PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA

(Skripsi)

Oleh

EKA ANISA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

SOLVING FULLY FUZZY NONLINEAR EQUATION SYSTEM USING THE DOUBLE NEWTON RAPHSON METHOD

By

Eka Anisa

A nonlinear equation system is a set of two or more nonlinear equations. Nonlinear equation systems can be real numbers and fuzzy numbers. Meanwhile, fuzzy nonlinear equation systems can be expanded into fully fuzzy nonlinear system equations by implementing arithmetic operations on fuzzy numbers. This study aims to describe the results of research on solving fully fuzzy nonlinear equation systems using the Double Newton Raphson method. The Double Newton Raphson method be used as one of the numerical methods in determining the roots of nonlinear equations with convergence order four. The results show that this method can solve fully fuzzy nonlinear system equations with triangular fuzzy numbers. The solution is achieved by firstly changing the form of the system of nonlinear fully fuzzy using the arithmetic operation of triangular fuzzy numbers after setting the algorithm and implementing it into the Matlab program.

Keyword: Fully Fuzzy Nonlinear Equation System, The Double Newton Raphson Method.

ABSTRAK

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA

Oleh

Eka Anisa

Sistem persamaan non linear merupakan himpunan dua atau lebih persamaan non linear. Sistem persamaan non linear dapat berupa bilangan real dan bilangan *fuzzy*. Sementara itu, sistem persamaan *fuzzy* non linear dapat dikembangkan menjadi sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dengan mengimplementasikan operasi aritmatika bilangan *fuzzy*. Skripsi ini bertujuan untuk mendeskripsikan hasil penelitian tentang penyelesaian sistem persamaan *fully fuzzy* non linear menggunakan metode Newton Raphson Ganda. Metode Newton Raphson Ganda digunakan sebagai salah satu metode numerik dalam menentukan akar-akar persamaan non linear dengan orde konvergensi empat. Hasil penelitian menunjukkan bahwa metode ini dapat menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dengan bilangan *fuzzy* segitiga. Solusinya dicapai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk sistem persamaan tegas non linear menggunakan operasi aritmatika bilangan *fuzzy* segitiga setelah itu menyusun algoritma dan mengimplementasikannya ke dalam program Matlab.

Kata kunci: Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Non Linear, Metode Newton Raphson Ganda.

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA

Oleh

EKA ANISA
1717031049

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN *FULLY FUZZY* NON LINEAR DENGAN MENGGUNAKAN METODE NEWTON RAPHSON GANDA**

Nama : *Eka Anisa*

Nomor Pokok Mahasiswa : **1717031049**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP 19690213 199402 1 001	NIP 19610128 198811 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ______________

Sekretaris : **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.** ______________

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ______________

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **26 Juni 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini :

Nama	: **Eka Anisa**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1717031049**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Penyelesaian Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Non Linear Dengan Menggunakan Metode Newton Raphson Ganda**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 26 Juni 2023

ng Menyatakan,

Eka Anisa
NPM. 1717031049

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama lengkap Eka Anisa, dilahirkan di Bandar Lampung pada tanggal 5 Agustus 1998. Penulis merupakan anak tunggal dari pasangan Bapak Joni Muarif dan Ibu Saidah.

Penulis menyelesaikan pendidikan di TK Taman Indria Tanjung Karang pada tahun 2004, SDN 1 Wayharong pada tahun 2010, MTs.N 1 Pesawaran pada tahun 2013, dan MAN 2 Bandar Lampung pada tahun 2016.

Pada tahun 2017, penulis terpilih sebagai penerima Beasiswa Perintis Nusantara (BPN) yaitu beasiswa bimbingan persiapan masuk Perguruan Tinggi Negeri. Pada tahun tersebut, penulis juga diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung melalui jalur SBMPTN dan terdaftar dalam mahasiswa penerima Beasiswa Bidikmisi.

Pada awal tahun 2020, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Sinar Banten, Ulubelu, Tanggamus sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat. Kemudian pada pertengahan tahun 2020, penulis melakukan Kerja Praktik (KP) di Dinas Lingkungan Hidup Provinsi Lampung.

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya".

(Q.S. Al-Baqaroh : 286)

"Sebaik-baik manusia adalah manusia yang paling banyak manfaatnya untuk orang lain".

(H.R. Bukhari)

"Jangan berfikir kelak akan menjadi apa, yang penting belajar yang giat dulu''.

(K.H. Maimoen Zubair)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, hidayah, dan inayah-Nya dalam menjalani kehidupan. Shalawat beriring salam selalu tercurahkan kepada baginda agung Nabi Muhammad SAW yang merupakan suri teladan setiap umat.

