**PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU SEMIGRUP**

**(Skripsi)**

**Oleh**

**LUTFIANA SOFA**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2023**

ABSTRACT

**THE IMPLEMENTATION OF ROUGH SET ON A IDEAL STRUCTURE OF A SEMIGROUP**

**By**

**Lutfiana Sofa**

Let $(U, R)$ be an approximation space where $U$ non-empty set and $R$ is an equivalence relation on $U$. Equivalence relation is a relation that is reflexive, symmetric and transitive which will form separate partitions called equivalence class. If $S$ is a subset of $U$, then the equivalence class will form the upper approximation of $S$ and the lower approximation of $S$. If the upper approximation of $S$ and the lower approximation of $S$ are not the same, then $S$ is called a rough set. If a binary operations $*$ are defined, then $\langle S, * \rangle$ will form a rough semigroup if it meets certain conditions. If a non-empty set $I \subseteq S$, then $I$ is called a rough ideal in the rough semigroup if it statisfies the conditions for rough right ideal and rough left ideal. Futhermore, we give some examples of the commutative rough semigroups and rough ideals on a finite set. In addition, we provide the properties of the rough ideal.

**Keywords:** *Approximation space, rough set, rough semigroup, rough ideal.*

# ABSTRAK

## PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU SEMIGRUP

**Oleh**

**Lutfiana Sofa**

Diberikan ruang aproksimasi $(U, R)$ dengan $U$ himpunan tak kosong dan $R$ merupakan relasi ekuivalensi pada $U$. Relasi ekuivalensi merupakan relasi yang bersifat reflektif, simetris dan transitif yang akan membentuk partisi-partisi yang saling lepas yang disebut kelas ekuivalensi. Jika diberikan himpunan bagian $S$ di $U$, maka kelas-kelas ekuivalensi akan membentuk aproksimasi atas dari $S$ dan aproksimasi bawah dari $S$. Jika aproksimasi atas $S$ dan aproksimasi bawah $S$ tidak sama, maka $S$ disebut himpunan *rough*. Jika didefinisikan operasi biner $*$ pada $S$, maka $\langle S,*\rangle$ merupakan semigrup *rough* apabila memenuhi syarat-syarat tertentu. Jika diberikan himpunan tak kosong $I \subseteq S$, maka $I$ disebut ideal *rough* pada semigrup *rough* jika memenuhi syarat ideal kanan *rough* dan ideal kiri *rough*. Selanjutnya diberikan contoh konstruksi semigrup *rough* dan ideal *rough* komutatif pada himpunan berhingga. Selain itu, diberikan sifat-sifat ideal *rough* pada semigrup *rough*.

**Keywords:** *Ruang aproksimasi, himpunan rough, semigrup rough, ideal rough.*

# PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU SEMIGRUP

**Oleh**

**LUTFIANA SOFA**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2023**

## LEMBAR PENGESAHAN

| | |
|---|---|
| Judul Skripsi | : **PENERAPAN KONSEP HIMPUNAN *ROUGH* PADA STRUKTUR IDEAL SUATU SEMIGRUP** |
| Nama Mahasiswa | : **Lutfiana Sofa** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **1917031086** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Fakultas | : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP 198406272006042001

**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP 198002062003121003

2. Ketua Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung

**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**
NIP. 197403162005011001

**MENGESAHKAN**

1. Tim Penguji

| | | |
|---|---|---|
| Ketua | : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** | .................. |
| Sekretaris | : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** | .................. |
| Penguji Bukan Pembimbing | : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** | .................. |

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI UNIVERSITAS LAMPUNG FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**
NIP 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **30 Mei 2023**

**PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA**

Yang bertanda tangan di bawah ini :

| | |
|---|---|
| Nama | : **Lutfiana Sofa** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **1917031086** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Judul Skripsi | : **Penerapan Konsep Himpunan *Rough* pada Struktur Ideal suatu Semigrup** |

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 30 Mei 2023

Penulis

**Lutfiana Sofa**
**1917031086**

## RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Lutfiana Sofa yang lahir di Kabupaten Lampung Selatan pada tanggal 26 November 2000. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara yang terlahir dari pasangan Ang Kim Tjun/Sudarjiman dan Suwarni.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Bina Siswa pada tahun 2006 sampai tahun 2007. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Negeri Pulogebang 10 Petang pada tahun 2007 sampai tahun 2013. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Negeri 193 Jakarta pada tahun 2013 sampai tahun 2016. Penulis menempuh pendidikan di SMA Negeri 103 Jakarta pada tahun 2016 sampai tahun 2019.

Pada tahun 2019, penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Penulis aktif mengikuti kegiatan di dalam maupun luar kampus dan dipercaya menjadi asisten dosen pada dua mata kuliah berbeda yakni Pendidikan Pancasila pada tahun 2019 dan Aljabar Linear Elementer pada tahun 2021.

Pada awal tahun 2022, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa/Kelurahan Rawabunga Kecamatan Jatinegara Kota Jakarta Timur. Kemudian pada pertengahan tahun 2022, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Kota Jakarta Barat.

## KATA INSPIRASI

"Orang lain tidak akan bisa paham *struggle* dan masa sulitnya kita, mereka hanya ingin tau bagian *success stories*-nya saja. Berjuanglah untuk diri sendiri walaupun tidak ada yang memberi tepuk tangan. Kelak diri kita di masa depan akan sangat bangga dengan apa yang kita perjuangkan hari ini"
**(Anonymous)**

"Hatiku tenang karena mengetahui bahwa apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanku"
**(Umar bin Khattab)**

"Jika kau tidak berani mengambil resiko, maka kau tidak dapat menciptakan masa depan"
**(Monkey D Luffy)**

"Ketika dunia ternyata jahat padamu, maka kau harus menghadapinya. Karena tidak seorangpun akan menyelamatkanmu jika kau tidak berusaha"
**(Roronoa Zoro)**

"Perjalanan seribu mill dimulai dengan satu langkah"
**(Lao Tzu)**

## PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil‟‟alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata‟‟alakarena limpahan nikmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur dan ketulusan, kupersembahkan karya sederhana ini untuk:

**Keluarga Tercinta**

Terima kasih kepada Ayah, Ibu dan kedua adikku atas semua doa dan dukungan yang senantiasa diberikan kepadaku.

**Dosen Pembimbing dan Pembahas**

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah sangat berjasa dalam membantu, memberi masukan dan arahan, serta ilmu yang sangat bermanfaat.

