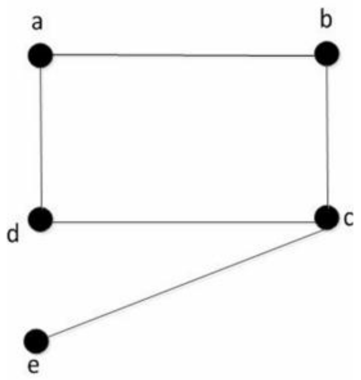
II. LANDASAN TEORI

Pada bab ini akan diberikan beberapa konsep dasar teori graf dan bilangan kromatik lokasi sebagai landasan teori pada penelitian ini.

2.1 Konsep Dasar Graf

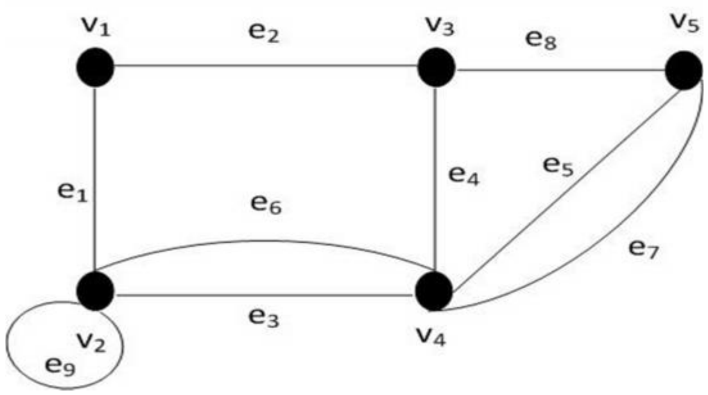
Pada sub bab ini akan diberikan beberapa definisi dan teorema tentang graf yang diambil dari Deo (1989).

Suatu graf G adalah pasangan himpunan terurut $(V(G), E(G))$ dengan $V(G)$ menyatakan himpunan titik *(vertex)* tak kosong dan $E(G)$ menyatakan himpunan sisi *(edge)* yakni pasangan tak terurut dari $V(G)$. Pada Gambar 3, terlihat $V(G) =$ $\{a, b, c, d, e\}$ dan $E(G) = \{ab, bc, cd, ce, ad\}$.



Gambar 3. Contoh Graf dengan 5 titik dan 5 sisi

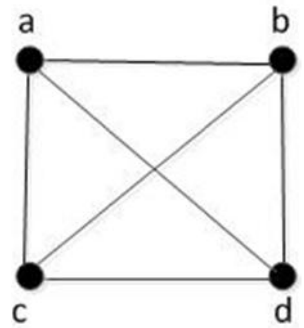
Graf digunakan untuk mempresentasikan objek-objek diskrit dan hubungan antara objek-objek tersebut. Representasi visual dari graf adalah dengan menyatakan objek-objek sebagai bulatan atau titik, sedangkan hubungan antara objek dinyatakan dengan sisi. Banyak sekali struktur yang bisa direpresentasikan dengan graf, dan banyak masalah yang bisa diselesaikan dengan bantuan graf. Sebagai contoh representasi dari graf adalah perjalanan bus untuk menemukan rute paling ekonomis dari sebuah terminal ke halte-halte yang harus dilewati tepat satu kali tanpa ada yang terlewati dua kali dan harus kembali ke terminal asal, merupakan upaya untuk mengefisienkan biaya dan waktu pada sistem transportasi. Sistem transportasi perjalanan bus dapat dimodelkan dalam graf dengan halte sebagai titik dan jalur yang menghubungkan halte-halte tersebut sebagai sisi.



