# GRAF IDENTITAS DARI RING $\mathbb{Z}_p$, DENGAN $p$ BILANGAN PRIMA

**(Skripsi)**

**Oleh**

**M. NORICK ALI MAGHFIRATTI**
**1917031084**

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**
**BANDAR LAMPUNG**
**2023**

## ABSTRACT

**IDENTITY GRAPH OF RING $\mathbb{Z}_p$, WHERE $p$ IS A PRIME NUMBER**

**By**

**M. Norick Ali Maghfiratti**

The ring is an algebraic structure consisting of a set and two binary operations, addition, and multiplication, fulfilling certain axioms. Since $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle$ is a ring, $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p \rangle$, where $p$ is a prime, is also a ring. A simple graph $S$ consists of a finite set that is not empty $V(S)$ called vertices, a finite set $E(S)$ That connects two elements of $V(S)$ called edges. The adjacent rule can make the identity graph $\langle G, * \rangle$ if $x, y \in G, x * y = e$, then $x$ is adjacent to $y$. It is assumed that $e$ is adjacent to $G$. The identity graph of the ring $\mathbb{Z}_p$, with $p \geq 7$ a prime number, is formed from a complete graph $K_2$, null graph $N_1$, and windmill graph $W_3^{\frac{p-3}{2}}$. In contrast, $p = \{2, 3, 5\}$ will have different patterns.



**Keywords**: *Ring, Group, Semigroup, Graph, Identity Graph.*

## ABSTRAK

## GRAF IDENTITAS DARI RING $\mathbb{Z}_p$, DENGAN $p$ BILANGAN PRIMA


**Oleh**

**M. Norick Ali Maghfiratti**



Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan struktur aljabar yang terdiri dari suatu himpunan beserta dua operasi biner yaitu penjumlahan dan perkalian serta memenuhi aksioma-aksioma tertentu. Karena $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle$ merupakan ring, $\langle \mathbb{Z}_p, +_p, \cdot_p \rangle$, dengan $p$ bilangan prima juga merupakan ring. Graf sederhana $S$ terdiri atas himpunan berhingga yang tak kosong $V(S)$ yang dinamakan titik (*vertices*) dan himpunan berhingga $E(S)$ yang menghubungkan dua elemen $V(S)$ dinamakan sisi (*edge*). Graf identitas dari $\langle G, * \rangle$ dapat dibuat dengan aturan ketetanggaan, jika $x, y \in G, x * y = e$, maka $x$ bertetangga dengan $y$. Diasumsikan bahwa $e$ bertetangga dengan semua unsur $G$. Graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p \geq 7$ bilangan prima terbentuk dari graf lengkap $K_2$, graf null $N_1$, dan graf kincir $W_3^{\frac{p-3}{2}}$. Sedangkan untuk $p = \{2, 3, 5\}$ akan memiliki pola yang berbeda.

**Kata Kunci**: *Grup, semigrup, ring, graf, graf pembagi nol, graf identitas.*

# GRAF IDENTITAS DARI RING $\mathbb{Z}_p$, DENGAN $p$ BILANGAN PRIMA

**Oleh**

**M. NORICK ALI MAGHFIRATTI**

**Skripsi**

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam

**JURUSAN MATEMATIKA**
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**
**UNIVERSITAS LAMPUNG**

**BANDAR LAMPUNG**
**2023**

| | |
|---|---|
| Judul Skripsi | : **GRAF IDENTITAS DARI RING $\mathbb{Z}_p$, DENGAN $p$ BILANGAN PRIMA** |
| Nama Mahasiswa | : ***M. Norick Ali Maghfiratti*** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **1917031084** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Fakultas | : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam** |

**MENYETUJUI**

1. Komisi Pembimbing

**Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.**
NIP. 198002062003121003

**Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.**
NIP. 198406272006042001

2. Ketua Jurusan Matematika FMIPA

**Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.**
NIP. 197403162005011001

**MENGESAHKAN**

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ……………

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ……………

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ……………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

**Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.**
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **06 Juni 2023**

## PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini :

| | |
|---|---|
| Nama | : **M. Norick Ali Maghfiratti** |
| Nomor Pokok Mahasiswa | : **1917031084** |
| Jurusan | : **Matematika** |
| Judul Skripsi | : **Graf Identitas dari Ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p$ Bilangan Prima** |

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 06 Juni 2023

Yang Menyatakan,

**M. Norick Ali Maghfiratti**

## RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap M. Norick Ali Maghfiratti yang lahir di Kota Bandar Lampung pada tanggal 28 November 2000. Penulis merupakan anak satu – satunya yang terlahir dari pasangan Bambang Hendarwan dan Rizza Arlena.

Penulis menempuh awal pendidikan di TK Diniyyah Putri Lampung pada tahun 2005 sampai tahun 2007. Kemudian, penulis melanjutkan pendidikan di SD Diniyyah Putri Lampung pada tahun 2007 sampai tahun 2013. Selanjutnya, penulis melanjutkan pendidikan di SMP Ar Raihan pada tahun 2013 sampai tahun 2016. Penulis menempuh pendidikan di SMA Ar Raihan pada tahun 2016 sampai tahun 2019.

Pada tahun 2019, penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN). Penulis aktif mengikuti kegiatan di dalam maupun luar kampus dan dipercaya menjadi Kepala Bidang Akademik Rois FMIPA Unila pada tahun 2020, Kepala BSO BBQ Rois FMIPA Unila pada tahun 2021, dan menjadi Wakil Ketua Dewan Perwakilan Mahasiswa FMIPA Unila pada tahun 2022.

Pada awal tahun 2022, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa/Kelurahan Bumi Waras Kecamatan Bumi Waras Kota Bandar Lampung. Kemudian pada pertengahan tahun 2022, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Badan Pusat Statistik (BPS) Provinsi Lampung.

