II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Distribusi Logistik

Distribusi logistik merupakan distribusi yang memiliki fungsi kepekatan peluang kontinu. Bentuk kurva distribusi logistik adalah simetris dan uni modal. Bentuk distribusi logistik mirip dengan distribusi normal. Perbedaan utama antara distribusi normal dan distribusi logistik terletak pada ekor dan fungsi tingkat kegagalan. Distribusi logistik memiliki ekor sedikit lebih panjang dibandingkan dengan distribusi normal. Fungsi kepekatan peluang distribusi logistik memiliki bentuk umum sebagai berikut :

Definisi 2.1

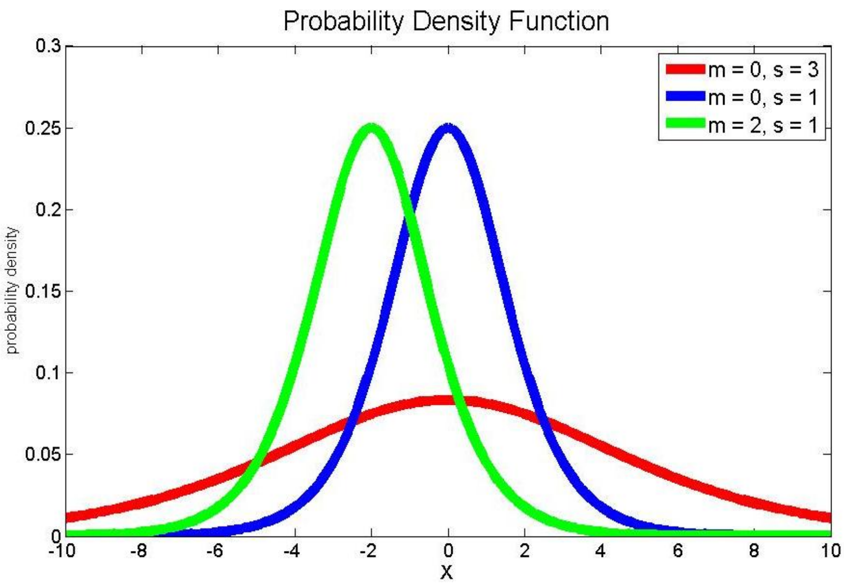
Suatu variabel acak X dikatakan memiliki distribusi logistik dengan parameter (μ, σ), jika fungsi kepekatan peluangnya didefinisikan sebagai berikut :

$$f(x; \mu, \sigma) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}}{\sigma\left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^2} \ ; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

Dengan parameter lokasi μ yang bersifat simetrik dan parameter skala σ. Sedangkan fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari distribusi logistik adalah

$$F(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{1 + e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} \ ; -\infty < x < \infty, -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0$$

Berdasarkan fungsi kepekatan peluang dari distribusi logistik umum dengan menggunakan program matlab, diperoleh bentuk kurva sebagai berikut :



Gambar 1. Grafik distribusi logistik umum

(Gupta dan Kundu, 2010).

Selanjutnya akan dijelaskan tentang distribusi *Generalized* Logistik Tipe IV yang menjadi pokok pembahasan yang akan dicari karakteristik penduga parameter dari distribusi ini.

2.2 Distribusi *Generalized* Logistik Tipe IV

Distribusi g*eneralized* logistik tipe IV merupakan perumuman dari distribusi logistik standar. Distribusi logistik standar diperoleh dari distribusi logistik umum dengan nilai $\mu = 0$ dan $\sigma = 1$ (standar baku) yang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2

Suatu variabel acak X dikatakan memiliki distribusi logistik standar jika dan hanya fungsi kepekatan peluangnya adalah :

