μ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_1
μ_3	μ_3	μ_1	μ_2	ρ_1	ρ_2	ρ_0

Dengan mengilangkan *center* dari simetri $S_3 = \{\rho_0\}$ didapatkan graf tidak komutatif sebagai berikut :



Gambar 2.6 Graf tidak komutatif grup S_3