**Sahabat-sahabatku**

Terima kasih kepada sahabat-sahabatku atas semua doa, dukungan, kebahagiaan,canda dan tawa yang telah menyertai dalam setiap langkahku.

**Almamater Tercinta Universitas Lampung**

## SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul "**Penerapan Konsep Himpunan *Rough* pada Struktur Ideal suatu Semigrup**" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang ditargetkan.

Dalam penyusunan skripsi ini, banyak sekali pihak yang telah membantu penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, semangat, motivasi dan saran yang membangun. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT atas segala nikmatnya yang telah diberikan sehingga penulis bisa beraktifitas dengan baik dan lancar.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing I yang telah memberikan arahan, saran dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing II yang telah memberikan arahan, saran dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Alm. Amanto, S.Si, M.Si. dan Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si selaku dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis agar dapat menjadi lebih baik lagi.
5. Bapak Alm. Amanto, S.Si.,M.Si. dan Ibu Dina Eka Nurvazly, S.Pd., M.Si. selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan pengarahan dan bimbingan selama perkuliahan.
6. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Lampung.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

8. Guru TK, SD, SMP dan SMA yang telah mengajarkan dan membimbing saya hingga saya menduduki bangku perkuliahan.
9. Ayah, ibu dan adik-adik yang selalu memberikan dukungan, nasihat serta doa yang membuat penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
10. Sahabat penulis: Triya, Meli, Listra, Shella, Aulia, Ale, Roro, Ali, Wina, Puput, Elvina, Fikri yang selalu menemani suka maupun duka.
11. Teman-teman satu bimbingan: Triya, Meli, Rara, Gusti, Ali, Fikri, Lathoif, Ikhsan yang telah memberikan semangat maupunsaran kepada penulis.
12. Teman-teman seperjuangan Jurusan Matematika angkatan 2019.
13. *Last but not least, I wanna thank me, I wanna thank me for believing me, I wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having a day off, I wanna thank me for never quitting, I wanna thank me for always being a giver and try'na give more than I receive, I wanna thank me for trying to do more right than wrong, I wanna thank me for just being me at all times.*

Semoga Allah SWT melimpahkan karunia-Nya dan memberikan kemudahan serta kebaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu penulis. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan baikdari segi materi maupun teknisnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagipara pembacanya.

Bandar Lampung, 30 Mei 2023

Penulis,

Lutfiana Sofa

## DAFTAR ISI

## DAFTAR TABEL

## DAFTAR GAMBAR

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori himpunan *rough* merupakan pendekatan matematika yang dikenalkan pertama kali oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Dalam hal ini, himpunan *rough* digunakan dalam menangani masalah yang bersifat ketidakjelasan (*granularity*) dan ketidakpastian (*ambigulty*). Himpunan *rough* telah menarik banyak peneliti sehingga menciptakan penerapan untuk kehidupan sehari-hari dalam berbagai bidang. Beberapa bidang tersebut antara lain ilmu komputer, kedokteran, data analisis, ekonomi, dan berbagai bidang lainnya.

Beberapa peneliti yang telah mengkaji teori himpunan *rough*, seperti Polkowski dan Skowron (1998) yang membahas tentang himpunan *rough* dan penerapannya pada *trend* terkini komputasi. Grzymala-Busse (2005) yang membahas tentang himpunan *rough* dan penerapannya pada *data mining*. Begitu juga dengan Pawlak (2002) yang membahas tentang himpunan *rough* dan penerapannya pada *data analysis*, serta penelitian tentang implementasi teori himpunan *rough* pada struktur aljabar seperti penelitian yang dilakukan oleh Bonikowski (1994) tentang sifat-sifat aljabar dari himpunan *rough*. Miao dkk. (2005) yang memperkenalkan tentang grup *rough* dan subgrup *rough*. Selain itu, Kuroki (1997) juga membahas tentang ideal *rough* pada semigrup. Davvaz (2004) memperkenalkan subring *rough* sehubungan dengan ideal suatu ring. Bagirmaz dan Ozcan (2015) menyelidiki semigrup *rough* pada ruang aproksimasi.

Penelitian terbaru yang membahas tentang himpunan rough antara lain Setyaningsih dkk. (2021) mengenai barisan sub-eksak pada grup *rough*, Nugraha dkk. (2022) mengenai penerapan himpunan *rough* pada struktur grup, Hafifullah dkk. (2022) mengenai sifat-sifat barisan V-Koeksak *rough* pada grup *rough*, Dwiyanti dkk. (2023) mengenai penerapan himpunan *rough* pada modul proyektif.

Konsep dasar dari teori himpunan *rough* yang dikemukakan oleh Pawlak adalah relasi ekuivalensi yang merupakan relasi dari suatu himpunan tak kosong yang bersifat refleksif, simetris, dan transitif yang menghasilkan partisi-partisi saling lepas yang disebut dengan kelas-kelas ekuivalensi. Pasangan $(U, R)$ disebut ruang aproksimasi jika $U$ merupakan suatu himpunan tak kosong dan $R$ merupakan relasi ekuivalensi pada $U$. Jika $X$ himpunan bagian dari $U$ maka aproksimasi bawah dari $X$ yang dinotasikan dengan $\underline{Apr}(X)$ atau $\underline{R}(X)$ pada ruang aproksimasi $(U, R)$ merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang terdapat dalam $X$ dan aproksimasi atas dari $X$ yang dinotasikan dengan $\overline{Apr}(X)$ atau $\overline{R}(X)$ pada ruang aproksimasi $(U, R)$ merupakan gabungan dari kelas ekuivalensi yang irisannya dengan $X$ bukan merupakan himpunan kosong. Jika $\overline{R}(X) - \underline{R}(X) \neq \emptyset$, maka himpunan $X$ disebut himpunan *rough*.

Penelitian ini akan membahas penerapan konsep himpunan *rough* pada struktur aljabar, yaitu struktur ideal pada suatu semigrup. Semigrup merupakan himpunan tak kosong $G$ yang dilengkapi dengan operasi biner $*$ pada himpunan $G$ yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Dalam konsep ideal, $I \subseteq G$ dikatakan ideal di semigrup $\langle G, * \rangle$ jika $I$ ideal kanan $G$ dan $I$ ideal kiri $G$. Pada penelitian ini juga dibahas sifat-sifat dari struktur ideal *rough* pada semigrup *rough*.