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \ ; -\infty < x < \infty$$

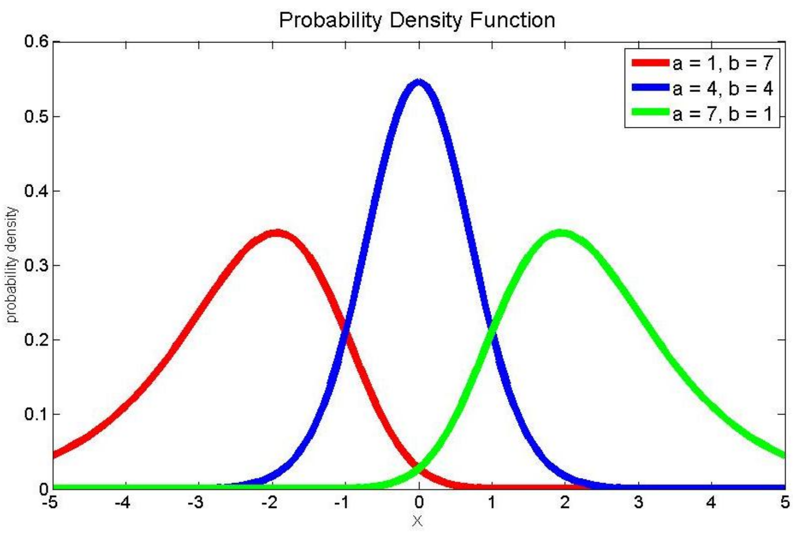
Dari distribusi logistik standar ini selanjutnya ditambahkan dua parameter bentuk (α, β) sehingga menjadi distribusi *generalized* logistik tipe IV yang didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.3

Suatu variabel acak X dikatakan memiliki distribusi *generalized* logistik tipe IV dengan parameter (α, β), jika fungsi kepekatan peluangnya adalah :

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} \frac{e^{-x\beta}}{(1+e^{-x})^{\alpha+\beta}} \ ; untuk \ \ \alpha > 0; \beta > 0, ; -\infty < x < \infty$$

Dalam hal ini α dan β merupakan parameter bentuk. Berdasarkan fungsi kepekatan peluang dari distribusi *generalized* logistik tipe IV dengan menggunakan program matlab, diperoleh bentuk kurva sebagai berikut :



Gambar 2. Grafik distribusi *generalized* logistik tipe IV

Dari gambar 2 dapat diketahui bahwa distribusi *generalized* logistik tipe IV memiliki bentuk yang simetrik jika $\alpha = \beta$, melenceng ke kanan (positively skewed) jika $\alpha > \beta$ dan melenceng ke kiri (negatively skewed) jika $\alpha < \beta$.

(Johnson, Kotz dan Balakrishnan, 1995).

2.2.1 Nilai Harapan Distribusi *Generalized* Logistik Tipe IV

Dalam teori distribusi jika fungsi pembangkit momen dari sebuah distribusi ada, maka mencari turunan ke-m dari fungsi pembangkit momen suatu distribusi tertentu sama saja dengan mencari ekspektasi ke-m dari distribusi tersebut. Ekspektasi ke-m dari suatu variabel acak X atau $E[X^m]$ disebut momen ke-m dari suatu distribusi atau momen ke-m dari X. Dalam Hogg dan Craig (1995) hubungan antara fungsi pembangkit momen dengan nilai harapan dinyatakan sebagai berikut :

$$M_x^m(t)|_{t=0} = E[X^m]$$

Dengan

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

Dan

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)\, dx$$

Selanjutnya akan dicari nilai harapan dari distribusi *generalized* logistik tipe IV melalui fungsi pembangkit momennya. Berdasarkan penelitian indriani (2014) fungsi pembangkit momen dari distribusi *generalized* logistik tipe IV diperoleh sebagai berikut :

$$M_x(t) = \frac{\Gamma(\alpha + t)\Gamma(\beta - t)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \tag{2.1}$$

Sehingga momen pertama dari distribusi *generalized* logistik tipe IV dapat dicari dengan menurunkan fungsi pembangkit momennya terhadap t dan mengevaluasinya pada saat $t = 0$ yaitu sebagai berikut :

$$M_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma(\alpha + t)\Gamma(\beta - t)]$$

