BEBERAPA BENTUK PERSAMAAN DIOPHANTINE DAN SOLUSINYA

(Skripsi)

Oleh

AULIA AYU ANNISA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

SOME FROMS OF THE DIOPHANTINE AND ITS SOLUTION

By

AULIA AYU ANNISA

The Diophantine equation is an equation that adds two or more monomials of one or zero degree. The Diophantine equation is divided into two, namely the linear and non linear Diophantine equations. This research determine a solution to the linear Diophantine equation using the two variables $ax + by = c$, and the three variables $ax + by + cz = d$. As well as the quadratic non linear Diophantine equation $ax^2 + by^2 = c^2$, the Fibonacci identity and Lucas numbers $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ or $\left(-F_n, -F_{n_1}\right)$, and also the Pell equation $x^2 - Dy^2 = 1$.

Keywords: Diophantine equation, Fibonacci number, Lucas number, Pells equation

ABSTRAK

BEBERAPA BENTUK PERSAMAAN DIOPHANTINE DAN SOLUSINYA

Oleh

AULIA AYU ANNISA

Persamaan Diophantine merupakan persamaan yang menjumlahkan dua atau lebih monomial yang berderajat satu atau nol. Persamaan Diophantine terbagi menjadi dua yaitu persamaan Diophantine linear dan non linear. Penelitian ini menentukan solusi dari persamaan Diophantine linear dua variabel $ax + by = c$, dan tiga variabel $ax + by + cz = d$. Selanjutnya, mendapatkan solusi dari persamaan Diophantine non linear kuadrat $ax^2 + by^2 = c^2$, identitas Fibonacci dan bilangan Lucas $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ atau $\left(-F_n, -F_{n_1}\right)$, dan persamaan Pell $x^2 - Dy^2 = 1$.

Kata kunci: Persamaan Diophantine, bilangan Fibonacci, bilangan Lucas, persamaan Pell

BEBERAPA BENTUK PERSAMAAN DIOPHANTINE DAN SOLUSINYA

Oleh

AULIA AYU ANNISA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi	: **BEBERAPA BENTUK PERSAMAAN DIOPHANTINE DAN SOLUSINYA**
Nama Mahasiswa	: ***Aulia Ayu Annisa***
NPM	: **1957031010**
Jurusan / Program Studi	: **Matematika / S1 Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP. 19760411 200012 2 001

Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.
NIP. 19930601 201903 2 021

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Agus Sutrisno, S.Si., M.Si.** ....

1. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Universitas Lampung,

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **15 Juni 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Aulia Ayu Annisa**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1957031010**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **Beberapa Bentuk Persamaan Diophantine dan Solusinya**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 15 Juni 2023

Penulis,

Aulia Ayu Annisa

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Jojog pada tanggal 27 Januari 2001, sebagai anak kedua dari dua bersaudara, putri dari pasangan Bapak Sunanto dan Ibu Siti Muslimah.

Pendidikan Taman Kanak-Kanak (TK) Aisyiyah Bustanul Athfal (ABA) Jojog pada tahun 2005, Pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 1 Jojog pada tahun 2007 dan diselesaikan pada tahun 2013, dilanjutkan Sekolah Menengah Pertama (SMP) di SMP Negeri 2 pekalongan pada tahun 2013, dan menyelesaikan pendidikan tingkat menengah di Madrasah Aliyah Negeri (MAN) 1 Lampung Timur pada tahun 2019.

Pada tahun 2019, penulis melanjutkan pendidikanya di Universitas Lampung sebagai Mahasiswa Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam melalui jalur mandiri. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah bergabung di Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) periode 2020-2021 dan diamanahkan menjadi anggota bidang minat dan bakat. Pada tahun 2022, penulis melakukan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Labuhan Ratu VI, kecamatan Labuhan Ratu, Kabupaten Lampung Timur pada bulan Januari 2022. Penulis juga melakukan kerja praktik di Dinas Tenaga Kerja Provinsi Lampung selama 40 hari pada bulan Juli 2022.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya bersama kesulitan itu ada kemudahan"

(Q.S Al-Insyirah: 5)

"Allah tidak akan membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya"
(Q.S. Al-Baqarah: 286)

"Kelihatannya semua itu mustahil sampai semuanya terbukti"

(Nelson Mandela)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamin,

Puji dan syukur kehadirat Allah Subhanahu Wata'ala atas limpahan nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita Nabi Muhammad Shallallahu 'Alaihi Wasallam

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada:

Keluarga Tercinta

Terimakasih kepada keluargaku untuk semua do'a, kasih sayang, serta nasehat yang diberikan. Terimakasih seluruh keluargaku karena sudah mendukungku dalam segala hal dan selalu memberikan semangat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat – Sahabatku

Terimakasih kepada sahabat – sahabatku atas semua do'a, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT atas segala limpahan rahmat, karunia, serta nikmat yang telah diberikan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan Skripsi dengan judul “Beberapa Bentuk Persamaan Diophantine dan Solusinya*”*.