## 1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah menerapkan teori himpunan *rough* dalam mengkonstruksi struktur ideal suatu semigrup dari ruang aproksimasi menggunakan dua relasi. Selain itu, akan diselidiki sifat-sifat dari ideal *rough* dan kaitan antara ideal semigrup dan ideal *rough* pada semigrup *rough* serta membuat program untuk menentukan ideal pada semigrup rough menggunakan *phyton*.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dari penelitian ini yang diharapkan dapat berguna bagi pembaca yaitu sebagai berikut:

1. memberikan pengetahuan mengenai konsep ideal *rough* serta sifat-sifatnya;
2. mengembangkan wawasan penerapan himpunan *rough* dalam membangun struktur ideal semigrup;
3. menjadikan tulisan ini sebagai referensi dan sarana pembelajaran untuk mempelajari penerapan himpunan *rough* dalam membangun struktur ideal semigrup.

# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Himpunan

Himpunan dikembangkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Jerman, George Cantor pada tahun 1845-1918. Himpunan merupakan konsep dasar dari semua cabang matematika yang dinyatakan dengan mendaftar semua anggotanya di dalam kurung kurawal yang dinotasikan dengan $\{\}$. Himpunan dapat didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1.1** Himpunan (*set*) merupakan kumpulan benda atau objek yang didefinisikan secara jelas. Himpunan dapat dipandang sebagai kumpulan benda-benda atau objek-objek yang berbeda tetapi dalam satu segi dapat ditanggapi sebagai suatu kesatuan. Objek-objek ini disebut anggota atau elemen himpunan. Himpunan dinotasikan dengan huruf kapital seperti $A, B, C, \ldots$ dan anggota himpunan dinotasikan dengan huruf kecil seperti $a, b, c, \ldots$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini akan diberikan beberapa operasi terhadap himpunan (Setiadji, 2009). Diberikan sebarang himpunan $A$ dan $B$.

a. Gabungan dari dua himpunan $A$ dan $B$, dinotasikan dengan $A \cup B$ yaitu $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
b. Irisan dari dua himpunan $A$ dan $B$, dinotasikan dengan $A \cap B$ yaitu $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
c. Selisih dari dua himpunan $A$ dan $B$, dinotasikan dengan $A - B$ yaitu $A - B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$.

Contoh sederhana dari himpunan adalah kumpulan hari dalam seminggu, kumpulan bulan dalam setahun, kumpulan provinsi di Indonesia, kumpulan bilangan asli genap, kumpulan bilangan asli ganjil, dan lain-lain. Kumpulan tersebut dikatakan suatu himpunan karena objek-objek di dalamnya terdefinisi dengan jelas. Misalkan objek-objek dalam kumpulan hari dalam seminggu yaitu Senin, Selasa, Rabu, Kamis, Jumat, Sabtu dan Minggu. Adapun contoh yang bukan merupakan himpunan yaitu: kumpulan lagu-lagu yang puitis karena suatu lagu mungkin dikatakan puitis oleh seseorang namun belum tentu puitis menurut orang lain. Lebih jelasnya berikut ini diberikan contoh lain dari himpunan.

**Contoh 2.1.2**

Misal $A$ merupakan himpunan bilangan prima kurang dari 20. Himpunan $A$ dapat ditulis $A = \{a \mid a < 20,\ a \in \text{bilangan prima}\}$ atau $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$. Cara penulisan pada $A = \{a \mid a < 20,\ a \in \text{bilangan prima}\}$ merupakan notasi pembentuk himpunan dimana himpunan dinyatakan dengan menulis syarat yang harus dipenuhi oleh anggotanya. Cara penulisan $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ merupakan notasi secara numerasi.

Setelah membahas tentang definisi dan contoh himpunan, selanjutnya diberikan definisi dari kardinalitas himpunan.

**Definisi 2.1.3** Kardinalitas dari suatu himpunan $A$ merupakan banyaknya elemen di dalam himpunan $A$ yang dinotasikan dengan $n(A)$ atau $|A|$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh kardinalitas himpunan.

**Contoh 2.1.4**

1) Jika himpunan $A = \{a \mid a < 20,\ a \text{ bilangan prima}\}$ atau $A = \{2, 3, 5, 7{,}11$ $13, 17, 19\}$ maka kardinalitas dari himpunan $A$ adalah 8, dinotasikan dengan $|A| = 8$.

2) Jika $P = \{p \mid p$ merupakan nama-nama bulan dalam setahun$\}$ atau $P =$ {Januari, Februari, Maret, April, Mei, Juni, Juli, Agustus, September, Oktober, November, Desember}, maka kardinalitas dari himpunan $P$ adalah 12, dinotasikan dengan $|P| = 12$.
3) Himpunan bilangan rill $\mathbb{R}$ mempunyai jumlah anggota tidak berhingga, sehingga $|\mathbb{R}| = \infty$

Jika suatu himpunan yang memiliki kardinalitasnya bernilai 0 maka himpunan tersebut disebut dengan himpunan kosong. Berikut ini diberikan definisi mengenai himpunan kosong.

**Definisi 2.1.5** Himpunan dengan kardinalitas 0 disebut dengan himpunan kosong (*null set*). Himpunan kosong dinotasikan dengan Ø atau { } (Wibisono, 2008).

Berdasarkan Definisi 2.1.5, dapat disimpulkan bahwa himpunan kosong merupakan himpunan yang tidak memiliki satupun anggota. Contoh sederhana dari himpunan kosong adalah himpunan $A$ dengan $A$ merupakan nama hari yang dimulai huruf Z. Karena tidak ada nama hari yang dimulai huruf Z, maka dapat disimpulkan bahwa $A$ merupakan himpunan kosong atau $A = \emptyset$.

Berikut ini diberikan contoh lain dari himpunan kosong.

**Contoh 2.1.6**

1) Himpunan $\mathbb{N}$, dengan $\mathbb{N}$ merupakan himpunan bilangan asli yang kurang dari 1 memiliki kardinalitas 0, sehingga $\mathbb{N}$ merupakan himpunan kosong atau $\mathbb{N} = \emptyset$.
2) Himpunan Q, dengan Q merupakan himpunan bilangan ganjil yang habis dibagi dua memiliki kardinalitas 0, sehingga Q merupakan himpunan kosong atau $\mathrm{Q} = \emptyset$.

Suatu himpunan dapat memuat himpunan-himpunan lain sebagai anggotanya, himpunan tersebut disebut himpunan semesta. Berikut ini diberikan definisi himpunan semesta.

