BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MATAHARI

DAN BARBELNYA

(Skripsi)

Oleh
LISTRA DEWI
1957031007

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRAK

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MATAHARI DAN BARBELNYA

Oleh

LISTRA DEWI

Graf roda, W_n, $n \geq 3$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan n titik pada siklus ke titik pusat p. Misalkan $v_1, v_2, \dots, v_n$ adalah titik-titik yang berderajat 3 di W_n, sedemikian sehingga sisinya $pv_1, pv_2, \dots, pv_n$, v_1v_2, $v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ dan v_1v_n. Graf Bunga Matahari $S(W_n)$ adalah graf yang dibentuk dari graf roda W_n dan n titik tambahan $w_1, w_2, \dots, w_n$ setiap titik w_i bertetangga dengan v_i, v_{i+1}, $i = 1,2, \dots, n$ dengan $v_{n+1} = v_1$. Graf barbel Bunga Matahari $B_{S(W_n)}$ adalah graf yang terbentuk dari dua graf Bunga Matahari dan dihubungkan oleh sebuah jembatan. Pada penelitian ini, dikaji tentang bilangan kromatik lokasi graf Bunga Matahari dan graf barbel Bunga Matahari untuk $n \geq 3$. Bilangan kromatik lokasi graf Bunga Matahari $\chi_L(S(W_n))$ adalah 4 untuk $n = 3$; $\chi_L(S(W_n))$ adalah 5 untuk $4 \leq n \leq 7$; dan $\chi_L(S(W_n))$ adalah 6 untuk $8 \leq n \leq 10$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel Bunga Matahari $\chi_L(B_{S(W_n)})$ adalah 5 untuk $n = 3$; $\chi_L(B_{S(W_n)})$ adalah 6 untuk $4 \leq n \leq 7$; dan $\chi_L(B_{S(W_n)})$ adalah 7 untuk $8 \leq n \leq 10$.

Kata kunci: bilangan kromatik lokasi, graf Bunga Matahari, graf barbel

ABSTRACT

THE LOCATING CHROMATIC NUMBER OF SUNFLOWER GRAPH AND ITS BARBELL

By

LISTRA DEWI

A wheel W_n, $n \geq 3$, is a graph obtained by joining all vertices of a cycle on n vertices to a further vertex center p. Let us denote the vertices of degree 3 in W_n by $v_1, v_2, \dots, v_n$ such that the edges of W_n are $pv_1, pv_2, \dots, pv_n$, v_1v_2, $v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ dan v_1v_n. A Sunflower graph $S(W_n)$ is a graph constructed from a wheel W_n and n additional vertices $w_1, w_2, \dots, w_n$ where w_i is adjacent to v_i, and v_{i+1}, $i = 1, 2, \dots, n$ with $v_{n+1} = v_1$. The barbell of sunflower graph, denoted by $B_{S(W_n)}$ is a graph constructed from two sunflower graphs, connected by a bridge. In the results, we determined the locating chromatic number of the sunflower graph its barbell. The locating chromatic number of the sunflower graph, $\chi_L(S(W_n))$ is 4 for $n = 3$; $\chi_L(S(W_n))$ is 5 for $4 \leq n \leq 7$; and $\chi_L(S(W_n))$ is 6 for $8 \leq n \leq 10$. The locating chromatic number for the barbell of sunflower graph, $\chi_L(B_{S(W_n)})$ is 5 for $n = 3$; $\chi_L(B_{S(W_n)})$ is 6 for $4 \leq n \leq 7$, and $\chi_L(B_{S(W_n)})$ is 7 for $8 \leq n \leq 10$.

Keywords: locating chromatic number, sunflower graph, barbell graph

BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MATAHARI DAN BARBELNYA

Oleh

Listra Dewi

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi : **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MATAHARI DAN BARBELNYA**

Nama Mahasiswa : Listra Dewi

Nomor Pokok Mahasiswa : **1957031007**

Program Studi : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.	**Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.**
NIP. 19760411 200012 2 001	NIP. 19631108 198902 2 001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

   Ketua : **Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.** ....

   Sekretaris : **Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D.** ....

   Penguji

   Bukan Pembimbing : **Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc.** ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi: **21 Juni 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama Mahasiswa	: **Listra Dewi**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1957031007**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **BILANGAN KROMATIK LOKASI GRAF BUNGA MATAHARI DAN BARBELNYA**

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 21 Juni 2023
Penulis,

METERAI TEMPEL
CA9AKX532283863

Listra Dewi
NPM. 1957031007

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Listra Dewi lahir di Jakarta pada 27 November 2000. Penulis merupakan anak pertama dari tiga bersaudara dari pasangan Bapak Wanson Simbolon dan Ibu Raulina Aruan.