Ku persembahkan skripsi ini untuk :

Bapak dan Ibuku tercinta,

Terimakasih tiada tara ku ucapkan yang selalu memberikan cinta, kasih sayang, dukungan dan doa yang tulus dalam setiap langkah perjalanan hidupku.

Andung, tante, om, dan sepupu-sepupu tersayang yang telah memberikan doa dan dukungan baik moril maupun materil untukku.

Dosen-dosen jurusan Matematika dan guru-guruku yang tak bosan membagikan ilmu dan pengalamannya untukku.

Almamater tercinta Universitas Lampung

SANCAWACANA

Dengan menyebut nama Allah SWT yang Maha Pengasih lagi Maha Penyayang. Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat, taufik, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "Penyelesaian Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Non Linear dengan Menggunakan Metode Newton Raphson Ganda" sebagai syarat memperoleh gelar Sarjana Matematika di Jurusan Matematika Universitas Lampung. Shalawat serta salam selalu terlimpahkan kepada Nabi Muhammad SAW yang kita nantikan syafa'at nya di akhirat kelak. Terselesaikannya skripsi ini tidak terlepas dari bantuan, motivasi, dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu, penulis mengucapkan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembimbing I yang telah memberikan arahan, bimbingan, saran, dan dukungan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz, M.Si., selaku dosen pembimbing II yang telah memberikan arahan, bimbingan, saran serta bersedia mengoreksi format penulisan selama penulis menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembahas yang telah bersedia memberikan kritik, saran dan evaluasi selama penulisan skripsi.
4. Bapak Subian Saidi, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua Jurusan Matematika FMIPA Unila.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan FMIPA Unila.
7. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Unila.

8. Orang tua tercinta, bapak Joni Muarif dan ibu Saidah yang selalu ada dalam segala kondisi dan juga selalu memberikan motivasi dan doa yang tulus sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
9. Andung, om, tante tersayang yang selalu memberikan dukungan dan doa kepada penulis.
10. Sepupu tersayang Ayuk Ika, Kak Empik, Nabil, Raisya, Riva, Rania, Sidik, Ayuk Ani, Ara, Noni, Iqbal, Bagus, Deri, Dian, dan Dila yang selalu memberikan canda tawa dan doa untuk penulis.
11. Teman-teman KMNU dan seluruh member Shalawat Everyday 49 yang senantiasa mengingatkan kepada penulis untuk senantiasa bershalawat kepada Nabi Muhammad SAW setiap harinya.
12. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika angkatan 2017.
13. Seluruh pihak yang telah membantu penulis yang namanya tidak dapat disebutkan satu per satu.

Bandar Lampung, 26 Juni 2023
Penulis,

Eka Anisa

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak akan terlepas dari matematika mulai dari hal-hal kecil sampai dengan perkembangan teknologi yang kompleks. Manusia dalam berfikir menggunakan logika. Menurut Susilo (2006), logika merupakan salah satu cabang ilmu dalam matematika tentang penalaran yang absah/valid. Dalam mengambil suatu keputusan, manusia dapat menggunakan sebuah logika yang di kenal dengan nama logika *fuzzy*. *Fuzzy* artinya kabur atau samar-samar. Jadi, logika *fuzzy* adalah suatu logika yang mempunyai nilai yang samar antara benar atau salah.

Bagian dari aljabar linear yang sering dipelajari dalam ilmu matematika adalah sistem persamaan non linear. Sistem persamaan non linear merupakan himpunan dua atau lebih persamaan non linear. Penyelesaian sistem ini meliputi nilai akar x sampai $f(x) = 0$ yang tidak mempunyai syarat yang sama dengan sistem persamaan linear, sehingga untuk mendapatkan nilai akar digunakan metode numerik. Metode numerik adalah suatu metode untuk menentukan nilai perkiraan atau pendekatan jika perhitungan analitik tidak dapat digunakan.

Dengan berkembangnya ilmu matematika, dalam sistem persamaan non linear konstanta yang umumnya berupa bilangan real kini dapat menjadi bilangan *fuzzy*. Bermula dari sistem persamaan *fuzzy* non linear, kemudian dikembangkan menjadi sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear dengan mengimplementasikan operasi aritmatika bilangan *fuzzy* yang berbeda dengan bilangan real.

Pada tahun 2019, Devitriani et al., melakukan penelitian mengenai penyelesaian sistem persamaan non linear dengan menggunakan metode Newton Raphson Ganda. Pada penelitian ini didapat hasil bahwa metode ini dapat menyelesaikan sistem persamaan non linear.