**Definisi 2.1.7** Semua himpunan yang ditinjau adalah subhimpunan dari sebuah himpunan tertentu disebut himpunan semesta (*universal set*). Dengan kata lain himpunan semesta adalah himpunan dari semua objek yang berbeda. Himpunan semesta dinotasikan dengan $S$ atau $U$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh dari himpunan semesta.

**Contoh 2.1.8**

1) Jika himpunan $\mathbb{Z}^+$ merupakan himpunan bilangan bulat positif dan himpunan $\mathbb{Z}^-$ merupakan himpunan bilangan bulat negatif, maka himpunan semestanya adalah himpunan $\mathbb{Z}$.
2) Jika himpunan huruf vokal dan himpunan huruf non vokal, maka himpunan semestanya adalah himpunan seluruh huruf alfabet.
3) Jika $U$ merupakan himpunan seluruh tangga nada, maka $U = \{\text{Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si}\}$.

Suatu himpunan dapat membentuk himpunan lain yang disebut himpunan bagian. Anggota yang terdapat di dalam himpunan tersebut merupakan anggota pada himpunan awal. Berikut ini diberikan definisi mengenai himpunan bagian.

**Definisi 2.1.9** Himpunan $A$ dikatakan himpunan bagian (*subset*) dari himpunan $B$ jika dan hanya jika setiap anggota di $A$ merupakan anggota himpunan $B$. Himpunan bagian $A$ dari himpunan $B$ dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh dari himpunan bagian.

**Contoh 2.1.10**

1. Jika himpunan $\mathbb{Z}$ merupakan himpunan bilangan bulat dan himpunan $\mathbb{Z}^+$ merupakan himpunan bilangan bulat positif, maka $\mathbb{Z}^+$ merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{Z}$ atau $\mathbb{Z}^+ \subseteq \mathbb{Z}$.
2. Jika himpunan $X$ merupakan himpunan seluruh huruf alfabet dan himpunan $Y$ merupakan himpunan huruf vokal, maka $Y$ merupakan himpunan bagian dari $X$ atau $Y \subseteq X$.
3. Jika $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{a, b, c, d, e, f\}$, maka $A \subseteq B$.
4. Jika $C = \{1, 3, 5\}$ dan $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, maka $C \subseteq D$.

Semua himpunan bagian yang dapat dibuat dari suatu himpunan disebut himpunan kuasa. Berikut ini diberikan definisi mengenai himpunan kuasa.

**Definisi 2.1.11** Himpunan kuasa (*power set*) dari suatu himpunan adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian yang dapat dibuat dari sebuah himpunan. Banyaknya himpunan bagian dari sebuah himpunan $A$ dinotasikan dengan sebagai $P(A)$. Apabila himpunan $A$ terdiri dari $n$ anggota, maka banyaknya anggota dari himpunan kuasa dari himpunan $A$ adalah $2^n$ (Wibisono, 2008).

Berikut ini diberikan contoh dari himpunan kuasa.

**Contoh 2.1.12**

Diberikan himpunan $A = \{2, 4, 6\}$, diperoleh $|A| = 3$. Oleh karena itu, $P(A) = 2^3 = 8$. Dengan demikian, himpunan kuasa dari himpunan $A$ yaitu:

$P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{2,4\}, \{2,6\}, \{4,6\}, \{2,4,6\}\}$.

## 2.2 Operasi Biner

Operasi biner merupakan pembangun dari struktur grup. Berikut definisi dari operasi biner.

**Definisi 2.2.1** Diberikan himpunan tak kosong $S$. Operasi $*$ pada himpunan $S$ adalah pemetaan setiap pasangan terurut $(a, b)$ anggota dari $S$ dengan suatu elemen $S$ yaitu perkawanan $(a, b) \in S$ terhadap $a * b \in S$ atau dinotasikan dengan $* : S \times S \to S$ sehingga untuk setiap $a, b \in S \times S$ akan menghasilkan $(a * b) \in S$. Jika definisi terpenuhi, maka dapat dikatakan operasi $*$ adalah *well defined* pada $S$ atau $S$ tertutup terhadap operasi $*$ (Sugita dan Anggraini, 2020).

Untuk lebih memahami Definisi 2.2.1, berikut ini contoh operasi biner.

**Contoh 2.2.2**

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan operasi + adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$. Operasi + dapat dinyatakan sebagai suatu fungsi dari $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, yaitu untuk setiap $(a, b) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, maka $a + b \in \mathbb{Z}$, karena penjumlahan dari dua bilangan bulat adalah bilangan bulat pula. Dengan kata lain, operasi + tertutup di $\mathbb{Z}$.

Operasi pembagian (:) bukan operasi biner pada $\mathbb{Z}$ karena terdapat pembagian dari dua bilangan bulat yang tidak menghasilkan bilangan bulat pula. Contohnya, untuk $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ jika dipilih $a = 1$ dan $b = 2$, maka $1 : 2 = 0{,}5 \notin \mathbb{Z}$. Hal ini menunjukkan operasi biner (:) tidak tertutup di $\mathbb{Z}$.

**Contoh 2.2.3**

Misalkan $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks bilangan real berordo $2 \times 2$. Operasi penjumlahan matriks merupakan operasi biner pada $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sebab setiap penjumlahan matriks-matriks anggota $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ akan selalu menghasilkan matriks bilangan real orde $2 \times 2$ pula. Demikian juga untuk perkalian dan pengurangan matriks pada $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ merupakan operasi biner. Namun operasi penjumlahan pada $M(\mathbb{R})$ yang merupakan himpunan semua matriks bilangan real bukanlah operasi biner, sebab $A + B$ tidak dapat didefinisikan untuk ukuran matriks atau ordo yang berlainan untuk $A, B \in M(\mathbb{R})$.

**Contoh 2.2.4**

Diberikan $X = \{a, b, c, d\}$ yang dilengkapi operasi $*$ seperti didefinisikan pada tabel berikut.

Tabel 2.2.1 Tabel *Cayley* pada $X$ dengan operasi biner $*$

| $*$ | $\boldsymbol{a}$ | $\boldsymbol{b}$ | $\boldsymbol{c}$ | $\boldsymbol{d}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\boldsymbol{a}$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ |
| $\boldsymbol{b}$ | $b$ | $c$ | $d$ | $a$ |
| $\boldsymbol{c}$ | $c$ | $d$ | $a$ | $b$ |
| $\boldsymbol{d}$ | $d$ | $a$ | $b$ | $c$ |

Dapat dilihat pada Tabel 2.2.1 bahwa $a * a = a$, $a * b = b$, dan seterusnya, sehingga untuk setiap $a, b \in X$ maka $a * b = X$. Hal ini menunjukkan bahwa $*$ merupakan operasi biner pada $X$ atau dapat dikatakan bahwa himpunan $X$ tertutup terhadap $*$.