Penulis mengawali pendidikan di Taman Kanak-Kanak (TK) Dharma Wanita Sidomukti pada tahun 2006 sampai dengan 2007. Kemudian menempuh pendidikan Sekolah dasar (SD) di SD Negeri 02 Sidomukti pada tahun 2007 sampai dengan 2013. Kemudian melanjutkan ke Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 1 Abung Semuli pada tahun 2013 sampai dengan 2016. Selanjutnya ke Sekolah Menengah Atas di SMA Xaverius Pringsewu pada tahun 2016 sampai dengan 2019. Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Program Studi S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Mandiri Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SMMPTN).

Pada tahun 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Bank Rakyat Indonesia (BRI) Kantor Cabang Kotabumi. Pada tahun yang sama, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Desa Betengsari Kecamatan Jabung, Kabupaten Lampung Timur, sebagai bentuk pengabdian kepada masyarakat.

KATA INSPIRASI

Takut akan TUHAN adalah permulaan pengetahuan tetapi orang bodoh menghina hikmat dan didikan.

Amsal 1:7

Aku tahu, bahwa Engkau sanggup melakukan segala sesuatu, dan tidak ada rencana-Mu yang gagal.

Ayub 42:2

PERSEMBAHAN

Puji dan syukur kepada Tuhan Yesus Kristus untuk segala berkat dan kasih karunia-Nya, sehingga saya masih diberi kesempatan untuk menyelesaikan studi ini.

Saya persembahkan skripsi ini kepada:

Kedua Orang Tua Tercinta
Terimakasih atas cinta kasih yang selalu mendoakan, medukung, dan selalu memberikan semangat kepada anak-anaknya.

Adik yang kusayangi
Yang selalu membuatku tertawa dan kesal

Keluarga Besar
Terimakasih atas dukungan dan cinta kasih kalian.

Sahabat dan teman-teman yang kusayangi
Terimakasih atas dukungan dan semangat yang kalian berikan, semoga hubungan pertemanan kita selalu baik.

Almamaterku Universitas Lampung
Terimakasih untuk pengalaman dan kenangan yang sangat berharga

SANWACANA

Puji Syukur penulis ucapkan kepada Tuhan Yesus Kristus atas segala berkat, kasih dan karunia-Nya yang melimpah sehingga penulis mampu menyelesaikan skripsi yang berjudul “Bilangan Kromatik Lokasi Graf Bunga Matahari dan Barbelnya”. Skripsi ini sebagai salah satu syarat untuk mendapatkan gelar Sarjana Matematika pada jurusan Matematika FMIPA di Universitas Lampung.

Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku dosen pembimbing utama yang senantiasa membimbing, memberi waktu serta pemikiran dan memberikan arahan serta saran kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku dosen pembimbing kedua dan dosen pembimbing akademik. Terima kasih telah memberikan waktu, saran, dan arahan serta nasihat yang membantu penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
3. Bapak Prof. Dr. La Zakaria, S.Si., M.Sc., selaku dosen pembahas pada ujian skripsi yang telah memberikan saran dan nasihat yang membantu menyelesaikan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Ketua jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku dekan FMIPA Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff, dan karyawan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung.

7. Untuk Bapak Wanson Simbolon dan Mama Raulina Aruan yang selalu memberikan semangat, dukungan serta doa kepada penulis. Terima kasih untuk segalanya dan semoga saya dapat selalu membanggakan kalian.
8. Adik-adikku Gabriel Nata Nael Simbolon dan Aldo Velino Simbolon yang juga memberikan doa dan perhatian serta semangat yang tak terhingga kepada penulis.
9. Gresia Andriani, Asteria Anggraini Sianturi, dan Ayu Widiastuti terima kasih sudah mendoakan dan menyemangati penulis dalam masa perkuliahan.
10. Theresia Anggrita Cristy, Vita Yubelina Himan, Brigita Natasya, Yohana Oktavia, Vinsencia Themi, dan Ega Octaviah terima kasih atas semangat, dukungan, dan cinta kasih kalian.
11. Sahabat-sahabat ku tercinta, Shella, Meli, Aulia Ayu, Alenia, Aulia Zahro, Eccha, Poetri Hanna, Wulan, Qorry, Hijri, Aprici, Deswita, Upik, Febby, Roro, Tria, dan Nada yang selalu memberikan semangat, membantu serta memberikan keceriaan dalam masa perkuliahan hingga penyusunan skripsi ini.
12. Teman-teman KKN desa Beteng Sari. Terima kasih segala pengalaman dan kebersamaanya.
13. Teman-teman Matematika 2019 terima kasih atas kebersamaan serta keceriaan yang telah diberikan kepada penulis selama menempuh pendidikan di Universitas Lampung.
14. Seluruh pihak yang telah membantu dalam penyusunan skripsi ini yang tidak dapat disebutkan satu persatu.