Pada tahun 2019, penelitian yang dilakukan oleh Jafarian & Jafari memperkenalkan sebuah metode baru untuk mendapatkan solusi optimal bilangan *fuzzy* non negatif dari sistem persamaan matriks *fully fuzzy* non linear $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{C}\tilde{X}^2 + \cdots + \tilde{E}\tilde{X}^n = B$, dengan cara menambahkan variabel baru lalu membuat kendala persamaan. Pada skripsi ini penulis tertarik untuk mengkaji salah satu pendekatan numerik untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan *fully fuzzy* non linear yaitu dengan menggunakan metode Newton Raphson Ganda agar solusi didapatkan dalam waktu yang lebih singkat.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dengan menggunakan metode Newton Raphson Ganda.

1.3 Manfaat Penelitian

Penelitian ini dapat memberikan manfaat yaitu dengan digunakannya sebagai referensi pengembangan metode numerik dalam penyelesaian masalah sistem persamaan *fully fuzzy* non linear.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan *Fuzzy* (*Fuzzy Set*)

Himpunan adalah suatu kumpulan objek-objek (konkret maupun abstrak) yang mempunyai kesamaan sifat tertentu (lihat Susilo, 2006). Suatu himpunan terdefinisi secara tegas yang berarti bahwa suatu objek selalu dapat ditentukan secara tegas apakah suatu objek tersebut merupakan anggota himpunan itu atau tidak. Dengan kata lain, untuk setiap himpunan terdapat batas yang tegas antara objek-objek yang merupakan anggota dan objek-objek yang tidak merupakan anggota dari himpunan tersebut. Suatu himpunan A dalam semesta X dapat dinyatakan dengan fungsi karakteristik $\mu_A(x) : X \to \{0,1\}$ dengan

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

untuk setiap $x \in X$.

Pada himpunan *fuzzy*, fungsi karakteristik tersebut diperluas sehingga nilai yang dipasangkan untuk unsur-unsur dalam semesta pembicaraan tidak hanya 0 dan 1 saja, akan tetapi keseluruhan nilai dalam interval $[0,1]$ yang menyatakan derajat keanggotaan suatu unsur pada himpunan yang dibicarakan. Fungsi karakteristik ini disebut fungsi keanggotaan sedangkan himpunan yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan disebut himpunan *fuzzy*. Fungsi keanggotaan himpunan *fuzzy* A pada himpunan X dinotasikan dengan μ_A, yaitu $\mu_A(x) : X \to [0,1]$ (Klir & Yuan, 1995).

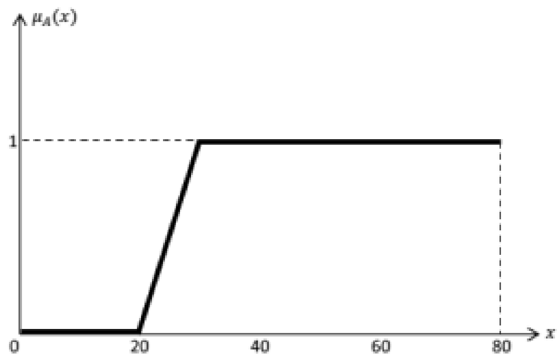
2.2 Fungsi Keanggotaan (*Membership Function*)

Menurut Kusumadewi & Purnomo (2010), fungsi keanggotaan merupakan suatu kurva yang menunjukkan pemetaan titik-titik input data ke dalam nilai (derajat) keanggotaannya dalam rentang 0 sampai 1. Salah satu cara untuk mendapatkan nilai keanggotaannya yaitu dengan pendekatan fungsi.

Contoh:

Misalkan $X = [0,80]$ adalah semesta pembicaraan dan A adalah himpunan *fuzzy* pada X yang didefinisikan dengan fungsi keanggotaan berikut:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 20 \\ \dfrac{x-20}{15} & 20 < x \leq 35 \\ 1 & x > 35 \end{cases}$$



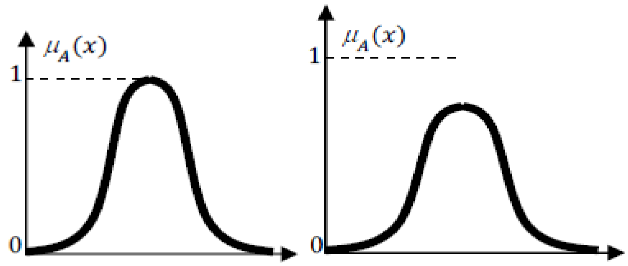
Gambar 1. Grafik Fungsi Keanggotaan $\mu_A(x)$

2.3 Bilangan *Fuzzy*

Menurut Susilo (2006), secara formal bilangan *fuzzy* didefinisikan sebagai himpunan *fuzzy* dalam semesta himpunan semua bilangan real $\mathbb{R}$ yang memenuhi empat sifat berikut ini :

1 Normal

Misalkan A adalah himpunan *fuzzy* pada X. Himpunan *fuzzy* A di katakan himpunan *fuzzy* normal jika nilai fungsi keanggotaannya bernilai sama dengan 1 artinya $\mu_A(x) = 1$. Himpunan *fuzzy* A di katakan himpunan *fuzzy* subnormal jika nilai fungsi keanggotaannya bernilai kurang dari 1 artinya $\mu_A(x) < 1$.



