INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TIGA

(Skripsi)

Oleh

ECCHA NANDA PUTRI

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

RIEMANN INTEGRAL VALUE LINE ON THREE SEQUENCE SPACE

By

Eccha Nanda Putri

Research has been carried out to find out whether the Riemann integral is worth the difference sequence $\ell_3(\Delta)$. In this study, using the definition of the Riemann integral and several theorems related to the Riemann integral having the value of the sequence $\ell_3(\Delta)$, it will be proven first that the function $\bar{f}(x) \in \ell_3(\Delta)$. Next, we will look for the difference sequence of the function $\bar{f}(x) \in \ell_3(\Delta)$. to prove whether the sequence $\bar{f}(x) = f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_k(x)$is integral in [a,b] and it has been proven that the sequence $\ell_3(\Delta)$ is Riemann integral in [a,b]. In this study, an example of an integral Riemann sequence with a value of $\ell_3(\Delta)$ is also given in order to make it easier for the reader to understand the results of this study.

Key Words: Riemann Integral, Space Line, Space Line $\ell_3(\Delta)$

ABSTRAK

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TIGA

Oleh

Eccha Nanda Putri

Telah dilakukan penelitian untuk mengetahui apakah integral Riemann bernilai barisan selisih $\ell_3(\Delta)$. Penelitian ini menggunakan definisi integral Riemann dan beberapa teorema yang berhubungan dengan integral Riemann bernilai barisan $\ell_3(\Delta)$ dan akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa fungsi $\bar{f}(x) \in \ell_3(\Delta)$. Selanjutnya akan dicari barisan selisih dari fungsi $\bar{f}(x) \in \ell_3(\Delta)$, untuk membuktikan apakah barisan $\bar{f}(x) = f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots, f_k(x)$ terintegral pada [a,b] dan telah terbukti bahwa barisan $\ell_3(\Delta)$ terintegral Riemann di [a,b]. Pada penelitian ini juga diberikan contoh barisan integral Riemann yang bernilai barisan $\ell_3(\Delta)$ agar dapat mempermudah pembaca untuk memahami hasil penelitian ini.

Kata Kunci: Integral Riemann, Ruang Barisan, Ruang Barisan $\ell_3(\Delta)$

INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TIGA

ECCHA NANDA PUTRI

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat Untuk Memperoleh Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi	:	**INTEGRAL RIEMANN BERNILAI BARISAN SELISIH TINGKAT TIGA**
Nama Mahasiswa	:	**Eccha Nanda Putri**
Nomor Pokok Mahasiswa	:	**1957031017**
Jurusan	:	**Matematika**
Fakultas	:	**Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.
NIP 19720227 199802 1 001

Dina Eka Nurvazly, M.Si.
NIP 19931106 201903 2 018

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP 19740316 200501 1 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Muslim Ansori, S.Si., M.Si.** ....

Sekretaris : **Dina Eka Nurvazly, M.Si.** ....

Penguji : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....
Bukan Pembimbing

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **24 Mei 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Yang bertanda tangan dibawah ini

Nama	**: Eccha Nanda Putri**
Nomor Pokok Mahasiswa	**: 195701017**
Jurusan	**: Matematika**
Judul Skripsi	**: Integral Riemann Bernilai Barisan Telisih Tingkat Tiga**

Dengan ini menyatakan bawa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Apabila kemudian hari terbukti bahwa skripsi ini merupakan hasil salinan atau dibuat oleh orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 24 Mei 2023
Penulis,

Eccha Nanda Putri

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap Eccha Nanda Putri yang lahir di Way Jepara pada tanggal 3 Agustus 2002. Penulis merupakan anak bungsu dari lima bersaudara yang terlahir dari pasangan Muharor dan Amnah Dewi.

Penulis menempuh Pendidikan Taman Kanak Kanak (TK) di TK Pertiwi Labuhan Ratu pada tahun 2006 sampai tahun 2007. Selanjutnya, penulis melanjutkan Pendidikan Sekolah Dasar (SD) di SD Islam Terpadu Baitul Muslim pada tahun 2007 sampai tahun 2013. Kemudian, penulis melanjutkan Pendidikan Sekolah Menengah Petama (SMP) di SMP Islam Terpadu Baitul Muslim pada tahun 2013 sampai tahun 2016. Penulis melanjutkan Sekolah Menengah Atas (SMA) di SMA Negeri 1 Way Jepara dapat diselesaikan pada tahun 2019.