Dalam penyusunan skripsi, tentu tak lepas dari dukungan, arahan, serta berbagai masukan dari berbagai pihak yang telah membantu. Untuk itu penulis ucapkan rasa hormat dan terimakasih kepada:

1. Alm Bapak Amanto, S.Si., M.Si. selaku pembimbing satu yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan selama proses penyelesaian penyusunan skripsi walaupun tidak sampai selesai.
2. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. selaku pengganti pembimbing satu yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan, selama proses penyelesaian penyusunan skripsi.
3. Ibu Siti Laelatul Chasanah, S.Pd., M.Si. selaku pembimbing kedua yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan selama proses penyelesaian penyusunan skripsi.
4. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku pembahas yang telah memberikan waktu, arahan, dan masukan selama proses penyelesaian penyusunan skripsi.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku ketua jurusan matematika.
6. Bapak, Ibu, kakak, dan seluruh keluarga yang selalu memberikan motivasi, dukungan, semangat, serta doa kepada penulis.
7. Meli, Alenia, Shella, Triya, Roro, Listra, Fitri, mba Yuyun, Sanusi, Nurul, Dinda, Dania, Maya, Nabila, Silvia, Keisa, dan Anis yang telah memberikan

semangat dan menemani hari-hari penulis yang selalu memberikan arahan, saran serta motivasi kepada penulis.

8. Teman – teman KKN Labuhan Ratu 6 untuk segala kebersamaan dan dukungan selama ini.
9. Teman – teman satu bimbingan, Dimiantika, Audrey, Intan, yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.
10. Teman – teman Jurusan Matematika angkatan 2019 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan
11. Seluruh pihak terkait yang telah membantu menyelesaikan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.
12. Muhammad Arif Ramadhan yang selalu ada untuk memberikan semangat dan selalu mendengarkan keluh kesah penulis setiap saat.
13. *Last but not least, I wanna thank me, I wanna thank me for believing in me, I wanna thank me for doing all this hard work, I wanna thank me for having no days off, I wanna thank me for never quitting.*

Penulis menyadari skripsi ini masih jauh dari kata sempurna. Oleh karena itu saran dan kritik yang membangun akan penulis terima dengan senang hati. Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pihak yang memerlukan.

Bandar Lampung, 15 Juni 2023

Aulia Ayu Annisa

DAFTAR ISI

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika memiliki banyak sekali cabang ilmu. Salah satu cabang matematika yang biasa digunakan dalam kehidupan sehari hari adalah aljabar. Aljabar mempelajari fungsi dan persamaan, seperti persamaan linear, persamaan *kuartik*, persamaan Diophantine, dan juga persamaan kuadrat. Persamaan kuadrat adalah sebuah persamaan polinomial (suku banyak) yang mempunyai pangkat tertinggi berorde 2 (Musthofa, 2011).

Persamaan Diophantine merupakan persamaan suku banyak $ax + by = c$, dengan a, b, dan c adalah bilangan bulat. Persamaan Diophantine pertama kali dipelajari oleh Diophantus yang dikenal dengan julukan "bapak dari aljabar". Diophantus merupakan seorang matematikawan yunani yang bermukim di Alexandria yang merupakan pusat pembelajaran Matematika. Semasa hidup, Diophantus terkenal karena karyanya yang berjudul *Arithmetica*. *Arithmetica* adalah suatu pembahasan analitis teori bilangan yang berisi tentang pengembangan aljabar yang dilakukan dengan membuat persamaan. Persamaan-persamaan tersebut dikenal sebagai *Diophantine Equation* (Persamaan Diophantine) (Andreescu, 2010).

Persamaan Diophantine merupakan suatu persamaan yang mempunyai solusi yang merupakan bilangan bulat. Persamaan Diophantine tidak harus berbentuk persamaan linear, bisa saja kuadrat, kubik, atau lainnya jika mempunyai solusi bilangan bulat. Persamaan Diophantine bisa memiliki banyak solusi yang beragam mulai dari 0 sampai tak hingga. Bentuk paling sederhananya yaitu

$$ax + by = c \tag{1.1}$$

dengan a, b adalah koefisien dan c adalah konstanta bulat. Penyelesaian persamaan Diophantine adalah semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan (1.1). Jika d adalah Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dari a dan b, maka agar persamaan mempunyai solusi maka d harus dapat membagi c.

Pada mulanya persamaan Diophantine khususnya persamaan Diophantine linear menggunakan Algoritma Euclid untuk menyelesaikannya. Beberapa metode yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan Diophantine bentuk linear antara lain: metode faktorisasi prima, dengan pertidaksamaan, metode parametrik, metode modulo, metode induksi, dan *Fermat's Method of Infinite Descent* (FMID). Dalam perkembangannya, persamaan Diophantine yang berbentuk kuadrat dan yang mengandung persamaan Pell dapat menggunakan metode matriks dan analisis keterbagian (Andreescu, 2010).

Persamaan Diophantine non linear memiliki bentuk umum $ax^2 + by^2 = c^2$, dengan derajatnya dua. Persamaan non linear Diophantine disebut homogen jika persamaan tersebut bernilai nol. Berdasarkan latar belakang masalah yang telah di uraikan tersebut penulis tertarik untuk melakukan penelitian mencari Solusi penyelesaian dari Persamaan Diophantine.

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah mencari solusi dari beberapa bentuk persamaan Diophantine.