## KATA INSPIRASI

"Waspadalah terhadap kebanggaan, sebab kalian akan kembali ke tanah dan tubuhmu akan dimakan oleh cacing."
**(Abu Bakar Ash-Shiddiq)**

"Hatiku tenang karena mengetahui bahwa apa yang melewatkanku tidak akan pernah menjadi takdirku dan apa yang ditakdirkan untukku tidak akan pernah melewatkanku"
**(Umar bin Khattab)**

"Belajarlah dari pengalaman generasi sebelum kalian. Bersungguh-sungguhlah dan jangan melupakan agar kalian tidak dilupakan"
**(Utsman bin Affan)**

"Tiada kekayaan yang lebih utama daripada akal, tiada keadaan yang lebih menyedihkan daripada kebodohan, dan tiada warisan yang lebih baik daripada pendidikan"
**(Ali bin Abi Thalib)**

## PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil"alamin

Dengan mengucapkan puji dan syukur atas kehadirat Allah Subhanahu Wata"alakarena limpahan nikmat dan karunia-Nya sehingga skripsi ini dapat diselesaikan.

Tak lupa shalawat beserta salam selalu tercurah kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu Alaihi Wasallam.

Dengan penuh syukur dan ketulusan, kupersembahkan karya sederhana ini untuk:

**Keluarga Tercinta**

Terima kasih kepada Ayah dan Ibu atas semua doa dan dukunganyang senantiasa diberikan kepadaku.

**Dosen Pembimbing dan Pembahas**

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah sangat berjasa dalam membantu, memberi masukan dan arahan, serta ilmu yang sangat bermanfaat.

**Sahabat-sahabatku**

Terima kasih kepada sahabat-sahabatku atas semua doa, dukungan, kebahagiaan,canda dan tawa yang telah menyertai dalam setiap langkahku.

**Almamater Tercinta Universitas Lampung**

# SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT karena berkat rahmat dan karunia-Nya penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul "**Graf Identitas dari Ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p$ Bilangan Prima**" dengan baik dan lancar serta tepat pada waktu yang ditargetkan.

Dalam penyusunan skripsi ini, banyak sekali pihak yang telah membantu penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, semangat, motivasi dan saran yang membangun. Pada kesempatan ini penulis menyampaikan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT atas segala nikmatnya yang telah diberikan sehingga penulis bisa beraktifitas dengan baik dan lancar.
2. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing I yang telah memberikan arahan, saran dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
3. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen Pembimbing II sekaligus dosen Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan, saran dan bimbingan dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Alm. Amanto, S.Si, M.Si. dan Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si selaku dosen Penguji yang telah memberikan kritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis agar dapat menjadi lebih baik lagi.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universita Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Guru TK, SD, SMP dan SMA yang telah mengajarkan, membimbing, sampai bisa menduduki bangku perkuliahan.
8. Ayah dan ibu mendoakan dan mendukung penulis.
9. Triya, Lutfi, Lathoif, Fikri, Ikhsan, Azza, dan Anggota DPM FMIPA 2022, serta sahabat penulis yang selalu menemani suka maupun duka.

Semoga Allah SWT melimpahkan karunia-Nya dan memberikan kemudahan serta kebaikan kepada pihak-pihak yang telah membantu penulis. Penulis menyadari sepenuhnya bahwa skripsi ini masih memiliki banyak kekurangan baik dari segi materi maupun teknisnya. Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi para pembacanya.

Bandar Lampung, 06 Juni 2023

Penulis,

M. Norick Ali Maghfiratti

## DAFTAR ISI

Halaman

## DAFTAR GAMBAR

Halaman

## DAFTAR TABEL

Halaman

# I. PENDAHULUAN

## 1.1 Latar Belakang

Teori graf pertama kali dikemukakan oleh matematikawan Swiss yang bernama Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam upayanya untuk menyelesaikan masalah Jembatan Konigsberg yang pada saat itu sangat terkenal di eropa. Masalah Jembatan Konigsberg merupakan mungkin tidaknya mungkin tidaknya seseorang berjalan tepat satu kali melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Konigsberg dan kembali lagi ke titik awal. Euler memisalkan daratan dengan titik (*vertex*) dan jembatan merupakan garis (*edge*) sehingga disimpulkan bahwa tidak mungkin seseorang berjalan tepat satu kali melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Konigsberg dan kembali lagi ke titik awal.

Ring $\langle R,+,\cdot\rangle$ merupakan himpunan bersama dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ (Fraleigh, 2014). Menurut Adkins dan Weintraub pada tahun 1995 $\langle R,+\rangle$ merupakan grup komutatif, $\langle R,\cdot\rangle$ tertutup dan asosiatif, dan berlaku distributif kanan dan kiri.

Pada penelitian sebelumnya, pada tahun 2020 Augustin dan Welyyanti berhasil menentukan bentuk umum graf identitas dari grup $\mathbb{Z}_n$ terhadap operasi penjumlahan modulo $n$ $(+_n)$. Pada penelitian tersebut didefinisikan bahwa $\bar{0}$ bertetangga dengan semua anggota $\mathbb{Z}_n$ dan untuk setiap $x, y \in \mathbb{Z}_n$ jika $x +_n y = \bar{0}$, maka $x$ dan $y$ bertetangga.

Jika himpunan $\mathbb{Z}_n$ tersebut diberikan operasi biner perkalian modulo, maka $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle$ merupakan ring karena memenuhi aksioma – aksioma ring. Dengan cara yang sama seperti penelitian sebelumnya dapat dibuat graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_n$ terhadap operasi perkalian modulo $n$ karena $\langle \mathbb{Z}_n, \cdot_n \rangle$ merupakan semigrup.