Pada tahun 2019, penulis melanjutkan Pendidikan di Perguruan Tinggi dan terdaftar sebagai mahasiswa S1 di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Lampung (Unila) melalui jalur Mandiri atau SMMPTN Barat. Selama menjadi mahasiswa, penulis aktif dalam organisasi. Pada tahun 2020 penulis merupakan anggota Himpunan Mahasiswa Matematika (Himatika) bidang Eksternal.

Pada bulan Januari sampai Febuari 2022 penulis melaksanakan kerja praktik (KP) di Dinas Pariwisata dan Ekonomi Kreatif provinsi Lampung. Pada bulan Juli sampai Agustus sebagai bentuk aplikasi bidang ilmu kepada masyarakat, penulis melaksanakan kegiatan Kuliah Kerja Nyata (KKN) di desa Karya Tani Kecamatan Labuhan Maringgai, Kabupaten Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

"Kunci hidup Bahagia adalah jalani, nikmati, dan syukuri"

"Cukuplah Allah menjadi penolong kami dan Allah
Sebagai pemelihara"
(Q.S Al-Ahzab:3)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbilal'amin,

Puji dan syukur kehadirat Allah SWT atas melimpahnya nikmat dan karunia-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Sholawat serta salam senantiasa tercurahkan kepada junjungan kita nabi Muhammad SAW

Dengan penuh syukur, kupersembahkan karya ini kepada :

Keluarga tercinta

Terimakasih kepada keluargaku semua doa, kasih sayang, serta nasehat yang diberikan. Terimkasih seluruh keluargaku karena sudah mendukungku dalam segala hal dan selalu memberi semangat.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terimakasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yag sudah sangat berjasa dalam membantu, memberikan masukan, arahan, serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terimakasih kepada sahabat-sahabatku atas semua doa, dukungan, semangat, serta canda tawa keceriaan selama masa perkuliahan ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Alhamdulillahhirabbilalamin, puji dan syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT atas segala limpahan karunia serta rahmat-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Tiga”. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada nabi Muhammad SAW.

Dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakash kepada:

1. Bapak Muslim Ansori,S.Si., M.Si. selaku Pembimbing I atas kesediaannya waktu dalam memberikan arahan, motivasi, bimbingan, serta saran kepada penulis sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
2. Ibu Dina Eka Nurvazly, M.Si. selaku Pembimbing II sekaligus Pembimbing Akademik yang telah memberikan arahan, bimbingan, serta dukungan kepada penulis sehingga dapat menyelesaikan skripsi ini.
3. Ibu Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku Dosen Pembahas yang telah bersedia memberikan keritik dan saran serta evaluasi yang membangun kepada penulis selama proses penyusunan skripsi ini.
4. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku ketua jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Univversitas Lampung
5. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Seluruh dosen, staff dan karyawan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengethuan Alam Universitas Lampung.
7. Ayah, Bunda, Jati, Duka, Kiay, Teteh, Keponakanku tercinta dan keluarga besar yang selalu memotivasi, memberikan dukungan dan doa kepada penulis.

8. Terimakasih kepada diriku sendiri karena sudah berjuang dan bertahan sejauh ini.
9. Untuk Listra, Zahro, Mega, Meli, Shella, Roro, Ale, Aul Ayu, Qori, Nada, Feby, Putri, Deswita, Hijri terimakasih untuk semua motivasi, dukungan, semangat, kebersamaan serta kenangan yang indah dalam menjalani perkuliahan dan selama proses penyusunan skripsi ini.
10. Sahabat-sahabatku Audrey, Intan, Fii, Hana, Aris, Lintang, Mega, Festi, Wayan dan Shafa, terimakasih atas segala pengalaman dan kebersamaan selama ini.
11. Muhamad Rafli S yang telah menemani, memberi semangat, dan dukungan kepada penulis dalam mengerjakan dan menyelesaikan skripsi ini.
12. Teman-teman KKN Karya Tani, untuk segala kebersamaan dan dukungan selama ini.
13. Teman-teman satu bimbingan Fitri Wulandari, Khowashiyah Syafitri, Refnita Magna Ananda yang telah memberikan semangat, motivasi maupun saran kepada penulis.
14. Teman-teman Jurusan Matematika Angkatan 2019 yang sudah banyak membantu selama masa perkuliahan.
15. Semua pihak yang membantu dalam proses penyusuan skripsi ini yang tidak dapat penulis sebutkan satu persatu.

Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi kita semua. Penulis menyadari bahwa skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, sehingga penulis mengharapkan kritik dan saran yang membangun untuk menjadikan skripsi ini lebih baik lagi.

Bandar Lampung, 24 Mei 2023
Penulis,

Eccha Nanda Putri

DAFTAR ISI

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Matematika adalah ilmu deduktif dikarenakan sebelum mendapatkan kebenaran, penulis harus membuktikan teorema, lemma dan sifat yang dibutuhkan dalam proses mencari kebenaran (Maryati dan Priatna, 2017: 336). Menurut pendapat ahli, matematika merupakan bahasa simbolis yang memiliki kegunaan untuk mengekspresikan hubungan-hubungan kuantitatif dan keruangan, sedangkan fungsi teoritisnya adalah untuk mempermudah cara mendapatkan ilmu (Abdurrahman, 2002). Matematika merupakan ilmu yang berhubungan dengan bilangan, matematika diperlukan agar memudahkan dalam menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari – hari dan juga digunakan untuk mengembangkan ilmu pengetahuan serta teknologi (Siagian, 2016).

Salah satu cabang ilmu matematika yang banyak digunakan merupakan kalkulus yang meliputi limit, turunan, integral, dan deret tak terhingga (Rejeki, 2017). Kalkulus merupakan studi tentang perubahan, seperti geometri mengkaji tentang bentuk dan aljabar mengkaji tentang operasi dan aplikasinya dalam menyelesaikan persamaan. Kalkulus memiliki berbagai aplikasi di bidang sains, ekonomi, dan teknik (LaTorre, 2007).

Kalkulus modern merupakan ilmu yang membahas fungsi – fungsi *real* dan vektor yang sudah dikembangkan dan diaplikasikan dalam kehidupan sehari – hari. Kalkulus *modern* juga dikembangkan menjadi beberapa konsep, salah satunya merupakan konsep integral. Konsep Integral sering digunakan untuk mencari atau menentukan luas daerah di bawah kurva dan mencari penyelesaian dari suatu model matematika. Konsep integral terus mengalami perkembangan hingga pada tahun 1950, Benhard Riemann memperkenalkan konsep integral dengan partisi pada suatu interval sebagai dasar pengembangannya yang dikenal sebagai konsep integral Riemann (Pirade, S.M., dkk., 2017).

Salah satu cabang ilmu dalam konsep integral merupakan integral Riemann. Integral Riemann sudah diteliti oleh banyak ilmuan, contohnya seperti Integral Riemann-Lebesgue yang diteliti oleh Ikram Hamid dan The Riemann-Stieltjes Integral On Time Scales yang diteliti oleh Dorota Mozyrska, Ewa Pawluszewicz, and Delfim F.M Torres. Akan tetapi integral yang bernilai di ruang barisan selisih belum banyak diketahui. Oleh karena itu, penelitian ini akan difokuskan pada suatu konsep integral yang dikembangkan pada integral yang bernilai di dalam ruang barisan. Ruang barisan yang akan digunakan dalam penelitian ini yaitu ruang barisan selisih tingkat tiga yang sebelumnya telah dibahas dalam penelitian oleh Aulia Khairunnisa tahun 2020. Penelitian ini akan menerapkan konsep integral Riemann yang bernilai di ruang barisan selisih tingkat tiga tersebut.

Berbicara tentang matematika tidak akan bisa lepas dari hal yang disebut dengan kalkulus. Berdasarkan keanggotaannya, kalkulus dapat dibagi menjadi beberapa macam fungsi yang salah satunya mencakupi integral. Integral dapat memiliki banyak manfaat dalam pengaplikasiannya salah satunya digunakan untuk mencari luas daerah dalam Interval (Irmayanti, dkk. 2021). Ilmu integral di kembangan sedemikian rupa sehingga dapat memiliki berbagai konsep, salah satu cabang dari konsep interal merupakan integral Riemann. Dalam penelitian ini, akan dikaji mengenai integral Riemann yang bernilai pada ruang barisan selisih tingkat tiga. Karena itu, penulis memilih judul “Integral Riemann Bernilai Barisan Selisih Tingkat Tiga”.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan sebelumnya dikaji konsep integral yang dikembangkan pada integral yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat tiga.

1.3 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah mengkaji dan menyusun konsep integral yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat tiga.