Dengan menggunakan aturan hasil kali dalam mencari turunan yaitu

$$(f.g)'(x) = (f)'(x)(g)(x) + (f)(x)(g)'(x)$$

Sehingga diperoleh

$$M'_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma'(\alpha + t)(1)\Gamma(\beta - t) + \Gamma(\alpha + t)\Gamma'(\beta - t)(-1)]$$

$$M'_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma'(\alpha + t)\Gamma(\beta - t) - \Gamma(\alpha + t)\Gamma'(\beta - t)] \tag{2.2}$$

$$M'_x(t)|_{t=0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma'(\alpha)\Gamma(\beta) - \Gamma(\alpha)\Gamma'(\beta)] \tag{2.3}$$

Dengan demikian momen pertama atau $E[X]$ dari distribusi *generalized* logistik tipe IV dapat dituliskan sebagai berikut :

$$E(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\{\Gamma'(\alpha)\Gamma(\beta) - \Gamma(\alpha)\Gamma'(\beta)\}$$

$$E(X) = \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} \tag{2.4}$$

Karena $\psi(z) = \frac{\Gamma\prime(z)}{\Gamma(z)}$ (Abramowiths dan Stegun, 1972), akibatnya persamaan (2.4) dapat dituliskan sebagai berikut :

$$E(X) = \psi(\alpha) - \psi(\beta) \tag{2.5}$$

Sedangkan momen kedua dari distribusi *generalized* logistik tipe IV diperoleh dengan mencari turunan kedua fungsi pembangkit momennya terhadap t dan mengevaluasinya pada saat $t = 0$. Untuk mencari turunan kedua langkah yang dilakukan yaitu dengan menurunkan persamaan (2.2) terhadap t sebagai berikut :

$$M'_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma^1(\alpha+t)\Gamma(\beta-t) - \Gamma(\alpha+t)\Gamma^1(\beta-t)]$$

Dengan menggunakan aturan hasil kali dalam mencari turunan yaitu :

$$(f.g)'(x) = (f)'(x)(g)(x) + (f)(x)(g)'(x)$$

Sehingga diperoleh

$$M''_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\{[\Gamma''(\alpha+t)(1)\Gamma(\beta-t) + \Gamma'(\alpha+t)'(\beta-t)(-1)]$$
$$-[\Gamma'(\alpha+t)(1)\Gamma'(\beta-t) - \Gamma(\alpha+t)\Gamma''(\beta-t)(-1)]\}$$

$$M''_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma''(\alpha+t)\Gamma(\beta-t) - \Gamma'(\alpha+t)\Gamma'(\beta-t)$$
$$-\Gamma'(\alpha+t)\Gamma'(\beta-t) + \Gamma(\alpha+t)\Gamma''(\beta-t)]$$

$$M''_x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma''(\alpha+t)\Gamma(\beta-t) - 2\Gamma'(\alpha+t)\Gamma'(\beta-t)$$
$$+\Gamma(\alpha+t)\Gamma''(\beta-t)]$$

$$M''_x(t)|_{t=0} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma''(\alpha)\Gamma(\beta) - 2\Gamma'(\alpha)\Gamma'(\beta)+\Gamma(\alpha)\Gamma''(\beta)]$$

Dengan demikian momen kedua atau $E[X^2]$ dari distribusi *generalized* logistik tipe IV dapat dituliskan sebagai berikut :

$$E(X^2) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}[\Gamma''(\alpha)\Gamma(\beta) - 2\Gamma'(\alpha)\Gamma'(\beta)+\Gamma(\alpha)\Gamma''(\beta)]$$

$$E(X^2) = \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma''(\beta)}{\Gamma(\beta)} \tag{2.6}$$