Mengonstruksi graf identitas dari ring $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle$ lebih sulit dibandingkan dengan yang sudah dilakukan Augustin dan Welyyanti pada tahun 2020 karena terdapat graf pembagi nol yang membuat $e$ dalam hal ini merupakan $(\bar{1})$ tidak bertetangga dengan beberapa elemen dari ring $\langle \mathbb{Z}_n, +_n, \cdot_n \rangle$ pada graf identitasnya. Untuk setiap $\mathbb{Z}_p$ semigrup dalam operasi perkalian modulo $p$, dengan $p$ merupakan bilangan prima. Graf pembagi nol tidak memiliki sisi (*edge*) (Kandasamy & Smarandache, 2009). Oleh karena itu, jika hanya dibatasi pada ring $\mathbb{Z}_p$ proses konstruksi dari graf identitas akan menjadi lebih mudah. Hal ini yang membuat peneliti tertarik untuk meneliti graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$.

## 1.2 Tujuan penelitian

Tujuan dari penelitian ini merupakan untuk mengidentifikasi bentuk umum dari suatu graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p$ bilangan prima.

## 1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat yang diharapkan dari penelitian ini merupakan menambah ilmu pengetahuan bagi penulis dan pembaca mengenai graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p$ bilangan prima.

# II. TINJAUAN PUSTAKA

## 2.1 Himpunan

Himpunan awalnya dikembangkan oleh seorang matematikawan berkebangsaan Jerman yang bernama George Cantor (1845-1918). Himpunan merupakan konsep dari semua cabang matematika. Himpunan dapat didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.1.1** Himpunan merupakan kumpukan objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*) (Devlin, 2004).

Himpunan biasanya memiliki anggota himpunan yang disebut elemen. Tetapi, ada juga himpunan yang tidak memiliki elemen. Oleh karena itu, akan dijelaskan definisi mengenai himpunan kosong.

**Definisi 2.1.2** Himpunan yang tidak memiliki elemen disebut himpunan kosong (*null set*) yang dinotasikan dengan huruf Scandinavian Ø (Devlin, 2004).

Berdasarkan Definisi 2.1.2, Ø merupakan himpunan yang tidak memiliki elemen. Artinya Ø berbeda dengan {Ø}, karena {Ø} merupakan himpunan yang memiliki tepat satu anggota yaitu himpunan kosong sehingga $\{\emptyset\} \neq \emptyset$.

Sangat dimungkinkan untuk suatu elemen dari himpunan menjadi anggota himpunan lainnya. Bahkan bisa juga seluruh anggota dari suatu himpunan juga merupakan anggota himpunan lainnya, sehingga himpunan tersebut akan dinamakan himpunan bagian (*subset*).

**Definisi 2.1.3** Himpunan $A$ disebut himpunan bagian (*subset*) dari $B$ jika dan hanya jika setiap elemen himpunan $A$ merupakan elemen himpunan $B$, dinotasikan dengan $A \subseteq B$ (Devlin, 2004).

Untuk menunjukan bahwa himpunan $A = B$ dapat dilakukan dengan menunjukan dua hal yaitu:

1. $A \subseteq B$;
2. $B \subseteq A$.

Himpunan juga bisa saling dipasangkan. Perlu diingat bahwa pasangan dari suatu himpunan harus berurut karena belum tentu jika urutannya diubah, maka hasilnya akan sama. Himpunan pasangan berurut biasa disebut perkalian kartesian.

**Definisi 2.1.4** Diberikan himpunan $A$ dan $B$. Himpunan $A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$ merupakan perkalian kartesian dari himpunan $A$ dan $B$ (Fraleigh, 2014).

**Contoh 2.1.5**

Misalkan $A = \{1,2,3\}$ dan $B = \{4,5\}$, diperoleh $A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\}$.

Perkalian kartesian merupakan dasar dari relasi dalam konsep himpunan, diawal sudah dibahas himpunan merupakan konsep dari semua cabang matematika salah satu alasannya merupakan karena konsep relasi dalam himpunan.

**Definisi 2.1.6** Relasi antara himpunan $A$ dan $B$ merupakan himpunan bagian $\Re$ dari $A \times B$. Himpunan berurut $(a, b) \in \Re$ dapat ditulis dengan cara "$a$ berelasi dengan $b$" atau $a\Re b$ (Fraleigh, 2014).

Dari konsep relasi ini akan dapat dibentuk bentuk khusus dari suatu relasi yaitu fungsi. Fungsi merupakan relasi yang memenuhi dua aksioma fungsi.

**Definisi 2.1.7** Misalkan himpunan $A$ dan $B$ merupakan himpunan tidak kosong. Fungsi $f$ dari $A$ ke $B$ merupakan relasi dari $A$ ke $B$ yang memenuhi

1. Setiap anggota dari himpunan $A$ harus berelasi dengan anggota himpunan $B$.
2. Jika $(x, y) \in f$ dan $(x, z) \in f$, maka $y = z$ (Devlin, 2004).

## 2.2 Operasi Biner

Di dalam matematika terdapat operasi penjumlahan, perkalian, dan yang lainnya pada suatu bilangan. Operasi tersebut menggabungkan dua elemen dari himpunan yang sama untuk menghasilkan elemen yang lain. Oleh karena itu, operasi tersebut disebut dengan operasi biner. Operasi biner lebih di deskripsikan secara general sebagai fungsi dibanding suatu aturan.

**Definisi 2.2.1** Operasi biner $*$ pada himpunan $S$ merupakan fungsi yang memetakan $S \times S$ ke $S$. Untuk setiap $(a, b) \in S \times S$ elemen $*\big((a, b)\big) \in S$ biasa ditulis dengan $a * b$ (Fraleigh, 2014).

Untuk memperjelas Definisi 2.2.1 akan ditunjukan beberapa contoh dari operasi biner pada himpunan.

**Contoh 2.2.2**

Operasi penjumlahan $(+)$ merupakan operasi biner dari himpunan $\mathbb{R}$.