1.4 Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah memahami konsep integral yang bernilai di dalam ruang barisan selisih tingkat tiga.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini dibahas definisi-definisi beserta contoh meliputi limit, turunan, integral Riemann, barisan, barisan fungsi, ruang barisan, ruang vektor, ruang bernorm, ruang banach, operator linear, dan ruang barisan selisih yang berkaitan dengan penelitian ini.

2.1 Limit

Dalam subbab ini dibahas mengenai limit.

Definisi 2.1.1 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$ suatu titik $c \in \mathbb{R}$ adalah titik bagian dari A jika untuk setiap $\delta > 0$ terdapat paling sedikit satu titik $x \in A, x \neq c$ sedemikian sehingga $|x - c| < \varepsilon$.

Definisi 2.1.2 Diberikan $\lim_{x \to c} f\ (x) = L$ yang artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ yang nilainya sangat kecil, terdapat $\delta > 0$, sedemikian sehingga $|f(x) - L| < \varepsilon$ dengan syarat $0 <|x - c| < \delta$ atau dengan kata lain $0 < |x - c| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ (Varberg, dkk., 2010).

Definisi 2.1.3 Misalkan $A \subseteq \mathbb{R}$, c merupakan titik limit pada A dan $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $L \in \mathbb{R}$ dapat dikatakan limit f pada c ditulis dengan $\lim_{x \to c} f = L$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0, terdapat\ \delta > 0$, sedemikian sehingga jika $x \in A$ dan $0 < |x - c| < \delta$, maka $|f(x) - L| < \varepsilon$ (Barttle dan Sherbert, 2000).

2.2 Turunan

Dalam subbab ini dibahas mengenai turunan.

Definisi 2.2.1 Turunan fungsi f adalah fungsi lain *f'* yang nilainya pada sebarang bilangan *c* adalah $f'(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ Asalkan limit ini ada dan bukan ∞ atau $(-\infty)$.

Definisi 2.2.2

a. Jika *P* (x_0 , y_0) adalah titik pada grafik sebuah fungsi *f(x),* maka garis singgung fungsi *f(x)* pada *P* didefinisikan sebagai garis penerus di *P* dengan kemiringan

$$m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f\,(x_0 + h\,) - f(x)}{h}$$

b. Fungsi *f(x)* didefinisikan dengan rumus

$$f'(x) = m_{tan} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f\,(x_0)}{h}$$

disebut *derivative* atau turunan yang nilainya pada sebarang *x* dan fungsi *f(x).* Daerah asal atau domain dari *f(x)* berlaku untuk sebarang *x* yang mana limit ini ada.

2.3 Integral Riemann

Dalam subbab ini dibahas mengenai integral Riemann.

Definisi 2.3.1 Telah diketahui bahwa jika fungsi $f : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathbb{R}$ terbatas pada *P* partisi pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, maka berakibat $L(f; P) \leq S(f; P) \leq U(f; P)$. Gorge Friedrich Berhard Riemann menggunakan $S\,(f; P)$ untuk menyusun integralnya (Rudin, 1987).

Definisi 2.3.2 *F* adalah fungsi bilangan real pada interval tertentu [*a*,*b*] dan *R* = *R*[*a*,*b*] adalah himpunan dari keseluruhan partisi dari [*a*,*b*], maka integral Riemann atas dan integral Riemann bawah didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_{x}^{\tilde{y}} f(x)dx = \inf U(f; U), P \in R \text{ dan } \int_{\bar{x}}^{y} f(x)dx = \sup L\,(f; P), P \in R$$

Jika $\int_{x}^{\tilde{y}} f(x)dx = \int_{\tilde{x}}^{y} f(x)dx$, maka fungsi f dikatakan terintegral Riemann dan dinotasikan dengan: $S(f) = \int_{x}^{y} f(x)dx$.

2.4 Barisan

Dalam subbab ini dibahas mengenai barisan.

Definisi 2.4.1 Barisan adalah suatu fungsi yang domainnya adalah himpunan bilangan bulat positif. Misal terdapat bilangan bulat positif $1,2,3, \dots, n, \dots$ yang bersesuaian dengan bilangan real x_n tertentu, maka $x_1, x_2, \dots., x_n$ dikatakan barisan (Mizrahi dan Sulivan, 1982).