Gambar 2. Himpunan *Fuzzy* Normal dan Subnormal

2 Mempunyai pendukung (*support*) yang terbatas

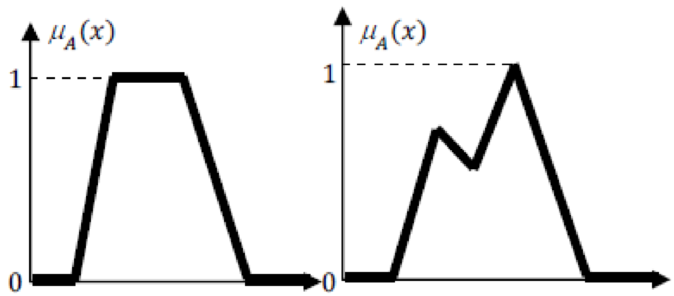
Pendukung (*Support*) dari suatu himpunan *fuzzy* A, yang dilambangkan dengan $Pend(A)$ adalah himpunan tegas yang memuat semua unsur dari semesta yang mempunyai derajat keanggotaan tak nol dalam A, yaitu

$$Pend(A) = \{x \in A | \mu_A(x) > 0\}$$

3 Semua potongan-α ($\alpha - cut$) nya adalah selang tertutup dalam $\mathbb{R}$

4 Konvek

Himpunan *fuzzy* A di katakan himpunan *fuzzy* konvek apabila fungsi keanggotaannya monoton naik, atau monoton turun, atau monoton naik dan monoton turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik. Himpunan *fuzzy* A di katakan himpunan *fuzzy* tak konvek apabila fungsi keanggotaannya tidak monoton naik, atau tidak monoton turun, atau tidak monoton naik dan monoton turun pada saat nilai unsur pada himpunan semesta semakin naik.



Gambar 3. Himpunan *Fuzzy* Konvek dan Tak Konvek

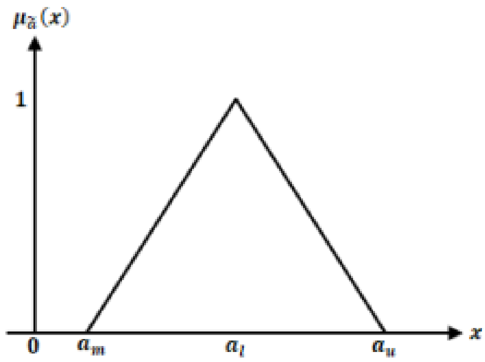
Menurut Jafarian & Jafari (2019), bilangan *fuzzy* merupakan himpunan *fuzzy* dimana $\tilde{u} : \mathbb{R}^1 \to I = [0,1]$ yang memenuhi syarat:

1. $\tilde{u}$ semikontinu atas
2. $\tilde{u}(x) = 0$ di luar interval $[a, d]$
3. Ada bilangan real b dan c, $a \leq b \leq c \leq d$ dimana
   (i) $\tilde{u}(x)$ monoton naik pada $[a, b]$
   (ii) $\tilde{u}(x)$ monoton turun pda $[c, d]$
   (iii) $\tilde{u}(x) = 1$, untuk $b \leq x \leq c$

Bilangan *fuzzy* yang terkenal diantara bilangan *fuzzy* yang lain adalah bilangan *fuzzy* segitiga. Misalkan diberikan sembarang bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (m - \alpha, m, m + \beta) = (a_m, a_l, a_u)$ dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - m}{\alpha} + 1, & m - \alpha \leq x \leq m, \quad \alpha > 0 \\ \dfrac{m - x}{\beta} + 1, & m \leq x \leq m + \beta, \quad \beta > 0 \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{1}$$

disebut bilangan *fuzzy* segitiga. Adapun bentuk grafiknya sebagai berikut



Gambar 4. Bilangan *Fuzzy* Segitiga $\tilde{a} = (a_m, a_l, a_u)$

Dua bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (a_m, a_l, a_u)$ dan $\tilde{b} = (b_m, b_l, b_u)$ dikatakan sama jika dan hanya jika $a_m = b_m$, $a_l = b_l$, dan $a_u = b_u$.