2.2.2 Varian Distribusi *Generalized* Logistik Tipe IV

Dalam Hogg dan Craig (1995) jika varian dari suatu variabel acak X yang berditribusi tertentu ada, maka varian dari X atau dapat dituliskan sebagai Var(X) didefinisikan sebagai berikut :

$$Var\ (X) = E[(X-\mu)^2] \tag{2.7}$$

Atau dapat dituliskan dalam bentuk lain yaitu

$$Var\ (X) = E(X^2) - \mu^2 \tag{2.8}$$

Dengan $\mu = E(X)$ sehingga diperoleh

$$Var\ (X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 \tag{2.9}$$

Jadi varian dari distribusi *generalized* logistik tipe IV dapat dicari dengan mensubtitusikan persamaan (2.4) dan (2.6) ke persamaan (2.9) yaitu :

$$Var\ (X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

$$Var\ (X) = \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma''(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right)^2$$

$$Var\ (X) = \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma''(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)^2 + 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right)^2$$

$$Var\ (X) = \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} + \frac{\Gamma''(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \left(\frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)'\right) + 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \left(\frac{\Gamma''(\beta)}{\Gamma(\beta)} - \left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right)'\right)$$

$$Var\ (X) = \left(\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right)' + \left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right)'$$

$$Var\ (X) = \psi'(\alpha) + \psi'(\beta) \tag{2.10}$$

Selanjutnya akan dijelaskan tentang metode yang akan digunakan untuk menduga parameter distribusi *generalized* logistik tipe IV.

2.3 Metode *Generalized Moment*

Metode *generalized moments* merupakan bentuk perumuman dari *Method of Moment* yang dikembangkan oleh Lars Peter Hansen pada tahun 1982. Untuk menduga parameter dari suatu distribusi, studi oleh Rasmussen (2001), dan oleh Ashkar dan Mahdi (2003), menggunakan bentuk PWM :

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_0^1 x^l [F(x)]^r \, dF \qquad (2.1)$$

atau

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l [F(x)]^r f(x) dx \qquad (2.2)$$

Jika invers dari F(x) dapat dievaluasi secara analitik maka formulasi pendugaan dicari mengunakan persamaan (2.1). Dimana x adalah invers dari distribusi kumulatif F(x), *l* merupakan moment ke-*l* dan r adalah statistik tataan ke-r+1. $M_{l,r}$ ini bertindak sebagai suatu dasar untuk menerapkan metode *generalized moment*.

Baik pada metode pendugaan PWM, GMM dan GPWM jika invers dari F(x) tidak dapat dievaluasi secara analitik (tidak ada) maka formulasi pendugaan dicari mengunakan persamaan (2.2). Dengan x adalah variabel acak dari distribusi kontinu yang akan diduga, F(x) merupakan fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari x, dan f(x) adalah fungsi kepekatan peluang (pdf) dari x.

Pada metode pendugaan PWM r dipilih bilangan bulat non-negatif dan sekecil mungkin, sedangkan pada GPWM r diambil tidak harus kecil dan bilangan bulat non-negatif. Selain itu, baik pada metode pendugaan PWM maupun GPWM order lebih dari satu "harus dihindari" sehingga membatasi *l* yang dipilih yaitu sama dengan 1 ($l = 1$). Sebaliknya pada metode *generalized moment*, order *moment* yang berbeda dari 1 dilibatkan. Sehingga pada metode *generalized moment r* diambil sama dengan nol dan *l* tidak harus bilangan bulat maupun positif (Ashkar dan Mahdi, 2006).

2.4 Penduga Parameter

Statistika inferensia adalah cabang ilmu pengetahuan statistika yang mempelajari tentang proses pengambilan keputusan tentang parameter berdasarkan suatu statistik. Kajian statistika inferensia mencakup pengujian hipotesis dan pendugaan parameter. Secara umum pendugaan parameter digolongkan menjadi dua yaitu pendugaan titik dan pendugaan selang. Berkaitan dengan pendugaan titik, berikut ini definisikan yang dimaksud dengan penduga parameter.