Definisi 2.4.2 Barisan dikatakan konvergen *(convergent)* jika ada bilangan $x \in X$ sehingga untuk setiap bilangan asli $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0 dan setiap bilangan asli $n \geq n_0$ benar bahwa $|x_k - x| < \varepsilon$, pengertian tersebut ditulis singkat dengan $\lim_{k \to \infty} x_k = x$ atau $\{x_k\} \to x$ untuk $k \to \infty$ dan bilangan x disebut limit barisan $\{x_k\}$, dan dikatakan barisan $\{x_k\}$ konvergen ke x. Barisan $\{x_k\}$ yang tak konvergen dikatakan divergen (Darmawijaya,2007).

Contoh 2.4.2

Akan ditunjukkan barisan $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ konvergen sebab untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada bilangan asli n_0 (bergantung pada ε), sehingga $k \geq n_0$ berlaku $\left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$. Oleh karena itu disebut barisan $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ konvergen ke 0 atau barisan $\left\{\frac{1}{k}\right\}$ mempunyai limit 0 untuk $k \to \infty$ dan ditulis dengan $\lim_{k \to \infty} \left|\frac{1}{k} - 0\right| < \varepsilon$ atau dapat ditulis dengan $\lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} = 0$.

Definisi 2.4.3 Suatu barisan $x = (x_n)$ dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat suatu bilangan $M \geq 0$ sehingga $|x_n| \leq M \forall n \in N$. Himpunan dari semua barisan terbatas dilambangkan dengan ℓ_∞ (Maddox, 1970).

2.5 Barisan Fungsi

Dalam subbab ini dibahas mengenai barisan fungsi.

Definisi 2.5.1 Jika diketahui fungsi $(f_k): D \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, maka diperoleh barisan fungsi (f_k). D merupakan domain fungsi f_k, untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, dan setiap $t \in D$ diperoleh barisan bilangan nyata $\left(f_k(t)\right)$ (Barttle dan Sherbert, 2000).

Definisi 2.5.2 Diketahui fungsi $(f_k): D \subset \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$

i. Barisan fungsi (f_k) dikatakan konvergen di titik $t \in D$ jika barisan bilangan nyata $\left(f_k(t)\right)$.

ii. Barisan fungsi (f_k) dikatakan konvergen pada $A \subset D$ jika barisan bilangan nyata $\left(f_k(t)\right)$ konvergen untuk setiap $t \in A$.

Teorema 2.5.3 Barisan fungsi (f_k) konvergen ke suatu fungsi f jika A untuk setiap $t \in A$ dan bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $\mathrm{n} = \mathrm{n}(\mathrm{t}, \varepsilon)$ sehingga untuk setiap bilangan asli $\mathrm{k} \geq \mathrm{n}$ berakibat $|\mathrm{f_k}(\mathrm{t}) - \mathrm{f}(\mathrm{t})| < \varepsilon$ $(\text{Barttle dan Sherbert}, 2000)$.

Contoh:

Diberikan $f_k(t) = \frac{t^k}{k}$. Barisan bilangan $\left(f_k(t)\right)$ konvergen ke 0 untuk setiap $t \in [0,1]$, sebab untuk setiap $t \in [0,1]$ berlaku $|f_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| = \frac{t^k}{k} < \frac{1}{k} \leq \varepsilon$, dengan $k > \frac{1}{\varepsilon}$ untuk $k \geq n$ dengan *n* merupakan bilangan asli pertama yang lebih besar daripada bilangan $\frac{1}{\varepsilon}$. Terlihat bahwa *n* dapat dipilih hanya bergantung pada ε saja. Jadi, barisan fungsi (f_k) konvergen ke fungsi f pada [0,1] dengan $f(t) = 0$ untuk setiap $t \in [0,1]$. Dapat dipilih bilangan asli n yang hanya bergantung pada ε saja, tak bergantung pada $t \in [0,1]$, sehingga untuk setiap $k \geq n$ dan $t \in [0,1]$ berakibat $|f_k(t) - 0| = \left|\frac{t^k}{k} - 0\right| < \varepsilon$.

2.6 Ruang Barisan

Dalam subbab ini dibahas mengenai ruang barisan.