1.3 Manfaat Penelitian

Dari hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan pengetahuan yang komprehensif tentang konsep Persamaan Diophantine.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Untuk melakukan penelitian ini terlebih dahulu, maka harus memahami beberapa konsep yang terkait dengan pokok-pokok yang akan dibahas. Berikut ini akan diberikan pengertian-pengertian dasar yang menunjang dan disajikan dalam definisi berikut:

2.1 Sistem Bilangan Bulat

Definisi 2.1.

Sistem bilangan bulat terdiri atas himpunan $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$ dengan operasi biner penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(\times)$ (petershon & Hashisaki, 1967). Yang memenuhi aksioma berikut:

1. Sifat tertutup terhadap penjumlahan, $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a + b = c \in \mathbb{Z}$.

   Contoh 1 :

   a. $(5 + 7) = 12.$

   b. $(4 + 8) = 12.$

   c. $(6 + 9) = 15.$

2. Sifat tertutup terhadap perkalian, $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $a \times b = c \in \mathbb{Z}$.

   Contoh 2 :

   a. $(6 \times 5) = 30.$

   b. $(7 \times 3) = 21.$

   c. $(4 \times 9) = 36.$

3. Sifat komutatif penjumlahan, $a + b = b + a$.

   Contoh 3 :

   a. $4 + 7 = 11 = 7 + 4.$

   b. $19 + 6 = 25 = 6 + 19.$

   c. $9 + 8 = 17 = 8 + 9.$

4. Sifat komutatif perkalian, $a \times b = b \times a$.

   Contoh 4 :

   a. $12 \times 5 = 60 = 5 \times 12$.

   b. $6 \times 9 = 54 = 9 \times 6$.

   c. $23 \times 10 = 230 = 10 \times 23$.

5. Sifat asosiatif penjumlahan, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   Contoh 5 :

   a. $(5 + 3) + 1 = 9 = 5 + (3 + 1)$.

   b. $(8 + 9) + 5 = 22 = 8 + (9 + 5)$.

   c. $(7 + 4) + 2 = 13 = 7 + (4 + 2)$.

6. Sifat asosiatif perkalian, $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.

   Contoh 6 :

   a. $(5 \times 7) \times 2 = 60 = 5 \times (7 \times 2)$.

   b. $(6 \times 9) \times 4 = 216 = 6 \times (9 \times 4)$.

   c. $(3 \times 8) \times 1 = 25 = 3 \times (8 \times 1)$.

7. Sifat distributif kiri perkalian terhadap penjumlahan, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$.

   Contoh 7 :

   a. $1 \times (4 + 5) = (1 \times 4) + (1 \times 5)$.

   b. $6 \times (8 + 3) = (6 \times 8) + (6 \times 3)$.

   c. $-3 \times (2 + 7) = \big((-3) \times 2\big) + \big((-3) \times 7\big)$.

8. Sifat distributif kanan perkalian terhadap penjumlahan, $(a + b) \times c = (a \times c) + (a \times b)$.

   Contoh 8 :

   a. $(1 + 4) \times 3 = (1 \times 3) + (1 \times 4)$.

   b. $\big((-3) + 6\big) \times 5 = \big((-3) \times 5\big) + \big((-3) \times 6\big)$.

   c. $(8 + 7) \times 2 = (8 \times 2) + (8 \times 7)$.

9. Unsur identitas terhadap penjumlahan. Untuk setiap a, terdapat elemen identitas atau elemen 0 dalam $\mathbb{Z}$ sedimikan sehingga $a + 0 = 0 + a = a$.

   Contoh 9 :

   a. $5 + 0 = 0 + 5 = 5$.

   b. $(-7) + 0 = 0 + (-7) = -7$.

c. $6 + 0 = 0 + 6 = 6$.

10. Unsur invers terhadap penjumlahan. Untuk setiap a, terdapat elemen identitas perkalian atau elemen 0 sedemikian sehingga sehingga $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

    Contoh 10 :

    a. $2 + (-2) = (-2) + 2 = 0$.

    b. $8 + (-8) = (-8) + 8 = 0$.

    c. $7 + (-7) = (-7) + 7 = 0$.

11. Unsur invers terhadap perkalian. Untuk setiap a, terdapat elemen identitas perkalian atau elemen 1 sedemikian sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$.

    Contoh 11:

    a. $23 \times 1 = 1 \times 23 = 23$.

    b. $56 \times 1 = 1 \times 56 = 56$.

    c. $97 \times 1 = 1 \times 97 = 97$.

Definisi 2.1.2

Jika a, b dan k bilangan-bilangan bulat, maka $a - b = k$ jika dan hanya jika $a = b + k$ (Wirasto, R M., 1972).

Contoh 12 :

a. $1 - 5 = -4$ jika dan hanya jika $1 = 5 + (-4)$.

b. $56 - 10 = 46$ jika dan hanya jika $56 = 10 + 46$.

c. $101 - 1 = 100$ jika dan hanya jika $101 = 1 + 100$.

Definisi 2.1.3

Jika a, b dan c bilangan-bilangan bulat, maka $b \neq 0$, maka $a{:}b = c$ jika dan hanya jika $a = bc$ (Wirasto, R M., 1972).