Gambar 4. Contoh graf dengan 5 titik dan 8 sisi

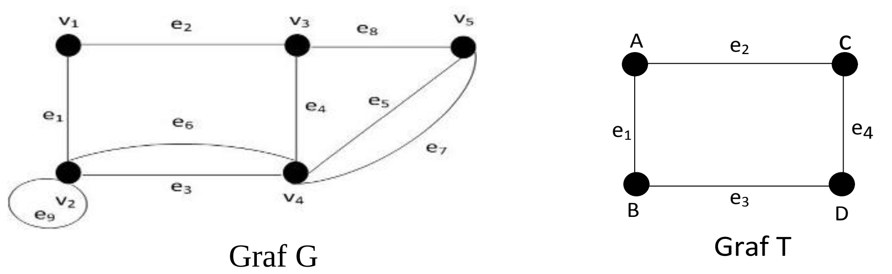
Loop adalah sisi yang memiliki titik awal dan titik akhir yang sama. Sisi paralel adalah sisi yang memiliki dua titik ujung yang sama. Pada Gambar 4, terdapat *loop* pada titik v_2 yaitu e_8, sedangkan e_3, e_6, e_5 dan e_7 disebut sisi paralel. Graf yang tidak mempunyai sisi ganda dan/atau *loop* disebut graf sederhana (*simple graph*). Graf pada Gambar 4. bukan graf sederhana (*simple graf*) karena terdapat *loop* (e_9) dan sisi ganda (e_5 dan e_7).

Suatu graf G dikatakan graf lengkap jika untuk setiap pasangan titik terdapat sisi yang menghubungkannya.



Gambar 5. Contoh Graf Lengkap K_4

Misalkan G adalah graf dengan himpunan titik $V(G)$ dan sisi $E(G)$, maka graf T dikatakan subgraf G dinotasikan dengan $T \subseteq G$ jika dan hanya jika $V(T)$ himpunan bagian dari $V(G)$ dan $E(T)$ himpunan bagian dari $E(G)$. Graf T dikatakan subgraf sejati G jika dan hanya jika H subgraf dari G dan $T \neq G$. Contoh subgraf dapat dilihat pada gambar berikut :

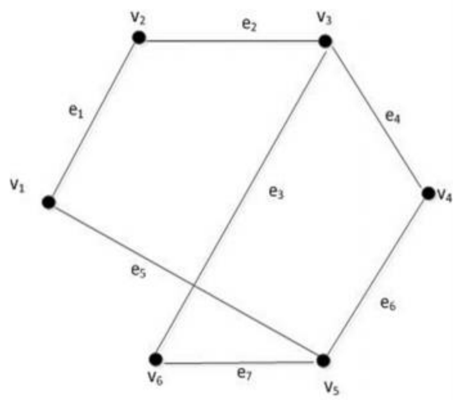


Gambar 6. $T \subseteq G$

Dua titik pada graf G dikatakan bertetangga (*adjacent*) bila keduanya terhubung oleh suatu sisi. Suatu sisi dikatakan menempel (*incident*) dengan suatu titik u, jika titik u merupakan salah satu titik ujung dari sisi tersebut. Pada Gambar 4. dapat dilihat bahwa sisi e_1 menempel (*incident*) dengan titik v_1 dan v_2 dan titik v_1 menempel pada sisi $e_1$dan e_2. Titik v_1 bertetangga (*adjacent*) dengan titik v_2 karena terdapat sisi-sisi yang menghubungkan $v_1$dan v_2. Demikian pula dengan titik v_1 bertetangga dengan titik v_3, dan titik v_2 bertetangga dengan titik v_4.

Derajat *(degree)* dari suatu titik $v \in V(G)$, dinotasikan dengan $d(V)$ dari graf G adalah banyaknya sisi yang menempel pada titik v. Jika setiap titik pada graf G mempunyai derajat yang sama, maka G disebut graf reguler. Daun (*pendant vertex*) adalah titik yang berderajat satu. Pada Gambar 4. $d\,(v_1) = 2$, $d(v_2) = 5$, $d(v_3) = 3$, $d(v_4) = 5$ dan $d(v_5) = 3$. Graf tersebut tidak memiliki daun karena setiap titiknya memiliki derajat lebih dari satu.

Jalan (*walk*) adalah barisan berhingga dari titik dan sisi dimulai dan diakhiri dengan titik sedemikian sehingga setiap sisi menempel dengan titik sebelum dan sesudahnya. Contoh walk dari graf G pada gambar 7 adalah v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_4 v_4 e_6 v_5 e_7 v_6 e_3.