**Contoh 2.2.3**

Himpunan $M(\mathbb{R})$ merupakan matriks dengan setiap entri – entrinya merupakan himpunan $\mathbb{R}$. Operasi penjumlahan matriks $(+)$ bukan operasi biner karena misal $A, B \in M(\mathbb{R})$, $A + B$ belum tentu *well defined* karena jumlah kolom dan baris dari pasangan berurut $A$ dan $B$ belum tentu sama.

**Contoh 2.2.4**

Himpunan $M_{3\times3}(\mathbb{R})$ merupakan matriks dengan setiap entri – entrinya merupakan himpunan $\mathbb{R}$ dengan ordo $3 \times 3$. Operasi penjumlahan matriks $(+)$ merupakan operasi biner karena misal sembarang $A, B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, maka $A + B \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$

Berdasarkan Contoh 2.2.4 diketahui tidak semua operasi biner berlaku disuatu himpunan. Artinya penentuan operasi biner pada suatu himpunan harus dilakukan dengan teliti. Selain itu, harus juga diperhatikan apakah operasi biner tersebut tertutup pada himpunannya.

**Definisi 2.2.5** Misalkan $*$ merupakan operasi biner pada $S$ dan $H$ merupakan himpunan bagian dari $S$. Himpunan $H$ tertutup terhadap $*$ jika dan hanya jika $a, b \in H$, $a * b \in H$ (Fraleigh, 2014).

**Contoh 2.2.6**

Telah diketahui operasi penjumlahan $(+)$ merupakan operasi biner dari himpunan $\mathbb{R}$. Sedangkan operasi penjumlahan $(+)$ bukan operasi biner pada bilangan rill nonzero $\mathbb{R}^*$ karena $4 \in \mathbb{R}^*$ dan $-4 \in \mathbb{R}^*$, tapi $4 + (-4) = 0$ padahal $0 \notin \mathbb{R}^*$
Berdasarkan Contoh 2.2.5 diketahui bahwa jika suatu himpunan memiliki operasi biner $*$, maka belum tentu himpunan bagiannya tertutup atas operasi biner $*$ tersebut. Oleh karena itu, perlu dipastikan jika $H$ merupakan himpunan bagian dari $S$ apakah operasi biner $*$ tertutup terhadap $H$.

**Contoh 2.2.7**

Operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian $(.)$ merupakan operasi biner pada himpunan $\mathbb{Z}$, dan $S = \{n^2 | n \in \mathbb{Z}^+\}$. $S$ tidak tertutup terhadap operasi penjumlahan $(+)$ karena $2^2 = 4$ dan $5^2 = 25$ padahal $4 + 25 = 29 \notin S$. Tetapi, $S$ tertutup terhadap operasi perkalian $(.)$ karena misal $a, b \in S$ berarti terdapat $p, q \in \mathbb{Z}^+$ sedemikian sehingga $a = p^2$ dan $b = q^2$ dan diketahui $ab = p^2q^2 = (pq)^2 \in S$.
Sudah dijelaskan bahwa suatu himpunan bisa memiliki operasi biner. Dalam aljabar ada suatu himpunan yang dinamakan grup. Grup merupakan himpunan yang memiliki operasi biner dan memenuhi aksioma – aksiomanya.

**Definisi 2.2.8** Suatu himpunan tak kosong $G$ terhadap operasi biner $*$ disebut grup $\langle G, * \rangle$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut

1. operasi $*$ bersifat tertutup di $G$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$;
2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3. terdapat elemen identitas $e \in G$ terhadap operasi biner $*$, yaitu untuk setiap $a \in G$ berlaku $e * a = a * e = a$;
4. untuk setiap $a \in G$ terdapat invers $-a \in G$ terhadap operasi biner $*$, yaitu dengan untuk setiap $a \in G$ berlaku $a * -a = -a * a = e$ (Herstein, 1975).

Jika operasi biner $*$ pada $G$ bersifat komutatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$, maka grup $\langle G,* \rangle$ ini disebut grup Abel atau grup komutatif.

**Contoh 2.2.9**

Diberikan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ dan operasi penjumlahan $(+)$. Akan ditunjukan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup.

1. Untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$ berlaku $p + q \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu $\mathbb{Z}$ tertutup pada operasi penjumlahan $(+)$;
2. Untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$, berlaku $(p + q) + r = p + (q + r)$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif pada penjumlahan $(+)$;
3. Terdapat $e = 0$ sehingga untuk setiap $p \in \mathbb{Z}$ berlaku $p + e = e + p = p$. Oleh karena itu, 0 merupakan elemen identitas terhadap operasi penjumlahan $(+)$ di $\mathbb{Z}$;
4. Untuk setiap $p \in \mathbb{Z}$ terdapat $-p \in \mathbb{Z}$, sehingga berlaku $p - p = -p + p = 0$. Oleh karena itu, $-p$ merupakan elemen invers di $\mathbb{Z}$.

**Contoh 2.2.10**

Telah diketahui sebelumnya $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup. Grup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup komutatif karena untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$ berlaku $p + q = q + p$.

Telah diketahui bahwa suatu himpunan tak kosong $G$ terhadap operasi biner $*$ disebut grup jika memenuhi empat aksioma. Namun, bagaimana tidak ada elemen identitas $*$ di dalam $G$ dan tidak ada invers dari $g \in G$ terhadap operasi biner $*$ di dalam $G$? Oleh karena itu, himpunan tak kosong $G$ terhadap operasi biner $*$ tersebut yang hanya memenuhi dua aksioma disebut semigrup.

**Definisi 2.2.11** Suatu himpunan tak kosong $G$ terhadap operasi biner $*$ disebut semigrup $\langle G,* \rangle$ jika memenuhi aksioma-aksioma berikut

1. operasi $*$ bersifat tertutup di $G$, yaitu untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b \in G$;
2. operasi biner $*$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a * b) * c = a * (b * c)$.