Definisi 2.4

Misal $X_1, X_2, \ldots, X_n$ berdistribusi bebas stokastik identik dengan fungsi kepekatan peluang f(x;θ), $\theta \in \Omega$. Suatu statistik $u(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \hat{\theta}$ yang digunakan untuk menduga θ disebut sebagai penduga bagi θ, (Hoog and Craig, 1995).

Berkaitan dengan pendugaan parameter menggunakan metode *generalized moment*, akan dijelaskan beberapa sifat penduga sebagai berikut :

2.4.1 Penduga Tak Bias (*Unbiasness*)

Ketakbiasan merupakan sifat yang diinginkan dari penduga yang “baik” yaitu nilai dugaan parameter diharapkan sama dengan nilai parameter yang sebenarnya.

Definisi 2.5

Penduga titik $\hat{\theta}$ disebut penduga yang tak bias dari sebuah parameter θ jika $\mathrm{E}(\hat{\theta}) = \theta$ untuk semua kemungkinan nilai θ. Selain itu, $\hat{\theta}$ disebut penduga yang bias. Selanjutnya bias $\hat{\theta}$ diberikan oleh

$$B = E(\hat{\theta}) - \theta$$

Jadi, penduga yang tak bias adalah penduga yang memiliki bias sama dengan 0 untuk setiap nilai θ. Bias terjadi ketika sampel tidak mewakili populasi secara akurat dari sampel yang telah diambil (Ramachandran and Tsokos, 2009).

2.4.2 Penduga Varians Minimum (*Variance Minimum*)

Karakteristik penduga parameter yang “baik” selain tak bias juga memiliki varians minimum. Berikut ini didefinisikan yang dimaksud dengan penduga yang memiliki varians minimum.

Definisi 2.6

Penduga tak bias $\hat{\theta}_0$ disebut sebagai penduga tak bias beragam minimum seragam (UMVUE) bagi parameter θ jika untuk sebarang $\hat{\theta}$ sebagai penduga tak bias lainnya dari θ

$$Var\ (\hat{\theta}_0) \leq Var\ (\theta)$$

Untuk setiap $\theta \in \Omega$ (Ramachandran and Tsokos, 2009).

Untuk mencari penduga parameter yang bersifat UMVUE tidak selalu mudah. Oleh karena itu, dapat digunakan pertidaksamaan Cramer Rao-Lower Bound untuk menentukan apakah penduga yang diperoleh merupakan penduga yang bersifat UMVU. Berikut ini akan dijelaskan beberapa istilah yang berkaitan dengan pertidaksamaan Cramer Rao-Lower Bound.

2.4.2.1 Informasi Fisher

Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi yang mempunya fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$. Sehingga fungsi kemungkinan dari fkp tersebut dapat dituliskan sebagai berikut :

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)f(x_2;\theta)\dots f(x_n;\theta)$$

Jika fungsi kemungkinan dari fkp tersebut diberikan fungsi logaritma, maka diperoleh :

$$\ln L(\theta) = \ln f(x_1;\theta) + \ln f(x_2;\theta) + \cdots + \ln f(x_n;\theta)$$

Turunan pertama dan kedua dari logaritma fungsi kemungkinan dari fkp diperoleh sebagai berikut :

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln f(x_1;\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial f(x_2;\theta)}{\partial\theta} + \cdots + \frac{\partial f(x_n;\theta)}{\partial\theta}$$

dan

$$\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2} = \frac{\partial^2 \ln f(x_1;\theta)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 f(x_2;\theta)}{\partial\theta^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f(x_n;\theta)}{\partial\theta^2}$$

Dalam hogg dan craig (1995) informasi fisher information dinotasikan $I(\theta)$ dengan

$$I(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2 f(x;\theta)\,dx = E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