Gambar 7. Contoh Graf dengan 6 titik dan 7 sisi

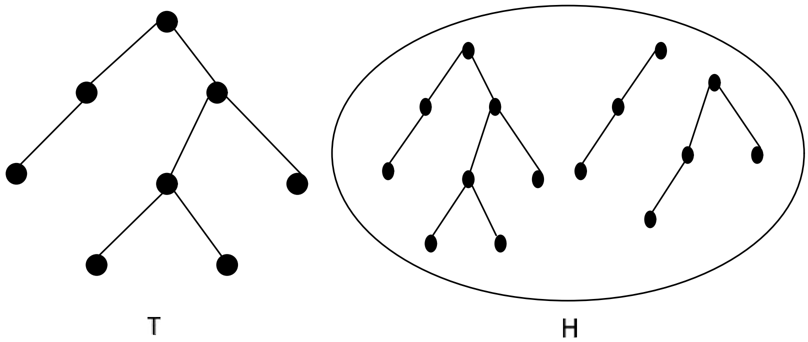
Lintasan (p*ath*) adalah jalan yang memiliki atau melewati titik yang berbeda-beda. Lintasan yang memiliki titik awal dan akhir yang sama disebut lintasan tertutup atau siklus. Graf G pada Gambar 7. $v_1v_2v_3v_4v_5v_6$ adalah salah satu lintasan tertutup. Siklus yang banyak titiknya genap disebut sirkuit genap, sedangkan jika banyak titiknya ganjil, maka disebut siklus ganjil. Graf *G* dikatakan terhubung jika terdapat lintasan yang menghubungkan setiap dua titik yang berbeda

2.2. Kelas Graf Pohon

Pohon (*tree*) adalah graf terhubung yang tidak memuat siklus. Suatu Graf G adalah pohon jika dan hanya jika terdapat tepat satu lintasan untuk setiap pasangan titik di Graf G (Deo,1989).

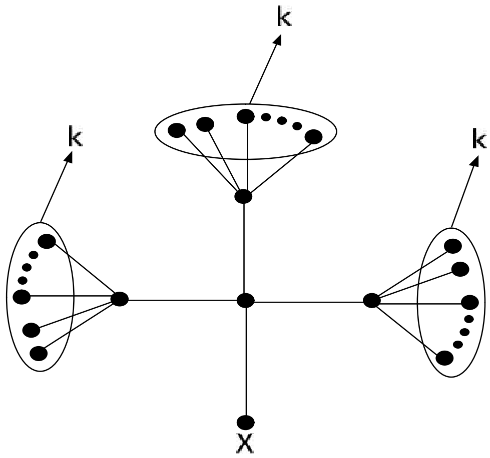
Berikut ini akan diberikan beberapa kelas graf pohon yang berkaitan dengan penelitian ini.

Misalkan G adalah graf terhubung, G disebut pohon jika dan hanya jika G tidak memuat sirkuit. Gabungan dari pohon disebut hutan (*forest*) (Deo, 1989).

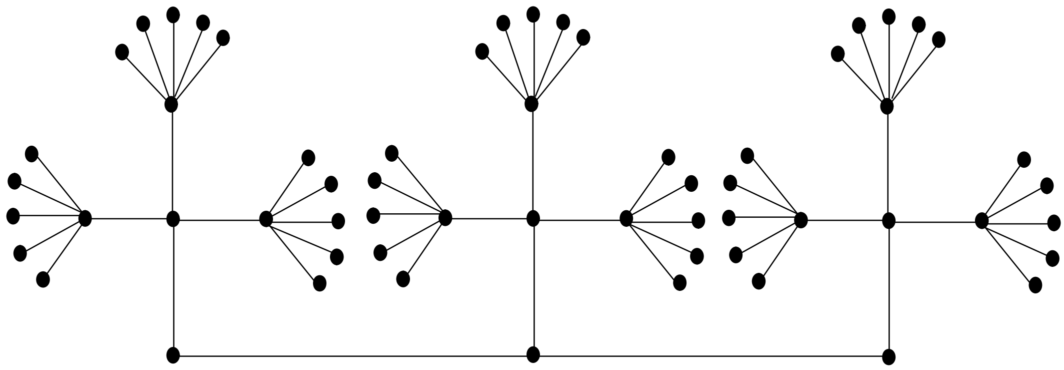


Gambar 8. T adalah contoh pohon dan H adalah contoh hutan

Graf $nS_{4,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n graf $S_{4,k}$ dan setiap titik x nya dihubungkan oleh suatu lintasan.