Semoga Tuhan membalas semua pihak yang telah membantu dalam menyelesaikan skripsi ini dan semoga skripsi ini bermanfaat bagi yang membaca.

Bandar Lampung, 21 Juni 2023
Penulis

Listra Dewi

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Teori graf memiliki sejarah yang dimulai pada abad ke-19 hingga saat ini. Menurut sejarah, lahirnya teori graf bermula dari masalah tujuh jembatan Königsberg di Prusia, Jerman. Sebuah jembatan yang menghubungkan tanah yang dipisahkan oleh sungai pada tahun 1736. Ahli matematika Swiss Leonhard Euler, yang dapat menemukan jawaban atas masalah ini dengan memodelkan masalah secara grafis. Metode ini menjawab pertanyaan Euler yaitu tidak ada cara untuk melintasi tujuh jembatan untuk menghubungkan empat wilayah kota untuk melewati titik awal, sehingga masalah mudah diselesaikan.

Konsep bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002. Bilangan kromatik lokasi ditentukan berdasarkan banyaknya minimum warna yang digunakan dalam pewarnaan lokasi dengan kode warna yang berbeda untuk setiap titik pada graf tersebut. Bilangan kromatik dinotasikan dengan $\chi(G)$. Pembahasan mengenai bilangan kromatik lokasi telah banyak dipelajari. Chartrand dkk., berhasil mengkaji graf pohon berorde $n \geq 5$ dengan bilangan kromatik lokasi yang bervariasi dari 3 sampai $(n-1)$, pada tahun 2003.

Bilangan kromatik amalgamasi pada graf bintang tak seragam untuk $n \geq 2$ ditemukan oleh (Asmiati dkk., 2011), bilangan kromatik lokasi n amalgamasi bintang yang dihubungkan oleh lintasan (Asmiati dkk., 2017), bilangan kromatik lokasi *disjoint union* dan beberapa graf bintang ganda (Asmiati dkk., 2019a), bilangan kromatik lokasi graf kembang api (Asmiati dkk., 2012), menentukan bilangan kromatik lokasi dari lintasan barbel shadow (Asmiati dkk., 2021), selanjutnya bilangan kromatik lokasi graf barbel tertentu (Asmiati dkk., 2018).

Bilangan kromatik lokasi pada sisi roda dikaji oleh (Purwasih dkk., 2013), bilangan kromatik lokasi untuk subdivisi graf barbel yang memuat graf Petersen umum dikaji oleh (Asmiati dkk., 2019b). Selanjutnya, bilangan kromatik lokasi graf origami barbel tertentu (Irawan dkk., 2021).

Graf Bunga Matahari adalah graf yang memuat graf roda dengan satu titik berderajat n, n titik berderajat 5 dan n titik berderajat 2, dinotasikan dengan $S(W_n)$. Sedangkan, graf barbel Bunga Matahari terbentuk dari graf Bunga Matahari yang dihubungkan dengan sebuah sisi sebagai jembatan. Graf barbel Bunga Matahari dinotasikan dengan $B_{S(W_n)}$.

Pada pembahasan bilangan kromatik lokasi graf ini belum ada kajian pada graf Bunga Matahari $S(W_n)$ untuk $n \geq 3$, sehingga penulis tertarik untuk membahas bilangan kromatik graf Bunga Matahari dan graf barbel Bunga Matahari.

1.2 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf Bunga Matahari $S(W_n)$ dan barbel dari graf Bunga Matahari $B_{S(W_n)}$ untuk $3 \leq n \leq 10$.

1.3 Manfaat Penelitian

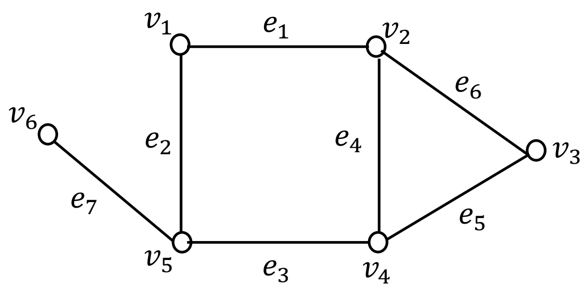
Manfaat Penelitian adalah:

1. Memberikan pemahaman mengenai bilangan kromatik lokasi graf, khususnya graf Bunga Matahari dan barbelnya.
2. Sebagai sumber referensi bagi pembaca atau untuk penelitian selanjutnya tentang bilangan kromatik lokasi graf Bunga lainnya.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar dan Kelas-kelas Graf

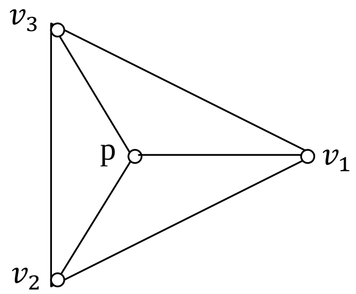
Pada bagian ini diberikan konsep dasar tentang graf yang diambil dari (Deo, 1989). Graf G didefinisikan sebagai himpunan terurut $(V(G), E(G))$, dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik-titik G, $V(G) \neq \emptyset$ dan $E(G)$ menyatakan pasangan tak terurut $V(G)$, yang anggotanya disebut sisi (*edge*).



Gambar 2.1 Contoh graf dengan 6 titik dan 7 sisi

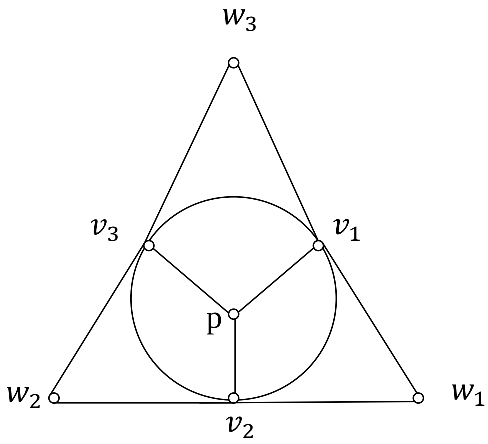
Gambar 2.1 merupakan graf $G(V, E)$ dengan $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ adalah himpunan titik dan $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ adalah himpunan sisi. Derajat (*degree*) adalah banyak sisi yang menempel pada titik v dari suatu graf G, dinotasikan dengan $d(v)$. Pada Gambar 2.1 derajat pada setiap titik sebagai berikut $d(v_1) = 2$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 3$, $d(v_5) = 3$, dan $d(v_6) = 1$. Lintasan (*path*) adalah *walk* yang melewati titik-titik yang berbeda, dimana titik-titik tersebut dilewati tepat satu kali pada suatu graf. Contoh lintasan pada Gambar 2.1 adalah $v_1, e_1, v_2, e_6, v_3, e_5, v_4, e_3, v_5, e_8, v_6$. Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi yang dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap titik menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya pada graf. Contoh jalan pada Gambar 2.1 adalah $v_5, e_2, v_1, e_1, v_2, e_6, v_3, e_5, v_4,$ e_3, v_5, e_7, v_6.

Suatu graf G dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda. Berikut ini diberikan definisi dari beberapa graf terhubung:



Gambar 2.2 Graf Roda W_3

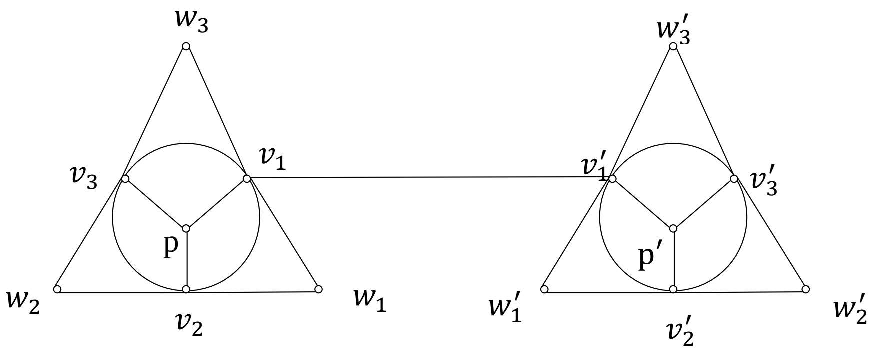
Graf roda dilambangkan dengan $W_n = K_1 + C_n$ dimana $n \geq 3$ adalah graf yang dibentuk oleh graf siklus C_n dengan banyak titik $n \geq 3$ (Purwasih dkk, 2013). Graf roda W_n, $n \geq 3$ adalah graf yang diperoleh dengan menghubungkan n titik pada siklus ke titik pusat p. Misalkan terdapat titik berderajat 3 di W_n dinotasikan dengan $v_1 v_2, \dots, v_n$ sehingga sisi-sisinya adalah $pv_1, pv_2, \dots, pv_n$, $v_1 v_2$, $v_2 v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ dan $v_1 v_n$.