Operasi perhitungan bilangan *fuzzy* berbeda dengan operasi perhitungan pada bilangan real. Diberikan dua bilangan *fuzzy* segitiga $\tilde{a} = (a_m, a_l, a_u)$ dan $\tilde{b} = (b_m, b_l, b_u)$ maka operasi perhitungannya sebagai berikut:

a. $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a_m + b_m , a_l + b_l, a_u + b_u)$,

b. $-\tilde{a} = (-a_u, -a_l, -a_m)$,

c. $\tilde{a} \ominus \tilde{b} = (a_m - b_u, a_l - b_l, a_u - b_m)$,

d. Perkalian pada bilangan *fuzzy* dilambangkan oleh $\hat{*}$ dan didasarkan pada prinsip tambahan akan tetapi sedikit berbeda dari perkalian *fuzzy* klasik

$$\tilde{a} \hat{*} \tilde{b} = (c_m, c_l, c_u)$$

dimana $c_l = a_l \cdot b_l$

$$c_m = \min(a_m \cdot b_m, a_m \cdot b_u, a_u \cdot b_m, a_u \cdot b_u)$$

$$c_u = \max(a_m \cdot b_m, a_m \cdot b_u, a_u \cdot b_m, a_u \cdot b_u)$$

Jika $\tilde{a}$ adalah sembarang bilangan fuzzy segitiga dan $\tilde{b}$ non negatif, maka:

$$\tilde{a} \hat{*} \tilde{b} = \begin{cases} (a_m \cdot b_m, a_l \cdot b_l, a_u \cdot b_u), & a_m \geq 0, \\ (a_m \cdot b_u, a_l \cdot b_l, a_u \cdot b_u), & a_m < 0, a_u \geq 0, \\ (a_m \cdot b_m, a_l \cdot b_l, a_u \cdot b_m), & a_m < 0, a_u < 0. \end{cases}$$

Menurut Marzuki et al., (2018), matriks $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ disebut matriks *fuzzy* jika setiap anggota $\tilde{A}$ adalah bilangan *fuzzy*. Matriks *fuzzy* $\tilde{A}$ akan bernilai positif dan dilambangkan dengan $\tilde{A} > 0$, jika setiap anggota $\tilde{A}$ positif . Matriks *fuzzy* $n \times n\tilde{A} = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$, yang mana $\tilde{a}_{ij} = (\tilde{a}_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})$, dengan notasi baru $\tilde{A} = (A, M, N)$ dimana $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}, M = \left(m_{ij}\right)_{n\times n}$ dan $N = \left(n_{ij}\right)_{n\times n}$ adalah matriks tegas.

2.4 Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Non Linear

Sistem persamaan *fully fuzzy* non linear mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{12} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{1n} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n) \oplus (\tilde{c}_{11} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{c}_{12} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^2) \oplus \cdots \\ \oplus (\tilde{c}_{1n} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{e}_{11} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{e}_{12} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^n) \oplus \cdots \oplus (\tilde{e}_{1n} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^n) = \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ (\tilde{a}_{n1} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{n2} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{nn} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n) \oplus (\tilde{c}_{n1} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{c}_{n2} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^2) \oplus \cdots \\ \oplus (\tilde{c}_{nn} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{e}_{n1} \,\hat{*}\, \tilde{x}_1^n) \oplus (\tilde{e}_{n2} \,\hat{*}\, \tilde{x}_2^n) \oplus \cdots \oplus (\tilde{e}_{nn} \,\hat{*}\, \tilde{x}_n^n) = \tilde{b}_n \end{cases} \tag{2}$$

dimana $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij}$, dan $\tilde{e}_{ij}$ untuk $1 \leq i, j \leq n$ adalah sembarang bilangan *fuzzy* segitiga, sedangkan $\tilde{b}_i$ pada ruas kanan dan elemen tidak diketahui $\tilde{x}_j$ adalah bilangan *fuzzy* non negatif. Dengan menggunakan notasi matriks, diketahui bahwa

$$\tilde{A} \,\hat{*}\, \tilde{X} + \tilde{C} \,\hat{*}\, \tilde{X}^2 + \cdots + \tilde{E} \,\hat{*}\, \tilde{X}^n = \tilde{B} \tag{3}$$