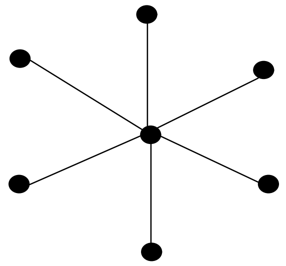


Gambar 9. Graf $S_{4,k}$



Gambar 10. Graf $3S_{4,5}$

Graf bintang $K_{1,n}$ (*star*) adalah suatu graf terhubung yang mempunyai satu titik berderajat *n* yang disebut pusat dan titik lainya berderajat satu (Chartrand dkk., 1998). Graf bintang dengan *k* titik juga dapat dinotasikan dengan S_k.

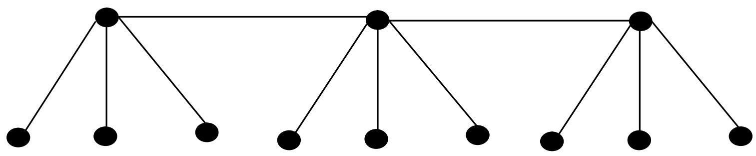


Gambar 11. Graf bintang $K_{1,6}$

Suatu graf pohon disebut graf bintang ganda (*double star*) jika graf pohon tersebut mempunyai tepat dua titik x dan y berderajat lebih dari satu. Jika x dan y berturut-turut berderajat $a + 1$ dan $b + 1$, dinotasikan dengan $S_{a,b}$ (Chartrand dkk., 1998).

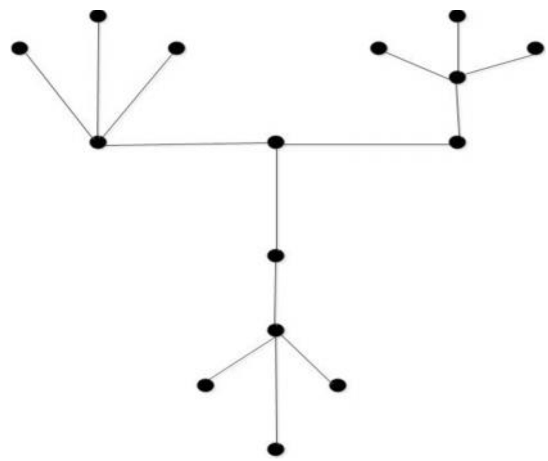
Gambar 12. Graf bintang ganda $S_{3,2}$

Graf ulat (*caterpillar graf*) adalah graf pohon yang memiliki sifat apabila dihapus semua daunnya akan menghasilkan lintasan (Chartrand dkk., 1998).



Gambar 13. Contoh graf ulat

Graf pohon pisang $B_{n,k}$ adalah graf yang diperoleh dari n buah kegraf bintang dengan cara menghubungkan sebuah daun dari setiap graf bintang $K_{1,k}$ suatu titik baru. Titik baru itu disebut titik *root*, dinotasikan dengan x (Asmiati dkk., 2011).



Gambar 14. Contoh Graf Pohon Pisang

2.3 Bilangan Kromatik Lokasi

Bilangan kromatik lokasi diperkenalkan oleh Chartrand dkk. (2002). Bilangan kromatik lokasi didefinisikan sebagai berikut. Misalkan c suatu pewarnaan sejati di G dengan $c(u) \neq c(v)$ untuk u dan v yang bertetangga di G. Misalkan C_i adalah himpunan titik-titik yang diberi warna i, yang selanjutnya disebut kelas warna, maka $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots\ldots C_k\}$ adalah himpunan yang terdiri dari kelas-kelas warna dari $V(G)$. Kode warna, $c_\Pi(v)$ dari v adalah k-pasang terurut $(d(v,C_1), d(v,C_2), \ldots., d(v,C_k))$ dengan $d(v,C_i) = \min\left\{d(v,x) \;\middle|\; x \in C_i\right\}$ untuk $1 \leq i \leq k$. Jika setiap titik di G mempunyai kode warna yang berbeda, maka c disebut pewarnaan lokasi dari G. Banyaknya warna minimum yang digunakan pada pewarnaan lokasi disebut bilangan kromatik lokasi dari G, dan dinotasikan dengan $\chi_L(G)$.