Hasil bagi bilangan-bilangan bulat $(a : b)$ ada (yaitu sebagai bilangan bulat) jika dan hanya jika a kelipatan dari b. Sehingga untuk setiap bilangan bulat a dan b, hasil bagi $(a : b)$ tidak selalu ada (merupakan bilangan bulat). Oleh karena itu pembagian bilangan-bilangan bulat tidak memiliki sifat tertutup.

Contoh 13 :

a. $100 \div 50 = 2$ jika dan hanya jika $100 = 50 \times 2$.
b. $25 \div 5 = 5$ jika dan hanya jika $25 = 5 \times 5$.
c. $(-30) \div 10 = -3$ jika dan hanya jika $-30 = 10 \times (-3)$.

2.2 Keterbagian

Definisi 2.2

Sebuah bilangan bulat b dikatakan terbagi dua atau habis dibagi oleh bilangan bulat $a \neq 0$ jika terdapat bilangan bulat c sehingga $b = ac$, ditulis $a|b$. Notasi $a \nmid b$ digunakan untuk menyatakan b tidak habis terbagi oleh a (Sukirman, 1997).

Contoh 14 :

18 terbagi oleh 3 sebab $18 = 6 \cdot 3$, tetapi 10 tidak terbagi oleh 3 sebab tidak ada bilangan bulat c sehingga $10 = 3c$, atau setiap bilangan bulat c berlaku $10 \neq 3c$. Dalam kasus ini ditulis $6|18$ dan $3 \nmid 10$.

Istilah lain untuk $a|\,b$ adalah a faktor dari b, a pembagi atau b kelipatan dari a. Jika a pembagi b maka $-a$ juga pembagi $b,$ sehingga pembagi suatu bilangan selalu terjadi berpasangan. Jadi dalam menentukan semua faktor dari suatu bilangan bulat cukup ditentukkan faktor-faktor positifnya saja, kemudian tinggal menggabungkan faktor negatifnya. Faktor sederhana yang diturunkan langsung dari definisi adalah $a|0, 1|a,$ dan $a|a$ untuk $a \neq 0$.

Faktor $a|0$ dapat dijelaskan bahwa bilangan 0 selalu habis dibagi oleh bilangan apapun dengan ketentuan tidak nol. Fakta $1|a$ mengatakan bahwa 1 merupakan faktor atau pembagi dari bilangan apapun termasuk juga dengan bilangan 0.

Faktor $a|a$ menyatakan bahwa bilangan tidak nol selalu habis membagi dirinya sendiri dengan hasil baginya adalah 1.

Contoh 15 :

a. $2|18$ karena $2k = 18$ sehingga $k = 9$.
b. $3 \nmid 11$ karena tidak ada bilangan bulat k sehingga $3k = 11$.

2.3 Bilangan Prima dan Komposit

Definisi 2.3

Suatu bilangan bulat $p > 1$ yang tidak mempunyai faktor positif kecuali 1 dan p disebut bilangan prima. Bilangan bulat yang lebih besar dari 1 dan bukan prima disebut bilangan komposit **(**Burton, 2006).

Misal diberikan 10 bilangan bulat positif pertama secara berurutan, maka $2, 3, 5,$ dan 7 termasuk bilangan prima, sedangkan $4, 6, 9,$ dan 10 termasuk bilangan komposit. Catat bahwa 2 adalah satu-satunya bilangan genap yang termasuk bilangan prima sedangkan angka 1 tidak termasuk dalam bilangan prima maupun komposit.

Contoh 16 :

a. 10 bilangan prima pertama adalah $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$.
b. Bilangan komposit antara lain $4, 6, 8, 9, 10,$ ….

Teorema 2.3.1 (Burton, 2006)

Setiap bilangan bulat $n, n > 1$ dapat dibagi oleh suatu bilangan prima.

Bukti:

Jika n bilangan prima maka $n|n$, teorema terbukti. Sekarang ambil n sebagai bilangan komposit, maka n mempunyai faktor selain 1 dan n. Misalkan d_1, dan $d_1|\, n$ maka ada n_1 sehingga $n = d_1 n_1$. karena $d_1 \neq 1$ dan $d_1 \neq n$, maka $1 < n_1 < n$ jika n_1 bilangan prima maka $n_1|n$, teorema terbukti.

■

Teorema 2.3.2 (Burton, 2006)

Jika n bilangan komposit , maka n memiliki faktor k sedemikian sehingga

$$1 < k \leq \sqrt{n}. \tag{2.1}$$

Bukti:

Karena n bilangan komposit maka ada bilangan-bilangan bulat k dan m sehingga $km = n; 1 < k < n$ dan $1 < m < n$. jika k dan m kedua-duanya lebih besar dari $\sqrt{n}$, maka $n = km > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Jadi, tidak mungkin $n > n$. Sehingga, satu diantara k atau m mesti lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$. Misalkan k, yaitu $1 < k \leq \sqrt{n}$, maka k suatu bilangan prima.

■

Teorema 2.3.3 (Burton, 2006

Jika n bilangan komposit, maka n memiliki suatu faktor prima yang lebih kecil atau sama dengan $\sqrt{n}$.

Bukti:

n memiliki faktor k sehingga $1 < k < \sqrt{n}$, maka k mempunyai faktor prima, misalkan p sehingga $p \leq k$. Diperoleh $p \leq k \leq \sqrt{n}$.