Gambar 2.3 Graf Bunga Matahari $S(W_3)$

Graf Bunga Matahari adalah graf yang dibentuk dari graf roda W_n dan n titik tambahan (*additional vertices*) $w_1, w_2, \dots, w_n$ setiap titik w_i bertetangga dengan v_i dan $v_{i+1}, i = 1,2, \dots, n$ dengan $v_{n+1} = v_1$. Graf Bunga Matahari $S(W_n)$ memiliki satu titik derajat n, n titik berderajat 5 atau berderajat 2 (Sugeng dkk., 2023).

Pada Gambar 2.3 derajat titik-titik adalah $d(p) = 3$, $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 5$, dan $d(w_1) = d(w_2) = d(w_3) = 2$.



Gambar 2.4 Graf Barbel Bunga Matahari $B_{S(W_3)}$

Graf barbel Bunga Matahari merupakan graf yang terbentuk dari graf Bunga Matahari $S(W_n)$ dan dihubungkan oleh sebuah sisi sebagai jembatan. Graf barbel Bunga Matahari dinotasikan dengan $B_{S(W_n)}$.

2.2 Bilangan Kromatik Lokasi Graf

Berikut ini diberikan definisi bilangan kromatik lokasi yang diambil dari Chartrand dkk., 2002. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf terhubung dan c suatu pewarnaan sejati pada graf G, dimana untuk titik u dan v yang bertetangga di graf G memenuhi $c(u) \neq c(v)$. Jarak dari titik v terhadap titik w dinotasikan dengan $d(v, w)$, adalah panjang lintasan terpendek dari titik v terhadap titik w. Misalkan A_i adalah himpunan titik berwarna, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna c_Π dari v adalah k-pasang terurut $\{d(v, A_1), d(v, A_2), \dots, d(v, A_n)\}$ dengan $d(v, A_i) = \min\{d(v, x) | x \in A_i\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G memiliki kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Bilangan kromatik lokasi dari G dinotasikan dengan $\chi_L(G)$, adalah bilangan terkecil k sehingga G mempunyai pewarnaan k lokasi.

Berikut teorema dasar yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk., pada tahun 2002 tentang bilangan kromatik lokasi graf.

Teorema 2.1 (Chartrand dkk, 2002)
Misalkan c adalah pewarnaan lokasi dalam graf terhubung G. Jika u dan v adalah dua titik berbeda dalam G sehingga $d(u, v) = d(v, w)$ untuk semua $V(G) - \{u, v\}$, lalu $c(u) \neq c(v)$. Khususnya jika u dan v bukan titik bertetangga di G sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti:
Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf terhubung G. Misalkan $\prod = (A_1, A_2, \dots, A_k)$ adalah partisi dari himpunan titik-titik G yang menyatakan kelas warna A_i untuk semua titik $u, v \in V(G)$. Misalkan $c(u) = c(v)$ sehingga titik u dan v berada di kelas warna yang sama, maka $d(u, A_i) = d(v, A_i) = 0$ karena $d(u, v) = d(v, w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$, lalu $d(u, A_i) =$

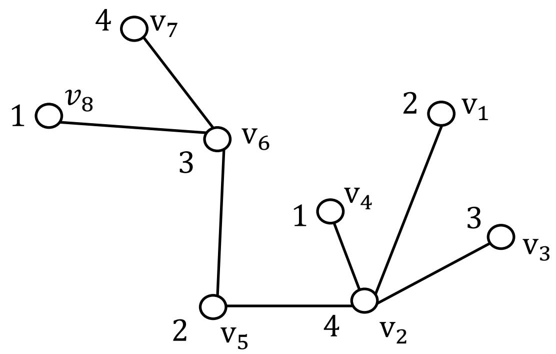
$d(v, A_i)$. Untuk setiap $j \neq i, 1 \leq i \leq k$. Jadi $c_\pi(u) = c_\pi(v)$, jadi c bukan pewarnaan lokasi, jadi $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1 (Chartrand dkk, 2002)

Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun maka $\chi_L(G) \geq k + 1$.