Definisi 2.6.1 Diberikan ω yaitu koleksi semua barisan bilangan real, jadi: $\omega = \{\bar{x} = \{x_k\} : x_k \in R\}$ (Soeparna, 2007).

a. Untuk setiap bilangan real p dengan ($1 \leq p < \infty$) didefinisikan

$$l_p = \left\{ x = \{x_j\} \in \omega : \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p < \infty \right\}$$

dan norm pada l_p yaitu

$$\|\bar{x}\|_p = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

b. Untuk p = ∞ didefinisikan

$$l_\infty = \left\{ x = \{x_j\} \in \omega : \sup_{j \geq 1} |x_j| < \infty \right\}$$

dan norm pada

$$\|\bar{x}\|_\infty = \sup_{j \geq 1} |x_j|$$

Definsi 2.6.2 Ruang barisan l_p merupakan himpunan dari barisan bilangan yang memiliki syarat

$$l_p = \left\{ \bar{x} = (x_k) \in X : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}$$

l_p koleksi barisan bilangan yang $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty$

$$l_p(\Delta) = \{ \bar{x} = (x_k) : \Delta x \in l_p \}$$

$l_p(\Delta)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta x \in l_p$

$$l_p(\Delta_2) = \{ \bar{x} = (x_k) : \Delta_2 x \in l_p \}$$

$l_p(\Delta_2)$ koleksi barisan bilangan yang $\Delta_2 x \in l_p$ (Kizmaz, 1981).

2.7 Ruang Vektor

Dalam subbab ini dibahas tentang ruang vector.

Definisi 2.7. Misalkan V himpunan yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar bilangan real V disebut ruang vektor atau ruang linier (Anton, 2002), jika memenuhi aksioma-aksioma berikut:

1. $u + v \in V$
2. $u + v = v + u$ (sifat komutatif)
3. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (sifat asosiatif)
4. Ada sebuah vektor $0 \in V$ sehingga $0 + \mathrm{u} = \mathrm{u} + 0 = \mathrm{u}$
5. Untuk setiap u di V terdapat vektor balikan dari u atau $-u$ sehingga $u + (-u) = (-u) + u = 0$
6. Jika k skalar dan u sebarang benda vektor di V maka ku berada di $ku \in V$
7. $k(u + v) = ku + kv$ (sifat distributif)
8. $(k + 1)u = ku + 1u$
9. $k(lu) = (kl)(u)$
10. Untuk sebarang bilangan real 1 dan untuk setiap $u \in V$ berlaku $1u = u$

Definisi 2.7.2 Sebuah ruang vektor bernorma lengkap jika dan hanya jika setiap barisan yang benar-benar dapat dijumlahkan.

2.8 Ruang Bernorm

Dalam subbab ini dibahas tentang ruang bernorm.

Definisi 2.8.1 Fungsi non negatif $\|\cdot\|: X \to R$ disebut norm jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar $\alpha \in R$ berlaku:

1. $\|x\| > 0$ untuk setiap $x \in X$
   $\|x\| = 0$, jika dan hanya jika $x = 0$, (0 vektor nol)
2. $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$untuk setiap skalar α dan $x \in X$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ untuk setiap $x, y \in X$.

Ruang linear X yang dilengkapi dengan suatu norm $\|\cdot\|$, ditulis $(X, \|\cdot\|)$ disebut ruang bernorm (Rudin,1987).

Teorema 2.8.2

l_p $(1 \leq p < \infty)$ merupakan ruang bernorm terhadap norm $\|.\|_{p.}$ (Darmawijaya,2007).

Bukti

Untuk $1 \leq p < \infty$ diambil sebarang $\tilde{x} = (x_k)$, $\tilde{y} = (y_k) \in l_p$ dan skalar α. Diperoleh:

i.) $\|\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} \geq 0$ karena $|x_k| \geq 0$ untuk setiap k.

$$= \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$= 0 \Leftrightarrow |x_k| \geq 0$ untuk setiap $k \Leftrightarrow \tilde{x}$

$= \{0\}$

$= \tilde{0}$

ii.) $\|\alpha\tilde{x}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$

$$= |\alpha| \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$= |\alpha| \|x\|_p$ jelas bahwa $|\alpha x|_p < \infty$

iii.) $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_p \leq \|\tilde{x}\|_p + \|\tilde{y}\|_p = \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$

Berdasarkan i), ii), dan iii) terbukti bahwa l_p merupakan ruang linear dan $\|.\|_p$ norm pada l_p . Dengan kata lain $(l_p, \|.\|_p)$ ruang bernorm.