Berikut ini diberikan teorema dasar tentang bilangan kromatik lokasi yang telah dibuktikan oleh Chartrand dkk. (2002). Lingkungan dari u, dinotasikan dengan $N(u)$ adalah himpunan titik-titik yang bertetangga dengan u.

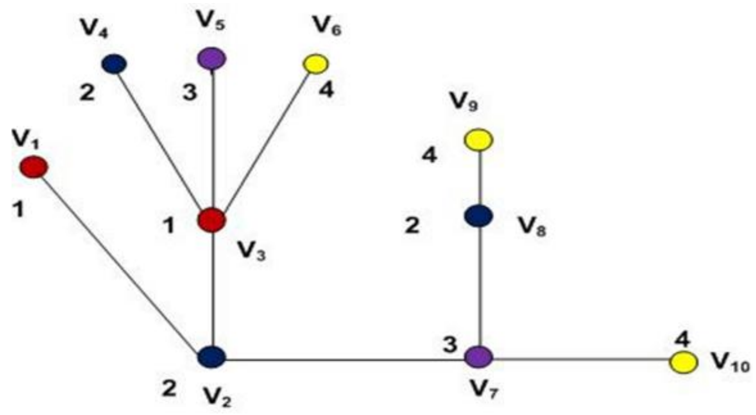
Teorema 2.1. Misalkan c adalah pewarnaan lokasi pada graf G. Jika u dan v adalah dua titik yang berbeda di G sedemikian sehingga $d(u,w) = d(v,w)$ untuk semua $w \in V(G) - \{u,v\}$, maka $c(u) \neq c(v)$. Secara khusus, jika u dan v titik-titik yang tidak bertetangga di G sedemikian sehingga $N(u) = N(v)$, maka $c(u) \neq c(v)$.

Bukti: Misalkan c adalah suatu pewarnaan lokasi pada graf terhubung G dan misalkan $\Pi = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ adalah partisi dari titik-titik G kedalam kelas warna C_i. Untuk suatu titik $u,v \in V(G)$, andaikan $c(u) = c(v)$ sedemikian sehingga titik u dan v berada dalam kelas warna yang sama, misal C_i dari Π. Akibatnya, $d(u, Ci) = d(v, Ci) = 0$. Karena $d(u,w) = d(v,w)$ untuk setiap $w \in V(G) - \{u, v\}$ maka $d(u,C_j) = d(v,C_j)$ untuk setiap $j \neq i$, $1 \leq j \leq k$. Akibatnya, $c_\Pi(u) = c_\Pi(v)$ sehingga c bukan pewarnaan lokasi. Jadi, $c(u) \neq c(v)$. ■

Akibat 2.1. Jika G adalah graf terhubung dengan suatu titik yang bertetangga dengan k daun, maka $\chi_L(G) \geq k+1$.

Bukti: Misalkan v adalah suatu titik yang bertetangga dengan k daun, yaitu x_1, $x_2, \ldots, x_k$ di G. Berdasarkan Teorema 2.1, setiap pewarnaan lokasi dari G mempunyai warna yang berbeda untuk setiap x_i, $i = 1,2,\ldots,k$. Karena v bertetangga dengan semua x_i, maka v harus mempunyai warna yang berbeda dengan semua daun x_i. Akibatnya, $\chi_L(G) \geq k+1$. ∎

Berikut ini diberikan graf G dan akan ditentukan bilangan kromatik lokasi dari graf G tersebut.