Bukti:

Misalkan v adalah titik yang bertetangga dengan k daun $A_1, A_2, \dots, A_n$ dari G. Menurut Teorema 2.1, setiap titik pewarnaan lokasi dari G adalah warna yang berbeda untuk setiap $A_i = 1,2, \dots n$. Karena v bertetangga dengan semua A_i, maka v harus memiliki warna yang berbeda dari warna semua daun A_i. Hasilnya adalah $\chi_L(G) \geq k + 1$. ■



Gambar 2.5 Pewarnaan lokasi minimum pada graf G

Diberikan graf G pada Gambar 2.5 yang akan dicari terlebih dahulu bilangan kromatik lokasi pada graf G. Karena titik v_2 memiliki 3 daun, berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq 4$. Misalkan c pewarnaan titik menggunakan empat warna pada graf G sehingga diperoleh $\prod = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ dengan setiap kelas warna yaitu $A_1 = \{v_4, v_8\}$, $A_2 = \{v_1, v_5\}, A_3 = \{v_3, v_6\}, A_4 = \{v_2, v_7\}$. Oleh karena itu, akan diperoleh kode warna sebagai berikut:

$c_\Pi(v_1) = (2,0,2,1)$ $\quad$ $c_\Pi(v_5) = (2,0,1,1)$

$c_\Pi(v_2) = (1,1,1,0)$ $\quad$ $c_\Pi(v_6) = (1,1,0,1)$

$c_\Pi(v_3) = (2,2,0,1)$ $\quad$ $c_\Pi(v_7) = (2,2,1,0)$

$c_\Pi(v_4) = (0,2,2,1)$ $\quad$ $c_\Pi(v_8) = (0,2,1,2)$

Karena setiap titik pada graf G memiliki kode warna yang berbeda, maka graf tersebut merupakan pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq 4$. Jadi $\chi_L(G) = 4$.

Teorma 2.2 (Chartrand dkk., 2002)

Untuk graf Siklus C_n, misalkan $n \geq 3$, maka:

$$\chi_L(C_n) = \begin{cases} 3; \text{jika } n \text{ ganjil} \\ 4; \text{jika } n \text{ genap} \end{cases}$$

Teorema 2.3 (Purwasih dkk, 2013)

Untuk $n \geq 3$ misalkan $W_n = K_1 + C_n$ dan $m = \min\{k \in N \mid n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$

Maka,

$$\chi_L(W_n) = \begin{cases} 1 + \chi_L(C_n); & jika\ 3 \leq n < 9 \\ m + 1 \quad ; & jika\ n \neq \dfrac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1\ dan\ n \geq 9 \\ m + 2 \quad ; & jika\ n = \dfrac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1\ dan\ n \geq 9 \end{cases}$$

Bukti:

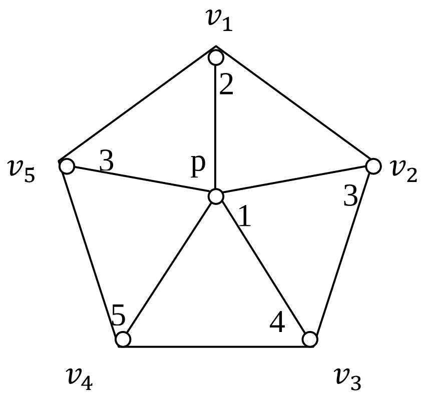
Pewarnaan lokasi yang berdekatan pada sebuah roda. Untuk $n \geq 3$, misalkan $W_n = K_1 + C_n$ dimana $K_1 = \{v\}$ dan $C_n = u_1u_2 \ldots u_nu_1$ misalkan $m = \min\{\, k | k \in N, n \leq \frac{1}{2}(k^3 - k^2)\}$ untuk menyederhanakan setiap f di W_n menjadi deret $[f(v); f(u_1), f(u_2), \ldots . f(u_n)]$.

Untuk setiap angka $3 \leq n \leq 8$ tentukan pewarnaan di f di W_n sedemikian sehingga $[4,3,2,1], [5,4,3,2,1], [4,2,1,3,2,1], [5,4,2,3,1,2,1], [4,2,1,3,2,3,2,1]$ dan $[5,4,2,3,1,3,1,2,1]$ untuk kasus $n \geq 9$ dan $n \neq \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1$. Jalur lintasan