Selain itu, $I(\theta)$dapat dihitung dengan

$$I(\theta) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2} f(x;\theta)\, dx = -E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta)}{\partial\theta^2}\right]$$

Dengan demikian didefinisikan informasi fisher dalam sampel acak sebagai

$$I_n(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} = nE\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}$$

2.4.2.2 Matriks informasi fisher

Pada kasus multivariat, jika θ merupakan suatu vektor dari parameter, maka $I(\theta)$adalah matriks informasi fisher. Misalkan $X_1, X_2, \dots, X_n$ dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta_1,\theta_2)(\theta_1,\theta_2) \in \Omega$, dengan syarat keteraturannya ada. Tanpa menggambarkan syaratnya secara detail, misalkan ruang dari X dimana $f(x;\theta_1,\theta_2) > 0$ tidak melibatkan θ_1 dan θ_2, serta dapat diturunkan dibawah integral. Jadi, matriks informasi fisher dapat dituliskan sebagai berikut :

$$I_n = n\begin{bmatrix} E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\right]^2\right\} & E\left\{\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right\} \\ E\left\{\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1}\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right\} & E\left\{\left[\frac{\partial lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}$$

$$I_n = -n\begin{bmatrix} E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1^2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] \\ E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_1\partial\theta_2}\right] & E\left[\frac{\partial^2 lnf(x;\theta_1,\theta_2)}{\partial\theta_2^2}\right] \end{bmatrix}$$

(Hogg dan Craig, 1995).

2.4.2.3 Batas Bawah Roa-Cramer

Jika $\hat{\theta} = u(X_1, X_2, \dots, X_n)$ adalah penduga tak bias bagi parameter θ maka pertidaksamaan Rao-Cramer dapat ditulis sebagai berikut :

$$Var\ (\hat{\theta}) \geq \frac{[k'(\theta)]^2}{n\ E\left\{\left[\frac{\partial ln f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\}} = \frac{[k'(\theta)]^2}{n\ I(\theta)}$$

jika $k(\theta) = \theta$ maka

$$Var\ (\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n\ I(\theta)}$$

Dengan $n\ I(\theta) = I_n(\theta)$ dan $\frac{1}{n\ I(\theta)}$ disebut dengan batas bawah Rao-Cramer.

Definisi 2.7

Misal $\hat{\theta}$ penduga tak bias bagi parameter θ pada pendugaan titik. Statistik $\hat{\theta}$ disebut penduga yang efesien bagi θ jika dan hanya jika ragam dari $\hat{\theta}$ mencapai batas bawah Rao-Cramer (Hoog dan Craig, 1995).

2.4.3 Penduga Konsisten (*Consistency*)

Suatu penduga parameter dikatakan konsisten jika nilai dugaan parameter akan dekat dengan nilai parameter yang sebenarnya ketika ukuran sampel yang diambil semakin besar.

Definisi 2.7

Sebarang statistik yang konvergen dalam peluang ke parameter θ disebut penduga yang konsisten bagi θ.

(Hoog dan Craig, 1995).

Sedangkan yang dimaksud konvergen dalam peluang didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.8

Barisan dari variabel acak $X_1, X_2, X_3, \ldots$ kovergen dalam peluang ke variabel acak X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\hat{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Atau ekuivalen dengan

$$\lim_{n\to\infty} P\left[|\hat{\theta} - \theta| \geq \varepsilon\right] = 0$$

(Hoog dan Craig, 1995).

Berikut ini diberikan teorema pendukung yang berkaitan dengan pengujian sifat konsisten penduga parameter.