G

Gambar 15. Pewarnaan lokasi minimum dari graf G

Diberikan graf G seperti yang terlihat pada Gambar 15. Akan ditentukan terlebih dahulu batas bawah bilangan kromatik lokasi dari graf G. Karena terdapat titik v_3 yang mempunyai 3 daun, maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq 4$. (2.1)

Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan empat warna. Pada graf G diberikan kelas warna sedemikian sehingga diperoleh $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ dengan $C_1 = \{v_1, v_3\}$, $C_2 = \{v_2, v_4, v_8\}$, $C_3 = \{v_5, v_7\}$ dan $C_4 = \{v_6, v_9 v_{10}\}$. Oleh karena itu, didapatkan kode warna sebagai berikut :

$c_\Pi(v_1) = (0,1,2,3)$; $c_\Pi(v_2) = (1,0,1,2)$; $c_\Pi(v_3) = (0,1,1,1)$; $c_\Pi(v_4) = (1,0,2,2)$; $c_\Pi(v_5) = (1,2,0,2)$; $c_\Pi(v_6) = (1,2,2,0)$; $c_\Pi(v_7) = (2,1,0,1)$; $c_\Pi(v_8) =(3,0,1,1)$; $c_\Pi(v_9) = (4,1,2,0)$; $c_\Pi(v_{10}) = (3,2,1,0)$

Karena kode warna dari semua titik di G berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Jadi, $\chi_L(G) \leq 4$ (2.2)

Berdasarkan (2.1) dan (2.2), maka Π adalah pewarnaan lokasi dari G dan

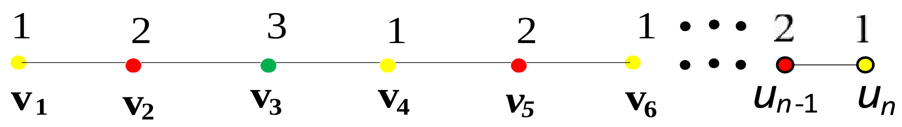
$\chi_L(G) = 4$.

Selanjutnya akan didiskusikan bilangan kromatik lokasi dari beberapa kelas graf pohon.

Teorema 2.2. Bilangan kromatik lokasi graf lintasan P_n ($n \geq 3$) adalah 3.

Bukti: Perhatikan bahwa $\chi_L(P_1) = 1$ dan $\chi_L(P_2) = 2$. Berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh $\chi_L(P_n) \geq 2$. Misalkan c adalah 2-pewarnaan lokasi pada P_n, $n \geq 3$ akibatnya akan terdapat dua titik yang memiliki kode warna yang sama, kontradiksi. Maka $\chi_L(P_n) \geq 3$; $n \geq 3$.

Selanjutnya konstruksi batas atas pada P_n; $n \geq 3$ sebagai berikut. Misalkan c adalah 3-pewarnaan titik, $c(v_1) = 1$; $c(v_i) = 2$ untuk i genap; dan $c(v_i) = 3$ untuk $i \geq 3$ ganjil. Diperoleh kode warna $c_\Pi(v_1) = (0,1,2)$; $c_\Pi(v_i) = (i-1,0,1)$ untuk i genap; $c_\Pi(v_i) = (i-1,1,0)$ untuk $i \geq 3$ ganjil. Karena semua titik mempunyai kode warna berbeda, maka c adalah pewarnaan lokasi. Akibatnya, $\chi_L(P_n) \leq 3$; $n \geq 3$. Jadi, $\chi_L(P_n) = 3$; $n \geq 3$ ∎

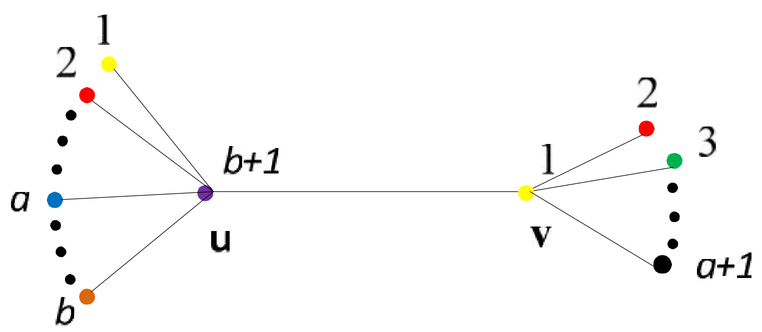


Gambar 16. Pewarnaan lokasi minimum pada graf lintasan P_n

Teorema 2.3. Untuk bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq a \leq b$ dan $b \geq 2$