Setelah membahas tentang definisi dari operasi biner, berikut ini diberikan sifat-sifat operasi biner.

**Definisi 2.2.5** Suatu operasi biner $*$ pada himpunan $S$ dikatakan komutatif jika $a * b = b * a$ untuk setiap $a, b \in S$. Suatu operasi biner $*$ pada himpunan $S$ dikatakan asosiatif jika $(a * b) * c = a * (b * c)$ untuk setiap $a, b, c \in S$ (Sugita dan Anggraini, 2020).

Berikut ini merupakan contoh dari sifat operasi biner.

**Contoh 2.2.6**

Diberikan operasi biner $*$ pada himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dengan $a * b = 2ab$. Operasi biner $*$ bersifat komutatif karena $a * b = b * a = 2ab$ dan bersifat asosiatif karena $(a * b) * c = 2ab * c = 4abc$ dan $a * (b * c) = a * 2bc = 4abc$.

## 2.3 Grup

Menurut (Herstein, 1975), himpunan yang dilengkapi dengan satu operasi biner disebut sistem matematika. Sistem matematika menjadi pengantar dalam pembahasan pada grup. Berikut diberikan definisi dari grup.

**Definisi 2.3.1** Suatu himpunan tak kosong $G$ terhadap operasi biner $*$ disebut grup, dinotasikan dengan $\langle G,* \rangle$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi $*$ bersifat tertutup di $G$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$;
2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3. untuk setiap $a \in G$, terdapat elemen identitas $e \in G$ terhadap operasi biner $*$ sehingga berlaku $e * a = a * e = a$;
4. untuk setiap $a \in G$, terdapat invers $-a \in G$ terhadap operasi biner $*$ sehingga dengan berlaku $a * -a = -a * a = e$.

Jika grup $\langle G,* \rangle$ memenuhi aksioma:

5. operasi biner $*$ pada $G$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka grup $\langle G,* \rangle$ ini disebut grup Abel atau grup komutatif (Herstein, 1975).

Berikut ini diberikan contoh grup.

**Contoh 2.3.2**

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan + merupakan operasi biner pada $\mathbb{Z}$, berikut akan ditunjukkan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ berlaku $a + b \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi $+$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif pada operasi $+$.

3. Terdapat $e = 0$, sehingga $a + e = a + 0 = 0 + a = e + a = a$ untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, 0 adalah elemen identitas terhadap operasi + di $\mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$, terdapat $-a \in \mathbb{Z}$, sehingga $a * -a = -a * a = 0$. Oleh karena itu, $-a$ adalah elemen invers di $\mathbb{Z}$.

Karena $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ memenuhi semua aksioma grup, maka $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

Selanjutnya diberikan contoh grup komutatif.

**Contoh 2.3.3**

Diketahui $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$, berlaku $a + b = b + a$, sehingga $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif.

## 2.4 Semigrup

Semi berarti setengah atau sebagian. Jika pada grup terdapat empat aksioma yang harus dipenuhi, maka pada semigrup hanya terdapat dua aksioma saja yang harus dipenuhi. Berikut diberikan definisi dari semigrup.

**Definisi 2.4.1** Suatu himpunan tak kosong $S$ terhadap operasi biner $*$ disebut semigrup jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. operasi $*$ bersifat tertutup di $S$, untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b \in S$;
2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, untuk setiap $a, b, c \in S$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Jika semigrup $\langle S, * \rangle$ memenuhi aksioma:

3. Operasi biner $*$ pada $S$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a * b = b * a$, maka semigrup $\langle S, * \rangle$ ini disebut semigrup Abel atau semigrup komutatif (Whitelaw, 1978).

Selanjutnya diberikan contoh semigrup.

**Contoh 2.4.2**

Diberikan suatu himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dan $+$ merupakan operasi biner pada $\mathbb{N}$, berikut akan ditunjukkan $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup.

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a * b \in \mathbb{N}$. Oleh karena itu, $\mathbb{N}$ tertutup pada operasi $+$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$ berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$. Oleh karena itu, $\mathbb{N}$ bersifat asosiatif pada operasi $+$.

Karena $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ memenuhi semua aksioma semigrup, maka $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup. $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ termasuk semigrup dan bukan merupakan grup karena setiap elemen di $\mathbb{N}$ tidak memiliki invers.

Selanjutnya diberikan contoh semigrup komutatif.

**Contoh 2.4.3**

Diketahui $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup dengan $\mathbb{N}$ adalah himpunan bilangan asli. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b = b + a$, sehingga $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup komutatif.

Selanjutnya diberikan definisi dari subsemigrup.

**Definisi 2.4.4** Suatu himpunan bagian tak kosong $T$ dari semigrup $S$ terhadap operasi biner $*$ disebut subsemigrup jika operasi $*$ bersifat tertutup di $T$, untuk setiap $a, b \in T$ berlaku $a * b \in T$ (Whitelaw, 1978).

**Contoh 2.4.5**

Diberikan $T \subseteq \mathbb{N}$ dengan $T = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ dari semigrup $\langle \mathbb{N}, + \rangle$. Untuk setiap $a, b \in T$ berlaku $a * b \in T$. Oleh karena itu, $T$ tertutup pada operasi $+$. Dengan demikian, $T$ merupakan subsemigrup.

## 2.5 Ideal pada Semigrup

Pembahasan selanjutnya adalah ideal pada suatu semigrup. Berikut definisi ideal pada semigrup.

**Definisi 2.5.1** Suatu subhimpunan tak kosong $I$ dari semigrup $S$ disebut ideal kiri dari semigrup $S$ jika $SI \subseteq I$, ideal kanan dari semigrup $S$ jika $IS \subseteq I$ dan ideal dari semigrup $S$ jika merupakan ideal kiri sekaligus ideal kanan dari semigrup $S$ (Kuroki, 1997).

**Contoh 2.5.2**

Diberikan $I \subseteq \mathbb{N}$ dengan $I = \{10, 11, 12, 13, \ldots\}$ dari semigrup $\langle \mathbb{N}, + \rangle$. Untuk setiap $s \in \mathbb{N}$ dan $i \in I$ berlaku $s + i \in I$ dan $i + s \in I$. Dengan demikian, $I$ merupakan ideal pada semigrup $\mathbb{N}$.