Bilangan *fuzzy* segitiga pada matriks $\tilde{X} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T, \tilde{X}^2 = (\tilde{x}_1^2, \tilde{x}_2^2, \dots, \tilde{x}_n^2)^T, \dots, \tilde{X}^n = (\tilde{x}_1^n, \tilde{x}_2^n, \dots, \tilde{x}_n^n)^T$ dimana $\tilde{x}_i = (\tilde{y}_{i1}, \tilde{x}_{i1}, \tilde{z}_{i1})$, $\tilde{x}_i^2 = (\tilde{y}_{i1}^2, \tilde{x}_{i1}^2, \tilde{z}_{i1}^2) \dots \tilde{x}_i^n = (\tilde{y}_{i1}^n, \tilde{x}_{i1}^n, \tilde{z}_{i1}^n)$ untuk $1 \leq i \leq n$ adalah solusi dari sistem persamaan matriks *fully fuzzy* non linear (3) jika,

$$\tilde{a}_i \,\hat{*}\, \tilde{X} + \tilde{c}_i \,\hat{*}\, \tilde{X}^2 + \cdots + \tilde{e}_i \,\hat{*}\, \tilde{X}^n = \tilde{b}_i, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{4}$$

dimana

$$\tilde{b}_i = \left(\tilde{d}_{i1}, \tilde{b}_{i1}, \tilde{f}_{i1}\right),$$

$$\tilde{a}_i = \left(\left(\tilde{g}_{i1}, \tilde{a}_{i1}, \tilde{h}_{i1}\right), (\tilde{g}_{i2}, \tilde{a}_{i2}, \tilde{h}_{i2}), \dots, (\tilde{g}_{in}, \tilde{a}_{in}, \tilde{h}_{in})\right),$$

$$\tilde{c}_i = \left(\left(\tilde{k}_{i1}, \tilde{c}_{i1}, \tilde{p}_{i1}\right), (\tilde{k}_{i2}, \tilde{c}_{i2}, \tilde{p}_{i2}), \dots, (\tilde{k}_{in}, \tilde{c}_{in}, \tilde{p}_{in})\right),$$

$$\tilde{e}_i = \left((\tilde{q}_{i1}, \tilde{e}_{i1}, \tilde{u}_{i1}), (\tilde{q}_{i2}, \tilde{e}_{i2}, \tilde{u}_{i2}), \dots, (\tilde{q}_{in}, \tilde{e}_{in}, \tilde{u}_{in})\right),$$

Untuk sistem persamaan matriks *fully fuzzy* non linear (3) dengan notasi baru $\tilde{A} = (G, A, H), \tilde{C} = (K, C, P), \dots, \tilde{E} = (Q, E, U)$ dimana $G, A, H, K, C, P, \dots, Q, E, U$ adalah crips matriks (matriks tegas) dikatakan bahwa $\tilde{X}, \tilde{X}^2, \dots, \tilde{X}^n$ adalah solusi jika:

$$\begin{cases} GY + KY^2 + \cdots + QY^n = D, \\ AX + CX^2 + \cdots + EX^n = B, \\ HZ + PZ^2 + \cdots + UZ^n = F. \end{cases}$$

Selain itu, jika $Y \geq 0, X - Y \geq 0, Z - X \geq 0, X^2 - Y^2 \geq 0, \dots, X^n - Y^n \geq 0, Z^n - X^n \geq 0$, maka $\tilde{X}, \tilde{X}^n, \dots, \tilde{X}^n$ adalah solusi konsisten dari sistem persamaan matriks *fully fuzzy* non linear (Jafarian & Jafari, 2019).

2.5 Metode Numerik

Metode numerik digunakan untuk memecahkan masalah di mana perhitungan analitik tidak dapat digunakan. Metode numerik ini didasarkan pada gagasan bahwa masalah dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan analitik. Metode numerik ini disajikan dalam bentuk algoritma yang dapat dihitung dengan cepat dan mudah. Pendekatan yang digunakan dalam metode numerik adalah pendekatan analitis matematis. Algoritma yang dikembangkan dalam metode numerik merupakan algoritma pendekatan, maka dalam algoritma tersebut akan muncul istilah iterasi yaitu pengulangan proses perhitungan. Dengan kata lain, perhitungan dalam metode numerik adalah perhitungan yang dilakukan secara berulang-ulang untuk secara konsisten menghasilkan hasil yang makin mendekati nilai penyelesaian eksak (Basuki & Ramadijanti, 2005).

2.5.1 Galat (*Error*)

Menurut Triatmodjo (2002), penyelesaian secara numeris dari suatu persamaan matematik hanya memberikan nilai perkiraan yang mendekati nilai eksak (yang benar) dari penyelesaian analitis. Di dalam metode numerik, sering dilakukan pendekatan secara iteratif. Pada pendekatan tersebut perkiraan sekarang dibuat berdasarkan perkiraan sebelumnya. Dalam hal ini, galat adalah perbedaan antara nilai perkiraan sebelumnya dan nilai perkiraan sekarang. Pada proses numerik ada beberapa jenis galat, salah satunya adalah galat relatif. Adapun formula yang di gunakan untuk galat relatif adalah sebagai berikut :

$$\varepsilon_a = \frac{p_*^{n+1} - p_*^{n}}{p_*^{n+1}} \times 100\% \qquad (5)$$

dengan :