Definisi 2.8.3 Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang bernorm (X, $\|.\|$) disebut barisan Cauchy atau barisan fundamental jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli n_0, sehingga untuk setiap dua bilangan asli m, $n \geq n_0$ berlaku $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$. (Robert and Ronald, 2000).

Definisi 2.8.5 Ruang bernorm dikatakan lengkap (*complete*) jika setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen (Robert dan Ronald, 2000).

Definisi 2.8.6 Barisan $\{x_n\}$ di dalam ruang bernorm disebut barisan konvergen jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli N sehingga jika $n \geq N_n \geq N$ berlaku $|x_n - x| < \varepsilon$ (Mizrahi dan Sulivan, 1949).

2.9 Ruang Banach

Dalam subbab ini dibahas mengenai ruang Banach.

Definisi 2.9.1 Ruang Banach (*Banach space*) adalah ruang bernorma yang lengkap (sebagai ruang metrik yang lengkap) jika dalam suatu ruang bernorm X berlaku kondisi bahwa setiap barisan Cauchy di X adalah konvergen (Darmawijaya, 2007).

Definisi 2.9.2 Suatu ruang bernorm X dinamakan ruang Banach jika X lengkap. Kelengkapan berarti bahwa setiap barisan Cuchy dalam X konvergen jika $\|x_n + x_m\| \to 0(n, m \to \infty), x_n \in x$, maka terdapat $x \in X$ sehingga $\|x_n - x\| \to 0(n \to \infty)$ (Maddox, 1970).

2.10 Operator Linear

Dalam subbab ini dibahas mengenai operator linear.

Definisi 2.10.1 Suatu pemetaan pada ruang vektor khususnya ruang bernorm disebut operator (Kreyszig, 1989).

Definisi 2.10.2 Diberikan ruang Bernorm X dan Y atas *field* yang sama (Kreyszig, 1989).

a. Pemetaan dari X dan Y disebut operator.
b. Operator $A : X \longrightarrow$ Y dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in X$ dan setiap skalar α berlaku $A(\alpha x) = \alpha Ax$ dan $A(x + y) = Ax + Ay$.

Definisi 2.10.3 Diberikan $(X, \|.\|)$ dan $(Y, \|.\|)$ masing-masing ruang bernorm.

a. Operator $A : X \rightarrow$ Y dikatakan terbatas jika ada bilangan $M \in R$ dengan $M \geq 0$ sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku $\|A_x\| \leq M\|x\|$.

b. Operator A dikatakan kontinu di $x \in X$ jika diberikan bilangan > 0 ada bilangan $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $y \in X$ dengan $\|x - y\| \leq \delta$ berlaku $\left\|A_x - A_y\right\| \leq \varepsilon$.

c. Jika A kontinu di setiap $x \in X$, A disebut kontinu pada X. (Kreyszig, 1989)

2.11 Ruang Barisan Selisih

Dalam subbab ini dibahas mengenai ruang barisan selisih.

Definisi 2.11.1 Tinjau barisan selisih bilangan sebagai berikut: jika $\tilde{x} = \{x_k\}$ suatu barisan bilangan dan $\Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}$untuk setiap $k \in$.
$\Delta\tilde{x}$ disebut barisan selisih pertama terhadap barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$

$$\vdots$$

$$\Delta_m\tilde{x} = \left\{\Delta_m\tilde{x}_k = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+m-i}\right\}, \text{untuk setiap } k \in \mathbb{N}$$

$\Delta_m\tilde{x}$ disebut barisan selisih ke-m terhadap barisan $\tilde{x} = \{x_k\}$
Berdasarkan gambaran di atas maka dibentuklah barisan bilangan $\Delta\tilde{x} = \{\Delta x_k\}, \Delta_2\tilde{x} = \{\Delta_2 x_k\}, \dots, \Delta_m x_m = \{\Delta_m x_k\}$ yang disebut dengan barisan selisih pertama, barisan selisih kedua, dan seterusnya sampai barisan selisih ke-m (Kizmaz, 1981).