**Contoh 2.2.12**

Diberikan himpunan rill $\mathbb{Z}$ dan operasi penjumlahan $(+)$. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan semigrup karena

1. untuk setiap $p, q \in \mathbb{Z}$ berlaku $p + q \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu $\mathbb{Z}$ tertutup pada penjumlahan $(+)$;
2. untuk setiap $p, q, r \in \mathbb{Z}$, berlaku $(p + q) + r = p + (q + r)$. Oleh karena itu, $\mathbb{Z}$ bersifat asosiatif pada penjumlahan $(+)$.

Berdasarkan Contoh 2.2.9 $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ merupakan grup. Artinya, $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ selain merupakan semigrup $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ juga merupakan grup. Hal ini bisa terjadi karena semigrup merupakan bentuk yang lebih umum dibandingkan dengan grup. Oleh karena itu, setiap grup merupakan semigrup.

**Contoh 2.2.13**

Diberikan himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ dengan operasi penjumlahan $(+)$. Himpunan $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan semigrup karena

1. untuk setiap $a, b \in \mathbb{N}$ berlaku $a + b \in \mathbb{N}$;
2. untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{N}$, berlaku $(a + b) + c = a + (b + c)$.

Himpunan $\langle \mathbb{N}, + \rangle$ merupakan contoh dari semigrup yang bukan merupakan grup. Karena elemen identitas dari operasi penjumlahan $(+)$ merupakan $0 \notin \mathbb{N}$ dan Untuk setiap $a \in \mathbb{N}$, $-a \notin \mathbb{N}$. Hal ini menunjukan bahwa tidak setiap semigrup merupakan grup.

**Definisi 2.2.14** Ring $\langle R, +, \cdot \rangle$ merupakan himpunan bersama dengan dua operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\cdot)$ dan memenuhi aksioma dibawah ini

1. $\langle R, + \rangle$ merupakan grup Abel;
2. $\langle R, \cdot \rangle$ berlaku sifat asosiatif dan tertutup atau biasa disebut semigrup;
3. untuk setiap $a, b, c \in R$, berlaku distributif kiri $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ dan distributif kanan $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ (Fraleigh, 2014).

**Contoh 2.2.15**

Jika dilihat berdasarkan Definisi 2.2.14 salah satu contoh ring merupakan semua himpunan bagian dari bilangan kompleks yang merupakan grup dalam operasi penjumlahan $(+)$ dan tertutup dalam operasi perkalian $(\cdot)$. Sebagai contoh $\langle \mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +, \cdot \rangle$, $\langle \mathbb{R}, +, \cdot \rangle$, dan $\langle \mathbb{C}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring.

**Contoh 2.2.16**

Diberikan ring $R$ dan $M_n(R)$ merupakan matriks berordo $n \times n$ dengan entri – entrinya adalah elemen $R$. Karena $R$ adalah ring, maka $\langle M_n(R), + \rangle$ adalah grup Abel. Diketahui $M_n(R)$ adalah matriks simetris karena berordo $n \times n$ sehingga $\langle M_n(R), \cdot \rangle$ tertutup dan berlaku sifat asosiatif. Oleh karena itu, $M_n(R)$ adalah ring.

Berdasarkan Contoh 2.2.16 diketahui $M_n(R)$ adalah ring. Namun, ketika $n \geq 2$ semigrup $\langle M_n(R), \cdot \rangle$ merupakan semigrup yang tidak komutatif. Oleh karena itu, akan diberikan definisi 2.2.17 mengenai ring komutatif.

**Definisi 2.2.17** Diberikan ring $R$, jika pada operasi perkalian $R$ bersifat komutatif, maka ring $R$ adalah ring komutatif (Fraleigh, 2014).

**Contoh 2.2.18**

Diberikan himpunan $5\mathbb{Z} = \{\cdots, -10, -5, 0, 5, 10, \cdots\}$. Himpunan $5\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan $(+)$ merupakan grup Abel. Dengan operasi perkalian $(\cdot)$ himpunan $5\mathbb{Z}$ akan membentuk semigrup yang komutatif. Oleh karena itu, $\langle 5\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ adalah ring komutatif.

Pada Contoh 2.2.18, $\langle 5\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ merupakan ring komutatif. Namun, pada operasi perkaliannya ring $\langle 5\mathbb{Z}, +, \cdot \rangle$ tidak memiliki elemen satuan. Diketahui bahwa tidak semua ring memiliki elemen satuan.

**Definisi 2.2.19** Diberikan ring $R$ dan $R$ memiliki satuan terhadap operasi perkalian $(\cdot)$. Jika setiap elemen tak nol dari $R$ memiliki invers, maka $R$ disebut ring divisi. Ring divisi yang komutatif disebut lapangan.

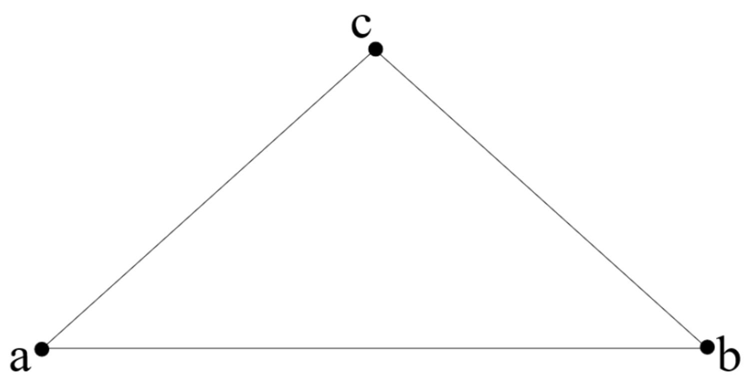
**Contoh 2.2.20**

Diberikan himpunan $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Himpunan $5\mathbb{Z}$ dengan operasi penjumlahan modulo 5 $(+_5)$ merupakan grup Abel. Dengan operasi perkalian modulo $(\cdot_5)$ himpunan $\mathbb{Z}_5$ akan membentuk semigrup yang komutatif. Terbukti $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot \rangle$ adalah ring divisi. Karena setiap elemen dari $\mathbb{Z}_5$ selain $\bar{0}$ memiliki invers $\langle \mathbb{Z}_5, +, \cdot \rangle$ merupakan lapangan.