Teorema 2.1 (Ketaksamaan Markov)

Jika X peubah acak dengan pdf $f(x)$ dan $u(x)$ fungsi real non-negtif, maka untuk setiap konstanta positif $c > 0$,

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Bukti :

Misalkan $A = \{x; u(x) \geq c\}$ dan $A \cup \bar{A} = D$= ruang sampel

Maka

$$E[u(X)] = \int_D u(x)f(x)\,dx = \int_A u(x)f(x)\,dx + \int_{\bar{A}} u(x)f(x)\,dx$$

Karena $u(x) \geq 0$ dan $f(x) \geq 0$ maka haruslah $\int_{\bar{A}} u(x)f(x)\,dx \geq 0$

Dengan demikian

$$E[u(X)] \geq \int_A u(x)f(x)\,dx$$

Akan tetapi $A = \{x; u(x) \geq c\}$ sehingga

$$E[u(X)] \geq c \int_A f(x)\,dx = c\,.P(X \in A) = c\,.P(u(x) \geq c)$$

Jadi diperoleh

$$P[u(X) \geq c] \leq \frac{E[u(X)]}{c}$$

Terbukti■

Teorema 2.2 (*Chebychev Inequality*)

Jika x peubah acak dengan mean μ dan varian berhingga $\sigma^2 < \infty$ maka untuk setiap $k > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Atau ekuivalen dengan

$$P(|X - E(X)| < k\sigma) \leq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dan jika dimisalkan $\varepsilon = k\sigma$ maka

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad untuk\ \forall\ \varepsilon > 0$$

Atau ekuivalen dengan

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq 1 - \frac{Var(X)}{\varepsilon^2} \quad untuk\ \forall\ \varepsilon > 0$$

(Bain and Engelhardt, 1992).

Bukti :

Misalkan $u(X) = (X - \mu)^2$ dan $c = k^2\sigma^2$; $k > 0$

Dengan menggunakan *Markov Inequality*

$$P((X-\mu)^2 \geq k^2\sigma^2) \leq \frac{E(X-\mu)^2}{k^2\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{k^2\sigma^2} = \frac{1}{k^2}$$

Atau dapat ditulis dengan

$$P(|X - E(X)| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Terbukti ■

2.5 Varian-KovarianAsimtotik Penduga Parameter dari Metode ***Generalized Moment***

Berdasarkan Ashkar dan Mahdi (2006) varian dan kovarian asimtotik dari penduga parameter $\hat{\alpha}$ dan $\hat{\beta}$ yang diperoleh menggunakan metode *generalized moment,* dapat dihitung dari varian dan kovarian momen sampel $\widehat{M}_{l_1,0}$ dan $\widehat{M}_{l_2,0}$ sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} Var(\hat{\alpha}) \\ Var(\hat{\beta}) \\ Cov(\hat{\alpha},\hat{\beta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^2 & M_{12}^2 & 2M_{11}M_{12} \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 & 2M_{21}M_{22} \\ M_{11}M_{21} & M_{12}M_{22} & M_{11}M_{22} + M_{21}M_{12} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} Var(\widehat{M}_{l_1,0}) \\ Var(\widehat{M}_{2,0}) \\ Cov(\widehat{M}_{l_1,0,}\widehat{M}_{l_2,0}) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Atau

$$\boldsymbol{V}_{\hat{\theta}} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{V}_{\widehat{M}_{l_i,0}}$$

Dengan :

$$M_{11} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \alpha}\ , \qquad M_{12} = \frac{\partial M_{l_1,0}}{\partial \beta}\ , \qquad M_{21} = \frac{\partial M_{l_2,0}}{\partial \alpha} \qquad dan \quad M_{22} = \frac{\partial M_{l_2,0}}{\partial \beta}$$

$$Var(\widehat{M}_{l_1,0}) = \frac{1}{n}\left[M_{2l_1,0} - M_{l_1,0}^2\right], \qquad Var(\widehat{M}_{l_2,0}) = \frac{1}{n}\left[M_{2l_2,0} - M_{l_2,0}^2\right]$$

dan $Cov(\widehat{M}_{l_1,0}, \widehat{M}_{l_2,0}) = \frac{1}{n}\left[M_{l_1+l_2,0} - M_{l_1,0}M_{l_2,0}\right]$