■

Teorema 2.3.4 (Burton, 2006)

Jika p bilangan prima dan $p \mid ab$ maka $p \mid a$ atau $p \mid b$.

Bukti :

Karena p bilangan prima, maka p hanya mempunyai faktor-faktor 1 dan p. Sehingga $FPB(a,p) = 1$ atau $FPB(a,p) = p$ untuk bilangan bulat a sebarang. Jika $FPB(a,p) = 1$, karena $p \mid ab$ maka $p \mid b$. Jika $FPB(a,p) = p$ maka $p \mid a$. Jadi terbukti $p \mid a$ atau $p \mid b$.

■

Dari teorema diatas dapat diperluas menjadi :

Jika p bilangan prima dan $p \mid a_1 a_2 a_3 \ldots a_n$ maka $p \mid a_1$ atau $p \mid a_2$ atau $p \mid a_3$ ... atau $p \mid a_n$.

Teorema 2.3.5 (Burton, 2006)

Misal diberikan a dan b adalah bilangan bulat. Dimana keduanya bukan nol, maka a dan b adalah relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $1 = ax + by$.

Bukti :

Akan dibuktikan bahwa a dan b relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $1 = ax + by$.

Jika a dan b adalah relatif prima, sehingga $FPB(a,b) = 1$. Ingat kembali bilangan bulat a dan b dengan a dan b tidak nol maka terdapat bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $FPB(a,b) = ax + by$. Berdasarkan teorema tersebut maka jelas terdapat bilangan bulat x dan y yang mengakibatkan $1 = ax + by$. Maka terdapat beberapa kemungkinan dari x dan y dan $d = FPB(a,b)$. Karena $d|a$ dan $d|b$, maka haruslah $d|(ax + by)$atau $d|1$. Sehingga berakibat $d = 1$ dikarenakan d adalah bilangan bulat positif. Jadi, terbukti bahwa a dan b relatif prima jika dan hanya jika ada bilangan bulat x dan y sedemikian sehingga $1 = ax + by$.

■

Bilangan prima, sama halnya dengan bilangan bulat, mempunyai jumlah yang tak berhingga. Bukti dari pernyataan ini terdapat dalam *Euclid's Element. Euclid* menyatakan bahwa terdapat lebih banyak bilangan prima daripada sejumlah berhingga bilangan prima yang diberikan. Sebagai bukti, akan digunakan pembuktian terbaik atau membuktikan kontradiksi dari pernyataan tersebut. Diasumsikan bahwa ada sejumlah terbatas bilangan prima $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$. Lalu, dilakukan operasi sebagai berikut:

$$Q = p_1, p_2, \ldots p_{n+1}$$

Didapat sebuah bilangan baru Q yang merupakan hasil perkalian seluruh bilangan prima ditambahkan dengan bilangan 1(satu). Menurut Teori Fundamental Aritmatik, seluruh bilangan bulat positif dapat difaktorkan menjadi satu atau lebih bilangan prima. Dengan dasar tersebut, Q dapat difaktorkan menjadi satu atau lebih bilangan prima. Tidak ada satupun bilangan prima (yang telah diasumsikan berjumlah berhingga) yang dapat habis membagi Q karena apapun bilangan primanya, misalkan Pj, Q dibagi Pj selalu akan menghasilkan misalkan 1.

Berdasarkan pemaparan diatas terdapat suatu bilangan prima baru yang tidak termasuk dalam bilangan prima $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$, yaitu Q sendiri bila prima atau faktor prima dari Q. kesimpulan ini kontradiktif dengan asumsi sebelumnya bahwa ada sejumlah berhingga bilangan prima. Oleh karena itu, bilangan prima berjumlah tak berhingga.

Teorema 2.3.6 (Burton, 2006)

Bilangan prima memiliki jumlah yang tak berhingga.

Bukti:

Asumsikan sebaliknya bahwa hanya terdapat sejumlah bilangan prima yang berhingga yang dituliskan sebagai $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$ dan himpunan.

$$m = p_1 p_2 \dots p_{n+1}$$

Jika m dibagi dengan p_1 maka hasilnya akan selalu menyisakan 1, maka dari itu tidak terdapat p_1 yang membagi habis m. berdasarkan teorema fundamental, m adalah prima lainnya atau m adalah komposit yang habis dibagi oleh prima berbeda dari $p_1, p_2, p_3, \dots p_n$.. Hal ini kontradiksi dengan asumsi awal bahwa hanya terdapat sejumlah bilangan prima yang berhingga. Jadi terbukti bahwa bilangan prima memiliki jumlah yang tak berhingga.

∎

2.4 Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Definisi 2.4.1

Suatu bilangan bulat c adalah faktor persekutuan dari a dan b jika dan hanya jika $c|a$ dan $c|b$ (Graham, 1975).

Definisi 2.4.2

Jika a atau b bilangan-bilangan bulat yang tidak nol, d adalah faktor persekutuan terbesar dari a dan b (ditulis (a, b)) jika dan hanya jika d faktor persekutuan dari a atau b, jika c faktor persekutuan dari a dan b, maka $c \leq d$ (Burton, 2006).

Dari definisi di atas dapat dinyatakan bahwa $d = (a, b)$ jika dan hanya jika

1. $d|a$ dan $d|b$, dan
2. Jika $c|a$ dan $c|b$ maka $c \leq d$.