## 2.3 Graf

Teori graf pertama kali dikemukakan oleh matematikawan Swiss Leonhard Euler pada tahun 1736 dalam upayanya untuk menyelesaikan masalah Jembatan Konigsberg. Masalah Jembatan Konigsberg merupakan mungkin tidaknya mungkin tidaknya seseorang berjalan tepat satu kali melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Konigsberg dan kembali lagi ke titik awal. Euler memisalkan daratan dengan titik (*vertex*) dan jembatan merupakan garis (*edge*) sehingga disimpulkan bahwa tidak mungkin seseorang berjalan tepat satu kali melewati ketujuh jembatan yang ada di kota Konigsberg dan kembali lagi ke titik awal.

Dalam graf sederhana $G$ terdiri atas himpunan berhingga yang tak kosong $V(G)$ yang dinamakan titik (*vertex*) dan himpunan berhingga $E(G)$ yang menghubungkan dua elemen $V(G)$ dinamakan sisi (*edge*) (Wilson, 2010). Pada Gambar 2.5.1 diperlihatkan graf $G$ dengan $V(G) = \{a, b, c\}$ dengan $E(G)$ terdiri dari $ab, ac, bc$.

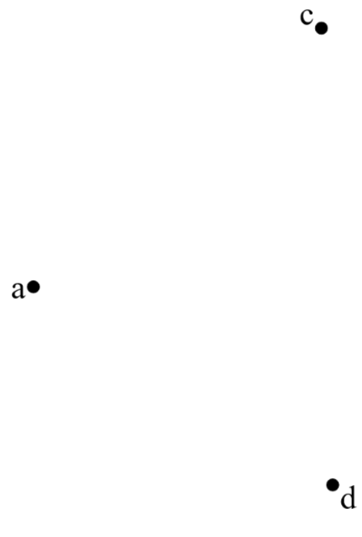



Gambar 2.3.1 Graf $G$

Ada banyak jenis – jenis graf dan yang paling sederhana adalah graf null. Akan dijelaskan definisi dari graf null.

**Definisi 2.3.1** Graf null adalah graf yang tidak memiliki garis (*edge*). Dinotasikan dengan $N_n$, dengan $n$ adalah jumlah titik (*vertex*) (Wilson, 2010).

Karena tidak adanya garis (*edge*) pada graf null setiap titik (*vertex*) terisolasi atau tidak bertetangga dengan titik (*vertex*) lainnya seperti pada Gambar 2.3.2.

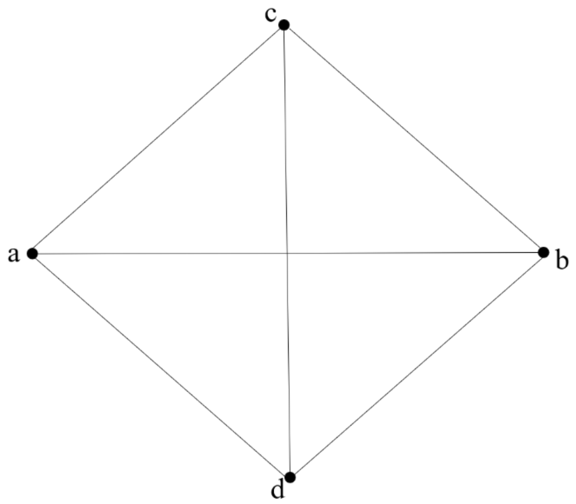



Gambar 2.3.2 Graf null $N_4$

Salah satu graf yang cukup sering digunakan adalah graf lengkap. Pada Definisi 2.3.2 akan dijelaskan mengenai graf lengkap.

**Definisi 2.3.2** Graf lengkap adalah graf sederhana yang setiap titik (*vertex*) memiliki garis (*edge*) ke setiap titik (*vertex*) lainnya (Wilson, 2010).

Berbeda dengan graf null yang setiap titik (*vertex*) terisolasi, graf lengkap setiap titik (*vertex*) akan terhubung dengan titik (*vertex*) lain yang ada di graf tersebut seperti pada Gambar 2.3.3.



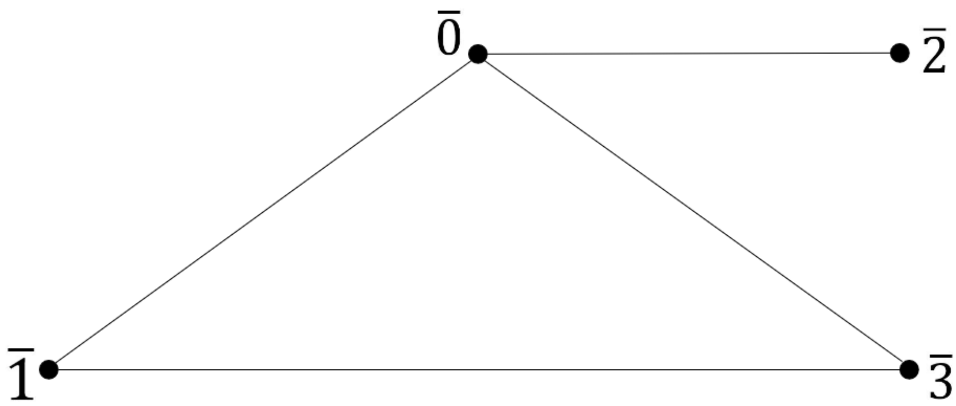

Gambar 2.3.3 Graf lengkap $K_4$

Graf identitas merupakan salah satu jenis graf. Graf ini dapat dibentuk dari berbagai struktur aljabar seperti grup, semigrup, loop, ring komutatif, dan lain – lain.