$$\chi_L(S_{a,b}) = b+1$$

Bukti : Berdasarkan Akibat 2.1, diperoleh batas bawah yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \geq b+1$. Selanjutnya, akan ditentukan batas atasnya, yaitu $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. Misalkan c adalah pewarnaan titik menggunakan $(b+1)$ warna sebagaimana terlihat pada Gambar 17. Perhatikan bahwa kode warna dari setiap titik $S_{a,b}$ berbeda, akibatnya c adalah pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(S_{a,b}) \leq b+1$. ■

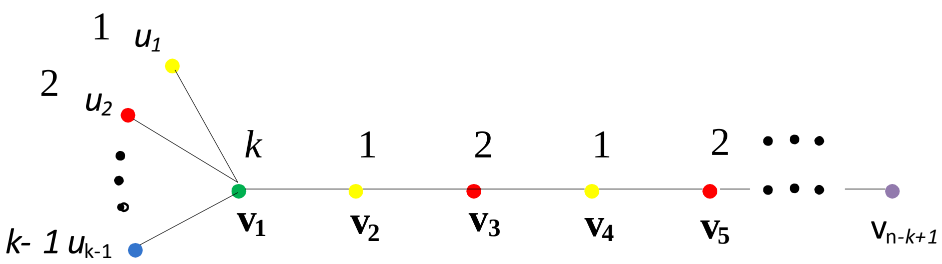


Gambar 17. Pewarnaan lokasi minimum pada $S_{a,b}$.

Chartrand dkk. (2003) telah mendapatkan bentuk graf pohon berorde $n \geq 5$ yang memiliki bilangan kromatik lokasi dari 3 sampai n, kecuali n-1, sebagaimana teorema berikut ini.

Teorema 2.4. Terdapat pohon dengan berorde $n \geq 5$ yang mempunyai bilangan kromatik k jika dan hanya jika $k \in (3,4,..,n\text{-}2,n)$.

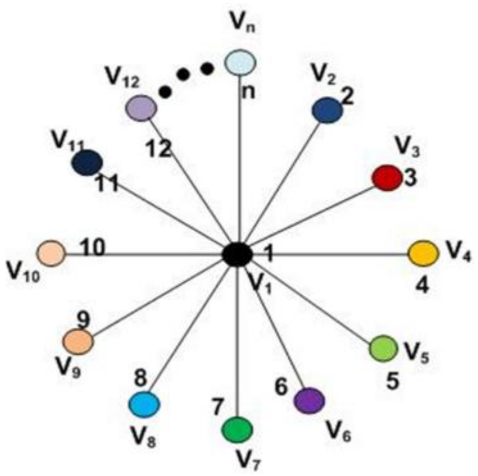
Pewarnaan pada Teorema 2.4 dapat diberikan sebagai berikut:



Gambar 18. Pohon T berorde n dengan $\chi_L(T)= k$

Teorema 2.5. Misalkan $K_{1,n}$ graf bintang berode $n \geq 1$, maka $\chi_L\ (K_{1,n}) = n+1$.

Bukti :



Gambar 19. Pewarnaan lokasi minimum graf bintang $K_{1,n}$

Karena terdapat daun sebanyak n,maka berdasarkan Akibat 2.1, $\chi_L(G) \geq n+1$. Misalkan c adalah pewarnaan pada graf $K_{1,n}$, dengan c(v_1)= 1; c(v_i)= i; $i \geq 2$. Kode warna titik v_1 bernilai 0 untuk komponen warna ke-1 dan bernilai 1 untuk komponen warna lainnya. Sedangkan kode warna titik v_i; $i \geq 2$, akan bernilai 1 untuk komponen warna ke-1, 0 untuk warna ke-*i*, dan 2 untuk lainnya. Karena kode warna dari semua titik adalah berbeda, maka *c* merupakan pewarnaan lokasi. Jadi $\chi_L(G) \leq n+1$. ■