## 2.6 Relasi Ekuivalensi

Sebelum membahas definisi relasi ekuivalensi, terlebih dahulu dibahas mengenai definisi relasi. Secara bahasa, relasi merupakan hubungan. Namun dalam ilmu matematika, relasi dapat didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.6.1** Suatu relasi $R$ atas suatu himpunan $S$ adalah suatu himpunan bagian dari $S \times S = \{(a, b) : a, b \in S\}$. Dengan kata lain, suatu relasi $R$ atas suatu himpunan $S$ adalah suatu aturan yang menghubungkan unsur dari himpunan $S$ ke unsur himpunan $S$ itu sendiri (Suwilo dkk., 1987).

**Contoh 2.6.2**

Diberikan himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Relasi $R$ pada himpunan $S$ didefinisikan sebagai berikut: $R = \{(a, b) \in A \times A \mid a < b\}$, sehingga diperoleh $R = \{(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (4,6), (5,6)\}$.

Setelah memahami definisi dan contoh dari relasi, berikut akan diberikan definisi dari relasi ekuivalensi

**Definisi 2.6.3** Relasi $R$ pada himpunan tak kosong $A$ disebut relasi ekuivalensi jika dan hanya jika $R$ memiliki sifat refleksif, simetris dan transitif.

a. Relasi $R$ pada himpunan $A$ disebut refleksif jika dan hanya jika $aRa$ untuk setiap $a \in A$;
b. Relasi $R$ pada himpunan $A$ disebut simetris jika dan hanya jika $aRb$ berakibat $bRa$ untuk setiap $a, b \in A$;
c. Relasi $R$ pada himpunan $A$ disebut transitif jika dan hanya jika $aRb$ dan $bRc$ berakibat $aRc$ untuk setiap $a, b, c \in A$ (Barnier dan Feldman, 1990).

**Contoh 2.6.4**

Diberikan himpunan $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. Pada himpunan $A$ didefinisikan relasi $R$ yaitu $xRy$ dengan $x, y \in A$ jika dan hanya jika $x - y = 2k$ dengan $k \in \mathbb{Z}$. Berikut akan dibuktikan bahwa $R$ merupakan suatu relasi ekuivalensi pada himpunan $A$.

a) Untuk $x \in A$, berlaku $xRx$ karena $x - x = 2.0 = 0$ dan $0 \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, $R$ bersifat refleksif;

b) Untuk setiap $x, y \in A$, berlaku $xRy$ maka $x - y = 2k$ untuk $k \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $y - x = -(2k)$ untuk $-k \in \mathbb{Z}$ sehingga $yRx$. Oleh karena itu, $R$ bersifat simetris;

c) Untuk setiap $x, y, z \in A$, berlaku $xRy$ dan $yRz$ maka $x - y = 2k$ dan $y - z = 2j$ untuk $k, j \in \mathbb{Z}$. Hal ini berakibat $x - z = (x - y) + (y - z) = 2j + 2k = 2(j + k)$ untuk $k, j \in \mathbb{Z}$ sehingga $xRz$. Oleh karena itu, $R$ bersifat transitif.

Dengan demikian, relasi $R$ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan $A$.

## 2.7 Koset

Koset merupakan partisi dari suatu grup yang akan membentuk kelas-kelas ekuivalensi. Berikut definisi dari koset.

**Definisi 2.7.1** Misalkan $\langle G,*\rangle$ adalah grup dan $H$ subgrup dari $G$. Untuk setiap $a \in G$. Himpunan bagian $aH = \{a * h \mid h \in H\}$ dari $G$ disebut koset kiri $H$ yang memuat $a$ di $G$ dan $Ha = \{h * a \mid h \in H\}$ disebut koset kanan dari $H$ di $G$ yang memuat $a$ di $G$ (Gallian, 2010).

**Contoh 2.7.2**

Diketahui $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$ adalah grup dan $H = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}$. Akan ditentukan banyaknya koset di $\mathbb{Z}$ relatif terhadap $H$.

Koset-koset di $\mathbb{Z}$ adalah: $0 + H = H$

$1 + H = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}$

$2 + H = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\} = H$

$3 + H = 1 + H$, dan seterusnya

Oleh karena itu, banyaknya koset adalah 2 koset yaitu $H$ dan 1 + $H$.

## 2.8 Kelas Ekuivalensi

Relasi ekuivalensi dan koset tersebut menghasilkan partisi dari himpunan pendasar menjadi kelas-kelas ekuivalensi yang saling lepas.

**Definisi 2.8.1** Diberikan relasi ekuivalensi $R$ atas himpunan $A$ dan $a \in A$. Kelas ekuivalensi dari $a$ pada relasi $R$ adalah $[a]_R = \{x : x \in A \text{ and } aRx\}$. Dengan kata lain, kelas ekuivalensi $a$ pada relasi $R$ memuat semua elemen dalam himpunan $A$ yang memiliki relasi dengan $a$ (Barnier dan Feldman, 1990).

**Contoh 2.8.2**

Berdasarkan Contoh 2.6.4, relasi $R$ adalah relasi ekuivalensi pada $A$. Kelas ekuivalensi pada contoh tersebut adalah $[1] = \{-3, -1,1,3\}$ dan $[2] = \{-4, -2,0,2,4\}$.

## 2.9 Ruang Aproksimasi

Setelah memahami definisi relasi ekuivalensi dan kelas ekuivalensi, berikut diberikan definisi ruang aproksimasi.

**Definisi 2.9.1** Diberikan $U \neq \emptyset$ dan $R$ relasi ekuivalensi pada $U$. Pasangan $(U, R)$ disebut ruang aproksimasi (*approximation space*) yang dinotasikan dengan $K = (U, R)$ (Miao dkk., 2005).

Berikut diberikan contoh dari ruang aproksimasi.

**Contoh 2.9.2**

Berdasarkan Contoh 2.6.4 telah dibuktikan bahwa $R$ merupakan relasi ekuivalensi pada $A$ dan himpunan $A$ bukan himpunan kosong, maka pasangan $(A,\ R)$ adalah ruang aproksimasi.

## 2.10 Aproksimasi Atas dan Aproksimasi Bawah

Berikut definisi dari aproksimasi atas dan aproksimasi bawah.