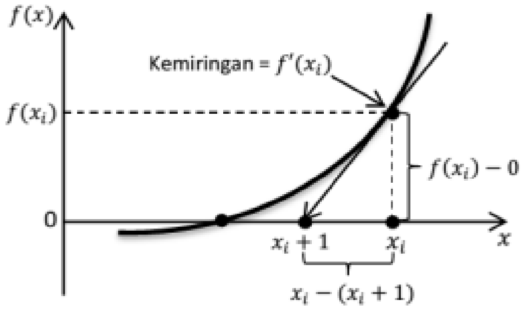
ε_a : galat relatif

p_*^{n+1} : nilai perkiraan iterasi ke n+1

p_*^{n} : nilai perkiraan iterasi ke n

2.6 Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson adalah metode yang banyak digunakan dari semua formula penempatan akar. Jika nilai awal dari akar adalah x_i, sebuah garis singgung dapat diperluas dari titik $[x_i, f(x_i)]$. Titik dimana garis singgung memotong sumbu x biasanya menunjukkan sebuah taksiran perbaikan dari akar.



Gambar 5. Grafik Metode Newton Raphson

Metode Newton Raphson diturunkan berdasarkan interpretasi geometrik (sebuah metode alternatif yang didasarkan pada Deret Taylor). Seperti pada gambar 5, turunan pertama pada x_i adalah ekuivalen terhadap kemiringan :

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i)-0}{x_i - x_{i+1}} \tag{6}$$

yang dapat diatur kembali menjadi :

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{7}$$

yang dinamakan formula Newton Raphson (Chapra & Canale, 1991).

Metode Newton dapat diperluas untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear dengan lebih dari satu variabel. Jika pada persamaan non linear diperlukan nilai fungsi $f'(x_i)$ untuk setiap iterasinya, maka pada sistem persamaan non linear diperlukan matriks Jacobian $J(x_i)$ untuk setiap iterasinya sebagai pengganti dari

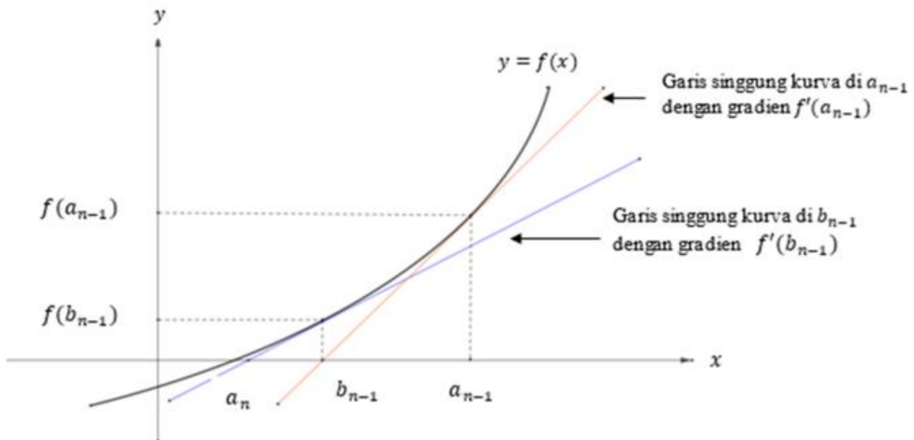
$f'(x_i)$. Sehingga formula dari metode Newton Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan nonlinear sebagai berikut:

$$x_{i+1} = x_i - J^{-1}(x_i)f(x_i) \tag{8}$$

dimana $J(x_i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_i)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_i)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$ dengan syarat $J\ (x_i)$ matriks non singular dan $J\ (x_i)$ merupakan matriks Jacobian (Burden & Faires, 2011).

2.7 Metode Newton Raphson Ganda

Menurut Devitriani et al., (2019), Metode Newton Raphson Ganda merupakan salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan non linear dengan orde konvergensi empat. Untuk menurunkan metode Newton Raphson Ganda digunakan pendekatan secara geometri yang dapat dilihat pada gambar 6.



Gambar 6. Tafsiran Geometri Metode Newton Raphson Ganda

Berdasarkan gambar 6, garis singgung kurva di a_{n-1} dengan gradien garis singgungnya adalah

$$f'(a_{n-1}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a_{n-1}) - 0}{a_{n-1} - b_{n-1}}$$

atau

$$f'(a_{n-1}) = \frac{f(a_{n-1})}{a_{n-1} - b_{n-1}} \tag{9}$$

sedangkan untuk garis singgung kurva di b_{n-1}, dengan gradien garis singgungnya adalah

$$f'(b_{n-1}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b_{n-1}) - 0}{b_{n-1} - a_n}$$

atau

$$f'(b_{n-1}) = \frac{f(b_{n-1})}{b_{n-1} - a_n} \tag{10}$$

Berdasarkan persamaan (9) dan (10) maka diperoleh rumus metode Newton Raphson Ganda sebagai berikut:

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}, \quad f'(a_{n-1}) \neq 0 \\ a_n &= b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}, \quad f'(b_{n-1}) \neq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Pada persamaan non linear $f(x) = 0$, metode Newton Raphson memerlukan turunan fungsi $f(x)$ yaitu $f'(x)$ untuk setiap iterasinya. Sedangkan untuk menyelesaikan persoalan persamaan yang lebih dari satu atau sistem persamaan non linear $F(x) = 0$ metode Newton Raphson memerlukan matriks Jacobian $J(x)$ untuk setiap iterasinya. Matriks Jacobian tersebut digunakan sebagai pengganti turunan fungsi $F(x)$ atau dalam matematika ditulis $F'(x)$, dengan syarat matriks $J(x)$ non singular. Formula metode Newton Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$X_n = X_{n-1} - J^{-1}(X_{n-1})F(X_{n-1}) \tag{12}$$

Berdasarkan persamaan (11) diperoleh rumus metode Newton Raphson Ganda untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= A_{n-1} - J^{-1}(A_{n-1})F(A_{n-1}) \\ A_n &= B_{n-1} - J^{-1}(B_{n-1})F(B_{n-1}) \end{aligned} \tag{13}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun akademik 2022/2023.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini termasuk ke dalam jenis penelitian studi pustaka dengan mencari dan mempelajari referensi teori yang menunjang dengan kasus yang telah ditentukan. Adapun langkah-langkah yang di gunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear.
2. Mengubah sistem persamaan *fully fuzzy* non linear ke dalam bentuk sistem persamaan tegas non linear.
3. Membuat algoritma metode Newton Raphson Ganda untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan *fully fuzzy* non linear lalu mengimplementasikan ke dalam program Matlab.
4. Membuat kesimpulan.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang diperoleh, dapat disimpulkan bahwa untuk mendapatkan solusi dari sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dapat diselesaikan menggunakan metode Newton Raphson Ganda. Solusinya dicapai dengan terlebih dahulu mengubah bentuk sistem persamaan tegas non linear menggunakan operasi aritmatika bilangan *fuzzy* segitiga setelah itu menyusun algoritma dan mengimplementasikannya ke dalam *software* Matlab. Dari ketiga contoh yang diberikan, jumlah iterasinya kurang dari 10 dan galatnya relatif kecil, ini menunjukkan bahwa metode Newton Raphson Ganda merupakan salah satu metode terbaik untuk mencari nilai solusi dari suatu sistem persamaan jika dibandingkan dengan metode Newton Raphson Standar.

5.2 Saran

Saran untuk penelitian selanjutnya, Metode Newton Raphson Ganda di kembangkan untuk memecahkan masalah yang berkaitan dengan bilangan *fuzzy* trapesium.

DAFTAR PUSTAKA

DAFTAR PUSTAKA

Basuki, A. & Ramadijanti, N. 2005. *Metode Numerik dan Algoritma Komputasi*. Andi Offset, Yogyakarta.

Burden, R. L., & Faires, J. D. 2011. Numerical Analysis (M. Julet (ed.); 9th ed.). BROOKS/COLE.

Chapra, S.C. & Canale, R.P. 1991. *Metode Numerik Untuk Teknik dengan Penerapan pada Komputer Pribadi.* Universitas Indonesia (UI-Press), Jakarta.

Devitriani, Kiftiah, M., & Yudhi. 2019. Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear. *Bimaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya.*

Jafarian, A., & Jafari, R. 2019. A new computational method for solving fully fuzzy nonlinear matrix equations. *International Journal of Fuzzy Computation and Modelling*, 2(4), 275–285.

Jafari, R., & Yu, W. 2015. Fuzzy control for uncertainty nonlinear systems with dual fuzzy equations. *Journal of Intelligent and Fuzzy Systems*, 29(3), 1229-1240.

Klir, G.J. & Yuan, B. 1995. *Fuzzy Set and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall International, New Jersey.

Kusumadewi, S. & Purnomo, H. 2010. *Aplikasi Logika Fuzzy untuk Pendukung Keputusan*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Marzuki, C. C., Agustian, A., Hariati, D., Afmilda, J., Husna, N., & Nanda, P. 2018. Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fully Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD). *Jurnal Matematika "MANTIK,"* 4(2), 143–149.

Susilo, F. 2006. *Himpunan dan Logika Kabur serta Aplikasinya*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Triatmodjo, B. 2002. *Metode Numerik Dilengkapi dengan Program Komputer*. Beta Offset, Yogyakarta.