**Definisi 2.3.3** Graf identitas dari $\langle G,* \rangle$ dapat dibuat dengan aturan ketetanggaan jika $x, y \in G, x * y = e$, maka $x$ bertetangga dengan $y$. Dan diasumsikan bahwa $e$ bertetangga dengan semua unsur $G$ (Kandasamy & Smarandache, 2009).

**Contoh 2.3.4**

Diketahui $\mathbb{Z}_4$ merupakan grup dengan operasi penjumlahan modulo 4 $(+_4)$ bentuk graf identitas dari grup $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$ dapat dilihat pada Gambar 2.3.4.




Gambar 2.3.4 Graf identitas grup $\langle \mathbb{Z}_4, +_4 \rangle$

Graf identitas pada grup sebagaimana yang dijelaskan pada Definisi 2.3.3 merupakan salah satu jenis graf identitas. Pada penelitian sebelumnya sudah diketahui bentuk umum dari graf identitas grup $\mathbb{Z}_n$.

**Definisi 2.3.5** Graf identitas grup $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$, dengan $n \geq 3$ dan ganjil akan memuat graf $K_3$ sebanyak $\frac{n-1}{2}$. Sedangkan graf identitas grup $\langle \mathbb{Z}_n, +_n \rangle$, dengan $n \geq 2$ dan genap akan memuat sebuah graf $K_2$ dan graf $K_3$ sebanyak $\frac{n-2}{2}$ (Augustin & Welyyanti, 2020).

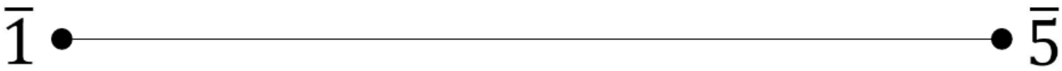
Untuk semigrup aturan ketetanggannya relatif sama dengan graf identitas lainnya. Dijelaskan bahwa diasumsikan $e$ bertetangga dengan semua unsur $G$. Namun, ketika operasi binernya merupakan perkalian elemen identitas $e$ tidak akan bertetangga dengan elemen pembagi nol karena pada operasi perkalian sudah didefinisikan sebagai graf pembagi nol.

**Definisi 2.3.6** Graf pembagi nol dari semigrup $\langle G, * \rangle$ terdiri titik – titik yang merupakan elemen pembagi nol di $G$. jika $x, y \in G, x * y = 0$, maka $x$ bertetangga dengan $y$ (DeMeyer & DeMeyer, 2005).

Karena memiliki kemiripan dengan graf identitas pada semigrup dengan operasi perkalian sehingga pada semigrup dengan operasi perkalian elemen identitas tidak akan bertetangga dengan elemen pembagi nol (Kandasamy & Smarandache, 2009).

**Contoh 2.3.7**

Diketahui $\mathbb{Z}_6$ merupakan semigrup dalam operasi perkalian modulo $6\,(\cdot_6)$. Elemen pembagi nol di $\mathbb{Z}_6$ merupakan $\bar{2}.\bar{3}= \bar{0}$ dan $\bar{4}.\,\bar{3} = \bar{0}$. Oleh karena itu, graf identitas dari semigrup $\mathbb{Z}_6$ akan terlihat seperti Gambar 2.3.5

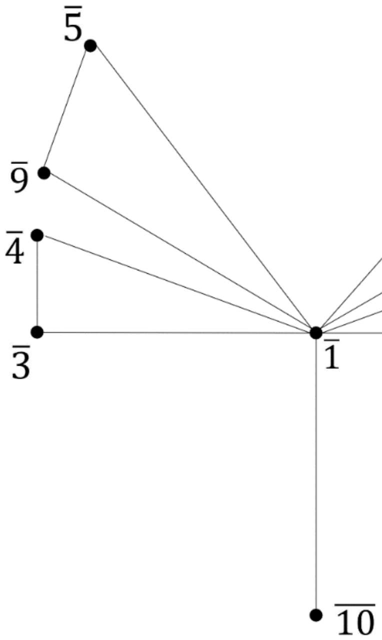



Gambar 2.3.5 Graf identitas semigrup $\langle \mathbb{Z}_6, \cdot_6 \rangle$

Pada pembahasan sebelumnya diketahiu bahwa Ring $\langle \mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6 \rangle$ merupakan semigrup terhadap operasi perkalian modulo 6. Oleh karena itu, graf identitas dari semigrup $\mathbb{Z}_6$ pada Gambar 2.3.5 juga merupakan graf identitas dari ring $\langle \mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6 \rangle$. Pada semigrup $\langle \mathbb{Z}_p, \cdot_p \rangle$ dengan $p$ merupakan bilangan prima tidak ada elemen pembagi nol. Oleh karena itu, membentuki graf identitas semigrup $\langle \mathbb{Z}_p, \cdot_p \rangle$, dengan $p$ merupakan bilangan prima lebih mudah karena elemen identitas akan bertetangga dengan semua elemen dari semigrup kecuali $\bar{0}$.

**Contoh 2.3.8**

Diketahui $\mathbb{Z}_{11}$ merupakan semigrup dalam operasi perkalian modulo $11\,(\cdot_{11})$. Bentuk graf identitas dari semigrup $\langle \mathbb{Z}_{11}, \cdot_{11} \rangle$ akan terlihat seperti Gambar 2.3.6




Gambar 2.3.6 Graf identitas semigrup $\langle \mathbb{Z}_{11}, \cdot_{11} \rangle$