Syarat 1. menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan dari a dan b. Sedangkan syarat 2. menyatakan bahwa d adalah faktor persekutuan terbesar.

2.5 Modulo

Definisi 2.5.1.

Misalkan a merupakan bilangan bulat dan m merupakan bilangan bulat > 0. Operasi $a \; mod \; m$ (dibaca "a modulo m") memberikan sisa jika a dibagi dengan m (Irawan, 2014).

Catatan : $a = p \; mod \; m$ sedemikian sehingga $a = mq + p$, dengan $0 \leq p < m$. Bilangan m disebut modulus atau modulo, dan hasil dari aritmetika modulo m terletak di dalam himpunan $\{0,1,2, \dots, m-1\}$.

Contoh 17 :

a. $24 \; mod \; 7 = 3$ artinya $24 = 7 \cdot 3 + 3$.

b. $27 \; mod \; 3 = 0$ artinya $27 = 3 \cdot 9 + 0$.

2.6 Kekongruenan

Kekongruenan merupakan cara lain untuk menelaah keterbagian dalam himpunan bilangan bulat, khususnya keterbagian bilangan bulat besar.

Definisi 2.6.1

Jika m suatu bilangan bulat positif maka a kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \equiv b (mod \; m)$) jika dan hanya jika m membagi $(a - b)$ atau ditulis $a = mk + b$. Jika m tidak membagi $(a - b)$ maka dikatakan bahwa a tidak kongruen dengan b modulo m (ditulis $a \not\equiv b (mod \; m)$) (Dudley, 1969).

Contoh 18:

a. $25 \equiv 1 \; (mod \; 4)$ karena $(25 - 1)$ terbagi oleh 4

b. $31 \equiv 1 \; (mod \; 6)$ karena $(31 - 1)$ terbagi oleh 6

c. $31 \not\equiv 4 \; (mod \; 6)$ karena $(31 - 4)$ tidak terbagi oleh 6

Dapat ditulis juga bahwa jika $m > 0$ maka $m | (a - b)$ jika dan hanya jika $a \equiv b \; (mod \; m)$. $m | (a - b)$ berarti terdapat bilangan bulat k sehingga $(a - b) = mk$.

Sehingga $a \equiv b\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $a - b = mk$ untuk suatu bilangan bulat k. Karena $a - b = mk$ berarti sama dengan $a = mk + b$, sehingga $a \equiv b\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika $a = mk + b$.

Contoh 19.

$26 \equiv 4\ (mod\ 11)$ artinya $26 = \ 11 \cdot 2 + 4$.

Teorema 2.6.1(Dudley, 1969)

$a \equiv b\ (mod\ m)$ jika dan hanya jika ada bilangan bulat k sehingga $a = mk + b$.

Bukti :

Jika a dan m bilangan bulat dan $m > 0$, maka a dinyatakan sebagai $a = mq + r$ dengan $0 \leq r < m$ berarti $a – r = mq$, yaitu $a \equiv r(\text{mod}\ m)$. Karena $0 \leq r < m$, berarti ada m buah pilihan untuk r, yaitu $0,1,2,3, \ldots . (m - 1)$. Jadi setiap bilangan bulat akan kongruen modulo m dengan tepat satu di antara $0,1,2,3. \ldots , (m - 1)$.

■

Contoh 20 :

a. $17 \equiv 2(mod\ 3)$ artinya 3 habis membagi $17 – 2 = \ 5$.

b. $12 \not\equiv 2(mod\ 7)$ artinya 7 tidak habis membagi $12 - 2 = 10$.

Kekongruenan $a \equiv b(mod\ m)$ dapat pula dituliskan dalam hubungan $a = b + mk$, dengan k adalah bilangan bulat.

Contoh 21:

a. $17 \equiv 2(mod\ 3)$ dapat ditulis sebagai $17 = 2 + 5.3$.

b. $–7 \equiv 15\ (mod\ 11)$ dapat ditulis sebagai $–7 = 15 + (–2)11$.

Contoh 22 :

Beberapa hasil operasi dengan relasi kongruensi berikut:

a. $23\ mod\ 5 = 3$ dapat ditulis sebagai $23 \equiv 3\ (mod\ 5)$.

b. $27\ mod\ 3 = 0$ dapat ditulis sebagai $27 \equiv 0(mod\ 3)$.

Berdasarkan pengertian kongruen terdapat pada Definisi 2.3.1, maka berikut ini akan diberikan teorema tentang kongruen.

Teorema 2.3.1.

Misalkan m adalah bilangan bulat positif.

1. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan c adalah sebarang bilangan bulat maka
   a. $(a + c) \equiv (b + c)\ (mod\ m)$.
   b. $ac \equiv bc(mod\ m)$.
2. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan $c \equiv d\ (mod\ m)$, maka
   a. $(a + c) \equiv (b + d)(mod\ m)$.
   b. $ac \equiv bd(mod\ m)$.