$P_n = u_1 u_2 \dots u_n$ memiliki lokasi pewarnaan m bertetangga f menggabungkan $f(u_{n-1}) = 2$, $f(u_n) = 1$, $f(u_{n-2}) = m$, $f(u_1) = 2$, dan $f(u_2) = 1$. Karena W_n dapat dibentuk dari P_n yang menghubungkan u_1 ke u_n dan u_i ke v untuk sebarang $1 \leq i \leq n$, maka $V(W_n) = V(P_n) \cup \{v\}$ dan $E(W_n) = E(P_n) \cup \{u_n u_i\} \cup \{u_i v | 1 \leq i \leq n\}$, jadi warnai f' di W_n sehingga $f'(u_i) = f(u_i)$ dan $f'(v) = m + 1$. Karena $f'(u_1) = f(u_1) \neq f(u_n) = f'(u_n)$ dan $f'(v) = m + 1 \neq f'(u_i)$ untuk semua $1 \leq i \leq n$, maka f'; adalah warna yang tepat dari W_n untuk setiap $1 \leq i \leq n$. yaitu $f'\left(NW_n(u_i)\right) = f(NP_n(u_i)) \cup \{m + 1\}$. Oleh karena itu, f' adalah lokasi $(m + 1)$ yang berdekatan di W_n, dimana $f'(u_{n-1}) = 2$, $f'(u_n) = 1$, $f'(u_{n-2}) = m$, $f'(u_1) = 2$, $f'(u_2) = 1$, dan $f'(v) = m + 1$.

Asumsikan $n = \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1$, jadi $n \geq 9$dan $n - 1 \neq \frac{1}{2}(m^3 - m^2) - 1$. Oleh karena itu, pewarnaan lokasi m memiliki lokasi warna f pada warna lintasan (*path*) $P_{n-1} = u_1 u_2 \dots u_{n-1}$, yaitu $f(u_{n-2}) = 2$, $f(u_{n-1}) = 1$, $f(u_{n-3}) = m, f(u_1) = 2$, dan $f(u_2)$, sekarang tentukan warna f' pada W_n, jadi $f'(u_i) = f(u_i)$ untuk $1 \leq i \leq n - 1$, $f'(u_n) = m + 1$, dan $f'(v) = m + 2$. Perhatikan bahwa $m + 1 \in f'(NW_n(u_1)) \cap f'(NW_n(u_{n-1}))$, $f'(u_i) \neq f'(u_{n-1})$, dan $f'(NW_n(u_i)) = f(NP_{n-1}(u_i)) \cup \{m + 2\}$ untuk setiap $2 \leq i \leq n - 2$. Jadi f' adalah lokasi pewarnaan bertetangga $\{m + 2\}$ pada W_n. Dalam pewarnaan f'' pewarnaan oleh W_n, jadi $f'' = [f'(v); f'(u_n), f'(u_1), f'(u_2), \dots, f'(u_{n-2}), f'(u_{n-1})]$ yaitu pewarnaan yang berdekatan $(m + 2)$ warna pada W_n dengan $f''(u_{n-1}) = 2$, $f''(u_n) = 1$, $f''(u_{n-2}) = m$, $f''(u_1) = m + 1$, $f''(u_3) = 1$, dan $f''(v) = m + 2$. ■

Berikut merupakan contoh pewarnaan lokasi minimum graf roda w_5



Gambar 2.6 Contoh pewarnaan lokasi minimum graf roda w_5

III. METODE PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil 2022/2023 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Langkah-Langkah Penelitian

Pada penelitian ini akan dilakukan dalam beberapa langkah yaitu:

1. Metode untuk menentukan bilangan kromatik lokasi dalam graf Bunga Matahari $S(W_n)$ adalah
   a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf Bunga Matahari $S(W_n)$ untuk $n \geq 3$. Karena graf $S(W_n)$ termuat graf roda W_n, maka pewarnaan pada graf $S(W_n)$ sekurang-kurangnya menggunakan pewarnaan dari graf roda. Jika batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan bertahap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.
   b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf Bunga Matahari $S(W_n)$ untuk $n \geq 3$ dengan mengkonstruksi pewarnaan yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi dengan memperhatikan struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dari titik-titik pada graf roda kemudian titik di luar graf roda dengan label terkecil sehingga untuk mendapatkan kelas warna dan pewarnaan minimum pada titik-titik graf yang memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.

c. Jika batas atas $\chi_L(S(W_n)) \leq x$ dan batas bawah $\chi_L\big(S(W_n)\big) \geq x$, maka akan didapat bilangan kromatik lokasi yaitu $\chi_L\big(S(W_n)\big) = x$

d. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.

e. Membuktikan hasil yang diperoleh dari langkah d.