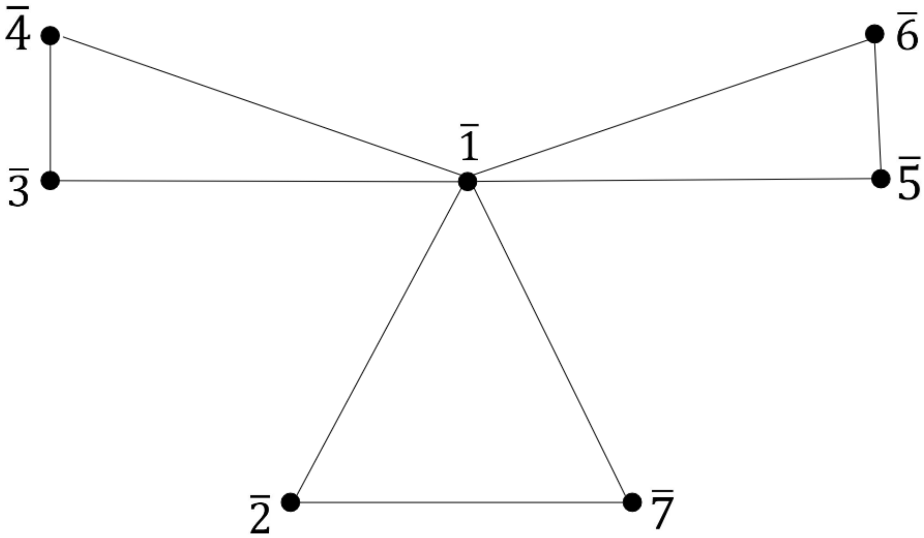
Bedasarkan Gambar 2.3.6 bentuk dari graf identitas dari Ring $\langle \mathbb{Z}_{11}, +_{11}, \cdot_{11} \rangle$ menyerupai sebuah kincir. Oleh karena itu, akan diberikan Definisi 2.3.9 tentang graf kincir.

**Definisi 2.3.9** Graf kincir $W_k^n$ adalah graf tak berarah terdiri dari graf lengkap $K_k$ sebanyak $n$ di satu titik yang sama(Gallian, 2018).

Graf kincir $W_k^n$ dibangun dengan graf lengkap $K_k$ sebanyak $n$ dan salah satu titiknya merupakan irisan dari setiap graf lengkap $K_k$. Bedasarkan sifat ini graf kincir selalu memiliki satu titik yang menjadi pusat dari Graf kincir $W_k^n$. Berikut akan diberikan contoh dari graf kincir.

**Contoh 2.3.10**

Diberikan graf kincir $W_3^3$. Diketahui graf kincir $W_3^3$ dibangun dengan graf lengkap $K_3$ sebanyak 3 sehingga akan berbentuk seperti Gambar 2.3.7




Gambar 2.3.7 Graf kincir $W_3^3$

Bedasarkan Gambar 2.3.7 titik 1 merukapan titik pusat dari graf kincir $W_3^3$ karena titik 1 beririsan dengan ketiga graf lengkap $K_3$.

# III. METODOLOGI PENELITIAN

## 3.1 Waktu dan Tempat Penlitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil 2022/2023 yang bertempat di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

## 3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan pendekatan studi literatur sebagai berikut

1. studi literatur dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berhubungan dengan penelitian ini;
2. mempelajari definisi dan teorema yang berkaitan dengan permasalahan yang berhubungan dengan penelitian.

Langkah-langkah yang akan dilakukan dalam upaya mencapai tujuan dari penelitian ini disajikan dalam diagram pada Gambar 3.3.1.

Mempelajari aljabar abstrak yaitu : himpunan (Clapham & Nicholson, 2021), grup (Herstein, 1975), dan ring (Fraleigh, 2014) graf (Wilson, 2010), graf identitas (Kandasamy & Smarandache, 2009)

Menyelidiki sifat-sifat ring $\mathbb{Z}_p$

Menyelidiki sifat-sifat graf identitas

Mengonstruksi graf identitas ring $\mathbb{Z}_p$

Menyelidiki bentuk umum dari graf identitas ring $\mathbb{Z}_p$

Gambar 3.1.1 Diagram penelitian

# V. KESIMPULAN DAN SARAN

## 5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya diketahui bahwa untuk bentuk dari graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p = \{2, 3, 5\}$ memiliki pola yang berbeda dengan $p \geq 7$. Graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$, dengan $p \geq 7$ bilangan prima terbentuk dari graf lengkap $K_2$, graf null $N_1$, dan graf kincir $W_3^{\frac{p-3}{2}}$.

## 5.2 Saran

Pada penelitian kali ini masih terdapat kekurangan untuk menvisualisasikan dari graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$ harus memasukan datanya secara manual karena saat penelitian ini dilakukan peneliti menggunakan *Python* versi 3.11.1 dan belum ada modul yang mendukung untuk langsung menampilkan graf identitas dari ring $\mathbb{Z}_p$ ketika telah diketahui nilai elemen – elemen yang saling invers dan inversnya bukan diri sendiri.

# DAFTAR PUSTAKA


Adkins, W. a., & Weintraub, S. H. (1995). *Algebra: An Approach via Module Theory*. Springer.

Augustin, E., & Welyyanti, D. (2020). Grup Zn Dalam Bentuk Graf Identitas. *Jurnal Matematika UNAND*, *9*(1), 1–7.

DeMeyer, F., & DeMeyer, L. (2005). Zero divisor graphs of semigroups. *Journal of Algebra*, *283*(1), 190–198.

Devlin, K. (2004). *Sets, Functions and Logic - An Intro to Abstract Mathematics* (3rd ed.). Chapman & Hall/CRC.

Fraleigh, J. B. (2014). *A First Course in Abstract Algebra* (7th ed.). Pearson Education Limited.

Gallian, J. A. (2018). A dynamic survey of graph labeling. *Electronic Journal of Combinatorics*, *25*(4), 24–26.

Herstein, I. N. (1975). *Topics in Algebra 2nd Edition*. Xerox Corporation.

Kandasamy, W. B. V., & Smarandache, F. (2009). *Groups As Graphs* (1st ed.). Editura CuArt.

Wilson, R. J. (2010). *Introduction to Graph Theory* (5th ed.). Pearson Education Limited.