Bukti:

1. Jika $a \equiv b(mod\ m)$ dan c adalah sebarang bilangan bulat maka
   a. $a \equiv b\ (mod\ m)$ berarti $a = b + km$ untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$. Untuk sebarang $c \in \mathbb{Z}$, diperoleh $a + c = b + c + km$
   $\Leftrightarrow a + c = (b + c)(mod\ m)$
   b. $a \equiv b(mod\ m)$ berarti: $a = b + km$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.
   $\Leftrightarrow a - b = km$.
   $\Leftrightarrow (a - b)c = ckm$.
   $\Leftrightarrow ac - bc = ckm$.
   $\Leftrightarrow ac = bc + ckm$.
   $\Leftrightarrow ac = bc + lm$, dengan $l = ck$.
   $\Leftrightarrow ac \equiv bc\ (mod$ m).
2. a. $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow a = b + k_1 m$, untuk suatu $k_1 \in \mathbb{Z}$.
   $c \equiv d(mod\ m) \Leftrightarrow c = d + k_2 m$, untuk suatu $k_2 \in \mathbb{Z}$.
   $\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + (k_1 + k_2)m$.
   $\Leftrightarrow (a + c) = (b + d) + km \qquad (k = k_1 + k_2)$.
   $\Leftrightarrow (a + c) \equiv (b + d)(mod\ m)$.
   b. $a \equiv b(mod\ m) \Leftrightarrow a = b + mk$, untuk suatu $k \in \mathbb{Z}$.
   $c \equiv d(mod\ m) \Leftrightarrow c = d + ml$, untuk suatu $l \in \mathbb{Z}$.
   $\Leftrightarrow a \cdot c = (b + mk)(d + ml)$.
   $\Leftrightarrow a \cdot c = bd + blm + kdm + klm^2$.
   $\Leftrightarrow a \cdot c = bd + (bl + kd + klm)m$.
   $\Leftrightarrow a \cdot c \equiv bd(\text{mod}\ m)$.

■

2.7 Persamaan Diophantine

Definisi 2.7

Persamaan Diophantine merupakan suatu persamaan yang mempunyai solusi yang merupakan bilangan bulat dengan bentuk sederhana

$$ax + by = c$$

dengan a, b adalah koefisien dan c adalah konstanta bulat.

Persamaan Diophantine adalah persamaan suku banyak atas bilangan bulat Z dalam n variabel dengan solusi bulat, ditulis sebagai

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{2.2}$$

dengan f adalah fungsi n variabel dengan $n \geq 2$ (Andreescu, 2010).

Contoh 23 :

a. Persamaan diophantine $738x + 621y = 45$ dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut.

   $738 = 1 \times 621 + 117.$

   $621 = 5 \times 117 + 36.$

   $117 = 3 \times 36 + 9.$

   $36 = 4 \times 9 + 0.$

   Jadi, $(738{,}621) = 9$. Karena $9|45$ maka persamaan tersebut memiliki penyelesaian.

   $9 = 117 - 3.36.$

   $\quad = 117 - 3(621 - 5 \times 117).$

   $\quad = -3 \times 621 + 16(738 - 621).$

   $\quad = 16 \times 738 - 19 \times 621.$

   Kalikan kedua ruas dengan 5

   $45 = 80 \times 738 - 95 \times 621.$

   Didapat $x_0 = 80$ dan $y_0 = -95$.

   Penyelesaian umumnya adalah

   $x = 80 + \left(\frac{621}{9}\right) k = 80 + 69k.$

   $y = -95 - \left(\frac{738}{9}\right) k = -95 - 82k.$

b. Bilangan bulat positif x dan y yang memenuhi $7x + 5y = 100$ dapat dicari dengan cara berikut.

$(7,5) = 1$. Karena $1|100$ maka didapat penyelesaian dari persamaan diatas.

$1 = 3.7 - 4.5$.

$100 = 7 \times 300 + 5(-400)$. Di dapat $x_0 = 300$ dan $y_0 = -400$.

Maka penyelesaian umumnya adalah sebagai berikut:

$x = 300 + 5\,k$

$y = -400 - 7\,k$

Karena yang dicari dari persamaan tersebut adalah solusi positif, maka

$300 + 5k > 0$ dan$-400 - 7k > 0$, yaitu $-60 < k < -57\frac{1}{7}$

Sehingga didapatkan $k = -58$ dan $k = -59$.

Jadi persamaan diophantine $7x + 5y = 100$ mempunyai dua solusi positif yang tepat yaitu $x_1 = 10, y_1 = 6\ dan\ x_2 = 5, y_2 = 13$.

c. Bilangan bulat positif dari persamaan $12x + 5y = 125$ dapat dicari dengan cara berikut.

$12x + 5y = 125$.

$\Leftrightarrow 12x = 5(25 - y)$, maka $5|x$

Misalkan $x = 5$, maka $5y = 65$, diperoleh $y = 13$. Sehingga (5,13) merupakan solusi khusus. dengan rumus tersebut didapat solusi umum yaitu:

$x = 5 + 5t,\ y = 13 - 12t$, dengan t adalah bilangan bulat.

Karena $x \geq 1$, maka $5 + 5t \geq 1, 5t \geq -4 \rightarrow t \geq -\frac{4}{5}$ atau $t \geq 0$.

Tetapi karena $y \geq 1, 13 - 12t \geq 1 \rightarrow t \leq \frac{13}{12} \leq 1$. Berarti $t = 0$ atau $t = 1$, terdapat dua solusi yaitu

Untuk $t = 0$, maka $x = 5, y = 13$ dan untuk $t = 1$, maka $x = 10, y = 1$.