2. Metode untuk menentukan bilangan kromatik lokasi graf barbel dalam graf Bunga Matahari $B_{S(W_n)}$adalah:

a. Menentukan batas bawah bilangan kromatik lokasi graf barbel Bunga Matahari $B_{S(W_n)}$ dengan $n \geq 3$. Karena graf $B_{S(W_n)}$ memuat graf Bunga Matahari $S(W_n)$, maka pewarnaan pada graf $B_{S(W_n)}$ sekurang-kurangnya menggunakan pewarnaan pada graf Bunga Matahari. Jika batas tersebut belum memenuhi syarat pewarnaan lokasi, maka dilakukan penambahan terhadap pewarnaannya sedemikian sehingga syarat pewarnaan lokasi terpenuhi.

b. Menentukan batas atas bilangan kromatik lokasi graf barbel Bunga Matahari $B_{S(W_n)}$untuk $n \geq 3$ dengan mengkonstruksi pewarnaan titik-titik dengan melihat struktur grafnya. Pewarnaan titik dimulai dengan label terkecil sehingga diperoleh minimum pewarnaan titik memenuhi persyaratan pewarnaan lokasi.

c. Jika batas atas $\chi_L\big(B_{S(W_n)})\big) \leq x$ dan batas bawah $\chi_L\big(B_{S(W_n)})\big) \geq x$, maka akan didapat bilangan kromatik lokasi yaitu $\chi_L\big(B_{S(W_n)}\big) = x$.

d. Merumuskan hasil yang diperoleh dalam satu pernyataan matematika.

e. Membuktikan hasil yang diperoleh dari langkah d.

V. KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan penelitian yang telah dilakukan diperoleh bilangan kromatik lokasi dari graf Bunga Matahari $S(W_n)$ adalah 4 untuk $n = 3$; 5 untuk $4 \leq n \leq 7$; dan 6 untuk $8 \leq n \leq 10$. Bilangan kromatik lokasi graf barbel Bunga Matahari $B_{S(W_n)}$ adalah 5 untuk $n = 3$; 6 untuk $4 \leq n \leq 7$; dan 7 untuk $8 \leq n \leq 10$.

5.2 Saran

Penelitian ini dapat dikembangkan dengan menentukan bilangan kromatik lokasi graf Bunga Matahari pada operasi graf lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Asmiati, Assiyatun, H., and, Baskoro, E.T.,. 2011. “Locating-Chromatic Number of Amalgamation of Stars.” *ITB Journal of Science* 43 A(1):1–8.

Asmiati, Baskoro, E.T., Assiyatun, H., Suprijanto, D., Simanjuntak, R., and Uttunggadewa. S. 2012. “The Locating-Chromatic Number of Firecracker Graphs.” *Far East Journal of Mathematical Sciences* 63(1):11–23.

Asmiati. 2017. “Locating Chromatic Number for Certain Amalgamation of Stars.” 13(2):115–21..

Asmiati, Yana,I. K. S. G., and Yulianti, L. 2018. “On the Locating Chromatic Number of Certain Barbell Graphs.” *International Journal of Mathematics and Computer Science* **2018**:1-5

Asmiati, Yulianti, L. Aldino, Aristoteles, and A. Junaidi. 2019a. “The Locating Chromatic Number of a Disjoint Union of Some Double Stars.” *Journal of Physics: Conference Series* 1338(1).

Asmiati, Yana, I. K.S.G., and Yulianti, L. 2019b. “On the Locating Chromatic Number of Subdivision of Barbell Graphs Containing Generalized Petersen Graph.” *International Journal of Computer Science and Network Security* 19(7):45–50.

Asmiati, Damayanti, M., and Yulianti, L. 2021. “On the Locating Chromatic Number of Barbell Shadow Path Graph.” *Indonesian Journal of Combinatorics* 5(2):82.

Chartrand, G., Erwin, D., Henning, M. A., Slater, P. J., and Zhang, P. 2002. “Locating Chromatic Number of a Graph.” *Bull. Inst. Combin. Appl* 36:89–101.

Chartrand, G., Erwin D., Henning, M. A., Slater, P.J., and Zhang, P. 2003. “Graphs of Order n with Locating-Chromatic Number n - 1.” *Discrete Mathematics* 269(1–3):65–79.

Deo, N. 1975. “Graph Theory With Applications To Engineering and Computer Science.” *Networks* 5(3):299–300.

Irawan, A., Asmiati, Suharsono, S., and Muludi, K.. 2021. “The Locating-Chromatic Number of Certain Barbell Origami Graphs.” *Journal of Physics: Conference Series* 1751(1).

Purwasih, Apni, I., Baskoro, E.T., Assiyatun, H., and Suprijanto, D. 2013. “The Bounds on the Locating-Chromatic Number for a Subdivision of a Graph on One Edge.” *Procedia Computer Science* 74:84–88.

Sugeng, K. A., John, P., Lawrence, M. L., Anwar, ., L. F., and Baca, M., dan Semanicova-Fenovcikova, A. 2023. “Modular Irregularity Strength on Some Flower Graphs. *Electronic Journal og Graph Theory and Applications*. 1–11.