**Definisi 2.10.1** Diberikan $(U, R)$ adalah ruang aproksimasi dan $X$ adalah himpunan bagian dari $U$ dengan relasi ekuivalensi $R$ pada $U.$ Aproksimasi atas dan aproksimasi bawah didefinisikan sebagai berikut:

$$\underline{R}(X) = \{x \mid [x]_R \subseteq X\}$$

$$\overline{R}(X) = \{x \mid [x]_R \cap X \neq \emptyset\}$$

$\underline{R}(X)$ disebut aproksimasi bawah dari $X$ dan $\overline{R}(X)$ disebut aproksimasi atas dari $X$ di ruang aproksimasi $(U, R)$ (Miao dkk., 2005).

**Contoh 2.10.2**

Diberikan $U = \mathbb{Z}_{20}$ merupakan himpunan tak kosong dan relasi ekuivalensi $R$ pada himpunan $U$ didefinisikan untuk setiap $x, y \in U$ berlaku $xRy$ jika dan hanya jika $x - y = 5m$ dengan $m \in \mathbb{Z}$ .

Karena relasi $R$ merupakan relasi ekuivalensi pada himpunan $U$ maka kelas-kelas ekuvalensinya adalah sebagai berikut:

$E_1 = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$;

$E_2 = \{\bar{1}, \bar{6}, \overline{11}, \overline{16}\}$;

$E_3 = \{\bar{2}, \bar{7}, \overline{12}, \overline{17}\}$;

$E_4 = \{\bar{3}, \bar{8}, \ \overline{13}, \overline{18}\}$;

$E_5 = \{\bar{4}, \bar{9}, \overline{14},, \overline{19}\}$.

Diberikan $X = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \overline{10}, \overline{12}, \overline{15}\}$, aproksimasi atas dan aproksimasi bawahnya sebagai berikut:

$\overline{R}(X) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{15}, \overline{16}, \overline{17}\}$

$\underline{R}(X) = E_1 = \{\bar{0}, \bar{5}, \overline{10}, \overline{15}\}$.

## 2.11 Himpunan *Rough*

Himpunan kesat (*rough set*) pertama kali diperkenalkan oleh Zdzislaw Pawlak pada tahun 1982. Dalam hal ini, himpunan *rough* digunakan dalam menangani masalah yang bersifat ketidakjelasan (*granularity*) dan ketidakpastian (*ambigulty*). Konsep dasar dari teori himpunan *rough* adalah aproksimasi atas (*upper approximation*) dan aproksimasi bawah (*lower approximation*). Setelah memahami Definisi 2.10.1 mengenai aproksimasi bawah dan aproksimasi atas, berikut diberikan definisi mengenai himpunan *rough*.

**Definisi 2.11.1** Misalkan $R$ adalah relasi ekuivalensi pada himpunan semesta $U$ dan pasangan $(U, R)$ adalah ruang aproksimasi. Suatu himpunan bagian $X \subseteq U$, jika $\overline{R}(X) - \underline{R}(X) \neq \emptyset$ maka $X$ disebut himpunan *rough* (Pawlak, 1982).

Berikut ini diberikan contoh himpunan *rough*.

**Contoh 2.11.2**

Berdasarkan Contoh 2.10.2, $\overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{16}, \overline{17}\} \neq \emptyset$, $X$ disebut himpunan *rough* di dalam ruang aproksimasi $(U, R)$.

## 2.12 Semigrup *Rough*

Setelah memahami definisi dari himpunan *rough*, berikut diberikan definisi dari semigrup *rough*.

**Definisi 2.12.1** Misalkan $(U, R)$ ruang aproksimasi dan operasi biner * yang didefinisikan pada $U$. Suatu himpunan bagian $S$ dari $U$ dikatakan semigrup *rough* dari ruang aproksimasi jika memenuhi kondisi berikut:
i. untuk setiap $x, y \in S, x * y \in \bar{R}(S)$
ii. untuk setiap $x$, $y$, $z \in S$, $(x * y) * z = x * (y * z) \in \bar{R}(S)$
(Bagirmaz dan Oscan, 2015).

Setelah memahami definisi dari semigrup *rough*, berikut diberikan definisi dari subsemigrup *rough*.

**Definisi 2.12.2** Misalkan $(U, R)$ ruang aproksimasi dan operasi biner $*$ yang didefinisikan pada $U$. Misalkan $S$ merupakan semigrup *rough* dan $H$ merupakan himpunan bagian tak kosong $S$. Himpunan $H$ disebut subsemigrup *rough* dari semigrup *rough* $S$, jika $x, y \in H$, $x * y \in \bar{R}(H)$, $HH \subseteq \bar{R}(H)$ (Bagirmaz dan Oscan, 2015).

## 2.13 Ideal *Rough* pada Semigrup *Rough*

Setelah memahami definisi dari semigrup *rough*, berikut diberikan definisi dari ideal *rough* pada semigrup *rough* yang menjadi topik inti dari penelitian ini.

**Definisi 2.13.1** Misalkan $(U, R)$ merupakan suatu ruang aproksimasi dan operasi biner * yang didefinisikan pada $U$. Suatu subhimpunan tak kosong $I$ dari semigrup *rough* $S$ dikatakan ideal *rough* kiri dari semigrup *rough* $S$ jika $SI \subseteq \bar{R}(I)$, ideal *rough* kanan dari semigrup *rough* $S$ jika $IS \subseteq \bar{R}(I)$ dan ideal *rough* dari semigrup *rough* $S$ jika merupakan ideal *rough* kiri sekaligus ideal *rough* kanan dari semigrup *rough* $S$ (Bagirmaz dan Oscan, 2015).

# III. METODOLOGI PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun 2022/2023, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur sebagai berikut:

1. studi literatur dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini,
2. mempelajari definisi dan teorema yang berkaitan dengan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam upaya mencapai tujuan dari penelitian ini disajikan dalam diagram sebagai berikut:

Berikut diberikan diagram metode penelitian.