2.8 Bilangan Kuadrat Sempurna

Berikut ini akan dibahas tentang bilangan kuadrat sempurna yang diambil dari Burton, 2006.

Definisi 2.8

Bilangan bulat positif n dikatakan bilangan kuadrat sempurna jika terdapat bilangan bulat m sedemikian sehingga $n = m^2$.

Contoh 24 :

a. 9 bilangan kuadrat sempurna, sebab $9 = 3^2$.
b. 0,25 bilangan kuadrat tidak sempurna, sebab $0{,}25 = (0{,}5)^2$ dan 0,5 bukan bilangan bulat.

Contoh 25.

Bilangan positif n sehingga $n + 20$ dan $n – 21$ merupakan bilangan kuadrat sempurna dapat dicari dengan cara berikut.

Misalkan $n + 20 = a^2$ dan $n - 21 = b^2$, dengan a dan b adalah bilangan bulat positif. Maka diperoleh: $41 = a^2 - b^2 = (a– b)(a + b)$. Karena 41 prima diperoleh kemungkinan :

$a – b = 1$ $\quad\quad$ $a – b = 41$

$a + b = 41$ $\quad\quad$ $a + b = 1$

karena a dan b $2a = 42$, $a = 21$, $b = 20$. Maka $n = 21^2 - 20 = 421$ tidak memenuhi.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2022/2023, bertempat di Jurusan Matematika Fakultas matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah-langkah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan referensi untuk mendukung topik pembahasan berupa jurnal, buku-buku, dan literatur dari internet yang berhubungan dengan penelitian ini.
2. Menjabarkan definisi-definisi, teorema, dan lemma terkait pembuktian tentang beberapa bentuk dari persamaan diophantine
3. Menguraikan konsep persamaan diophantine yang berlaku di dalamnya.
4. Menarik kesimpulan tentang persamaan yang telah dibuktikan.

V. SIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Persamaan diophantine merupakan persamaan yang menjumlahkan dua atau lebih monomial yang berderajat satu atau nol. Dalam persamaan diophantine terbagi menjadi dua yaitu persamaan diophantine linear dan persamaan diophantine non linear. Untuk mencari Solusi persamaan diophantine dapat menggunakan beberapa metode yaitu:

1. Metode dua variabel $ax + by = c$ memiliki solusi jika dan hanya jika $d = FPB(a, b)$ membagi c. Jika $d|c$ maka semua solusi yang lain akan diberikan oleh $x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t, y = y_0 - \left(\frac{d}{b}\right)t$ dengan $t \in z$.
2. Metode tiga variabel, $ax + by + cz = d$ memiliki solusi jika dan hanya jika d merupakan kelipatan $FPB(a, b, c)$.
3. Metode non linear kuadrat, $x^2 - Dy^2 = 1$ dengan D merupakan bilangan asli kuadrat sempurna solusinya adalah $x = Dy, y = \frac{x}{d}$.
4. Metode identitas bilangan Fibonacci dan bilangan Lucas. didapatkan Solusi bilangan bulat dengan persamaan $x^2 - xy - y^2 = -1$ adalah $(x, y) = (F_n, F_{n-1})$ atau $(x, y) = (-F_n, -F_{n-1})$ dengan n bilangan genap.
5. Metode persamaan pell dalam bentuk $x^2 - Dy^2 = 1$ memiliki solusi dalam bentuk bilangan bulat positif jika (x_1, y_2)dan (x_2, y_2) dengan $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{Z}^+$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dilanjutkan dengan menentukan solusi persamaan Diophantine menggunakan metode yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Andreescu, T., Andica, D., & Cucurezeanu, I. (2010). An Introduction to Diophantine Equations. *Journal of Integer Squences*, hal 4.

Burton, D. M. (2006). *The History Of Mathematics An Introduction, Sixth Edition.* McGraw-Hill, New York.

Dudley, Underwood. (1969). *Elementary Number Theory.* San Francisco: W.H. Freman and Company.

Graham, Malcolm. (1975). *Modern Elementary Mathematic.* New York : Harcort Brace Jonanovich.

Irawan, Hengky, W., Hijriyah., Nurul & Habibi., & Riza, A. (2014). *Pengantar Teori Bilangan.* Malang: Uin Malik Ibrahim.

Musthofa. (2011). *Teori Bilangan.* Universitas Negeri Yogyakarta.

Nabila., A., Yanita., & Nazra., A. (2018). Penentuan Solusi Persamaan Pell. *Jurnal Matematika Unand*, 16.

Petershon., J. A., & Hashiasaki., J. (1967). *Theory Of Arithmetics.* New York;Jhon Willy & Sons,.

Puspitasari, A., Sumanto, Y.D., & Widowati. (2017). *Solusi Persamaan Diophantine dengan Identitas Bilangan Fibonacci dan Bilangan Lucas*.

Sukirman, M.P. (1997). *Ilmu Bilangan.* Jakarta: Universitas Terbuka.

Wirasto., R. M. (1972). *Pengantar Ilmu Bilangan.* Yogyakarta: Yayasan Pembina Fkie IKIP Yogyakarta.