Mempelajari aljabar abstrak yaitu : himpunan (Wibisono, 2008), semigrup (Whitelaw, 1978), dan ideal (Kuroki, 1997)
Mempelajari relasi ekuivalensi dan kelas ekuivalensi (Barnier and Feldman, 1990), ruang aproksimasi, aproksimasi atas dan aproksimasi bawah (Miao dkk., 2005)
Mempelajari himpunan *rough* (Pawlak, 1982), semigrup *rough* dan ideal *rough* (Bagirmaz dan Ozcan, 2015)

↓

**Tahap 1**

Mengkonstruksi semigrup *rough* dan subsemigrup *rough* komutatif pada himpunan berhingga

↓

**Tahap 2**

Menyelidiki sifat-sifat semigrup *rough*

↓

**Tahap 3**

Mengkonstruksi ideal *rough* pada semigrup *rough*

↓

**Tahap 4**

Menyelidiki sifat-sifat ideal *rough* pada semigrup *rough*

↓

**Tahap 5**

Menyelidiki kaitan ideal semigrup dan ideal *rough* pada semigrup *rough*

↓

**Tahap 6**

Membuat program untuk menentukan ideal *rough* pada semigrup *rough* menggunakan *phyton*

Gambar 3.1 Diagram Penelitian

# V. KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada Bab IV diperoleh bahwa pada teori semigrup *rough*, jika $S$ merupakan semigrup *rough* maka $I \subseteq S$ akan membentuk ideal *rough* pada semigrup *rough* ruang aproksimasi $(U, R)$ apabila dibentuk dengan operasi biner $*$ yang sama dengan $S$ dengan syarat-syarat yaitu untuk setiap $s \in S$, $i \in I$ dan $S, I \neq \emptyset$ haruslah $s * i \in \overline{R(I)}$ dan $i * s \in \overline{R(I)}$.

Berdasarkan pembahasan ideal *rough* pada semigrup *rough* yang telah dikontruksi sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa setiap ideal semigrup sudah pasti merupakan ideal *rough* pada semigrup *rough*, tetapi setiap ideal *rough* pada semigrup *rough* belum tentu merupakan ideal semigrup dan setiap ideal *rough* pada semigrup *rough* sudah pasti merupakan subsemigrup *rough*. Jika $I$ merupakan ideal *rough* pada semigrup *rough* $S$, diberikan $n$ ideal *rough* maka irisan dari setiap $n$ ideal *rough* yaitu $\bigcap_{i=1}^{n} I_i$ merupakan ideal *rough* pada ruang aproksimasi $(U, R)$ dengan syarat yaitu $\bigcap_{i=1}^{n} \bar{R}\,(I_i) = \bar{R}(\bigcap_{i=1}^{n} I_i)$.

Berdasarkan pembahasan *cartesian product* pada ideal *rough*, jika $S_1 \times S_2$ merupakan semigrup *rough* pada ruang aproksimasi $(U^2, R^2)$, $I_1$ ideal *rough* pada semigrup *rough* $S_1$ dan $I_2$ ideal *rough* pada semigrup *rough* $S_2$ pada ruang aproksimasi $(U, R)$, maka $I_1 \times I_2$ merupakan ideal *rough* pada semigrup *rough* $S_1 \times S_2$.

## 5.2 Saran

Berdasarkan hasil dan penelitian, dalam mengkontruksi ideal rough pada semigrup rough masih sedikit ditemukan sifat-sifatnya, tidak menutup kemungkinan masih terdapat sifat-sifat lain dari ideal *rough* pada semigrup *rough*. Selain itu, dalam mengkonstruksi ideal *rough* pada semigrup *rough* ke dalam contoh-contoh dapat menggunakan himpunan yang bersifat non-komutatif atau himpunan universal lain selain yang ada pada penelitian ini.

## DAFTAR PUSTAKA


Barnier, W., Feldman, N. 1990. *Introduction to Advanced Mathematics*. New Jersey: Prentice Hall, Inc.

Bagirmaz, N., Ozcan, A.F. 2015. Rough semigroups on approximation spaces, *International Journal of Algebra*. 9(7): 339-350.

Bonikowski, Z. 1994. *Algebraic structures of rough sets.* Workshops in Computing: Rough Sets, Fuzzy Sets and Knowledge Discovery. London: Springer.

Davvaz, B. 2004. Roughness in rings. *Information Sciences An International Journal*, 164(1-4), 147–163.

Dwiyanti, G.A., Fitriani, F., Faisol, A. 2023. The Implementation of A Rough Set of Projective Module. *Barekeng: Journal of Mathematics and Its Application.* 17(2) 735-744.

Gallian, J. A. 2010. *Contemporary Abstract Algebra Seventh Edition*. USA: Brooks Cole Cengage Learning.

Grzymala-Busse, J. W. 2005. *Rough Set Theory with Applications to Data Mining*. Studies in Fuzziness and Soft Computing: Real World Applications of Computational Intelligence, Vol 179. Berlin: Springer.

Hafifulloh, D., Fitriani, F., Faisol, A. 2022. The Properties of Rough V-Coexact Sequence in Rough Group. *Barekeng: Journal of Mathematics and Its Application.* 16(3): 1069-1078.

Herstein, I. N. 1975. *Topics in Algebra Second Edition*. New York: John Wiley & Sons.

Kuroki, N. 1997. Rough ideals in semigroups. *Information Sciences*, 100(1-4): 139–163.

Miao, D. Han, S. Li, D, & Sun, L. 2005. *Rough group, rough subgroup and their properties*. Lecture Notes in Computer Science: Lecture Notes in Artifical Intelegence Edition. Berlin: Springer.

Nugraha, A.A., Fitriani, F., Faisol, A. 2022. The Implementation of Rough Set on a Group Structure. *Jurnal Matematika MANTIK*. 8(1): 45-52.

Pawlak, Z. 1982. Rough Set. *International Journal of Computing and Information Sciences*. 11(5): 341-356.

Pawlak, Z. 2002. Rough sets and intelligent data analysis. *Information Sciences*. 147(1-4): 1–12.

Polkowski, L., Skowron, A. 1998. *Rough Sets and Current Trends in Computing.* Lecture Notes in Computer Science: Lecture Notes in Artificial Intelligence Edition, Vol 1424. Berlin: Springer.

Setiadji. 2009. *Himpunan Logika Samar serta Aplikasinya*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

Setyaningsih, N., Fitriani, F., Faisol, A. 2021. Sub-exact sequence of rough groups. *Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika*. 12(2): 267-272.

Sugita, Gandung dan Anggraini. 2020. *Buku Ajar Struktur Aljabar*. Yogyakarta: Penerbit Deepublish.

Suwilo, S., Tulus, Lubis, S. R. 1987. *Aljabar Abstrak Suatu Pengantar*. Medan: USU Press.

Thivagar, M.L., Richard, C., Paul, N.R. 2012. Mathematical Innovations of Modern Topology in Medical Events. *International Journal of Informations Science*. 2(4): 33-36.

Whitelaw, T. A. 1978. *An Introduction to Abstract Algebra*. Second Edition. Blakie Academic and Professional: Glasgow.

Wibisono, Samuel. 2008. *Matematika Diskrit (Edisi Kedua).* Yogyakarta: Graha Ilmu.