Contoh 2.11.1

1. Diberikan barisan

$$\{x_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$$

$$= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}. \cdots\right\} \text{ untuk setiap } k = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

akan dicari

$$\Delta\tilde{x} = \{x_{k+1} - x_k\}$$

$$= \{(x_{1+1} - x_1), (x_{2+1} - x_2), (x_{3+1} - x_3), \dots \dots \dots \dots\}$$

$$= \{(x_2 - x_1), (x_3 - x_2), (x_4 - x_3), \dots \dots \dots\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{2} - 1\right), \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right), \dots \dots \dots \right\}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \dots \dots \dots \right\}$$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang pertama yaitu

$$\Delta\tilde{x} = \left\{ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \dots \dots \dots \dots \right\}$$

2. Diberikan barisan

$$\{x_k\} = \left\{\frac{1}{k}\right\}$$

$\{x_k\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \dots \right\}$ Untuk setiap k = 1,2,3, ….

akan dicari

$$\Delta_2\tilde{x} = \{(x_3 - 2x_2 + x_1), (x_4 - 2x_3 + x_2), (x_5 - 2x_4 + x_3)\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right), \left(\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\right), \dots \dots \dots \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{3}, \frac{-1}{12}, \dots \dots \right\}$$

Sehingga terbentuklah barisan selisih yang kedua yaitu

$$\Delta_2\tilde{x} = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{-1}{12}, \dots \dots \right\}$$

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil pada tahun akademik 2022/2023 di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengatuhuan Alam, Universitas Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Adapun langkah – langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mencari data dan literatur utama yang mendukung topik pembahasan ini.
2. Memahami dan mempelajari Integral Riemann bernilai barisan selisih tingkat tiga.
3. Menarik kesimpulan tentang hasil dari ruang barisan selisih ke ruang barisan tingkat tiga.

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan yang telah dilakukan sebelumnya maka dapat disimpulkan terkait integral Riemann bernilai barisan selisih $\boldsymbol{\ell_3}(\Delta)$, yaitu sebagai berikut

1. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathbb{R}\, \ell_3(\Delta)$ dikatakan terintegral Rieman pada [a,b], ditulis singkat dengan $\bar{f} \in \mathcal{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ jika terdapat barisan $\bar{u} \in \ell_3(\Delta)$ sedemikian sehingga untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga jika $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = b\}$ partisi pada [a,b] dengan $\|p\| < \delta$ dan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_1]$ maka

$$\left\|S(\bar{f}; P) - \bar{u}\right\|_{\ell_3(\Delta)} = \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_1(x_i^*)\Delta_i x - u_1\right| + \left\|\sum_{i=1}^{\infty} f_{k+1}(x_i^*)\Delta_i x - u_{k+1} + \sum_{i=1}^{\infty} f_k(x_i^*)\Delta_i x - u_k\right\|_{\ell_3\Delta}$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{\infty} f_1(x_i^*)\Delta_i x - u_1\right| + \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{\infty}\big((f_{k+1}(x_i^*)\Delta_i x - u_{k+1} + f_k(x_i^*)\Delta_i x - u_k)\big)\right|^3\right)^{\frac{1}{3}}$$

2. Fungsi $\bar{f} = (f_k): [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathbb{R}\, \ell_3(\Delta)$ terintegral Riemann pada [a,b] jika dan hanya jika $\bar{f} = (f_k): [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k = 1,2, \dots$ masing-masing terintegral Riemann pada [a,b].

3. Fungsi $\bar{f} = (f_k)$: $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] \subset \mathbb{R}\, \ell_3(\Delta)$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a,b]$ jika dan hanya jika

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(\bar{f}; P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{f}(x_i^*)\Delta_i x = \bar{u}$$

Untuk barisan $\bar{u} = (u_k) \in \ell_3(\Delta), k = 1,2, \ldots$

5.2 Saran

Pembahasan skripsi ini hanya berfokus pada integral Riemann bernilai barisan selisih $\ell_3(\Delta)$, sehingga penulis menyarankan agar dilakukan penelitian pada barisan selisih lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2004. *Aljabar Linear Elementer, Versi Aplikasi*. Erlangga Jakarta.

Barttle,R. G., and D. R. Sherbert. 2000. *Introduction to Real Analysis : Third Edition.* John Willey & Sons, Inc, 605 Third Avenue. New York.

Bullen PS & Vyborny R. 1996. *Arzela's dominated convergence theorem for the Riemann integral*, Bulletino UMI.

Darmawijaya,S. 2007. *Pengantar Analisis Abstrak.* Universitas Gajah Mada, Yogyakarta

Irmayanti, Henra, K., Asnita, A.U., Munaji, Riaddin, D., Fitriani, Junaedi, Resi, B.B.F., Setiawan, J., dan Dahlan, T. 2021. *Teori dan Aplikasi Kalkulus Dasar*.Yayasan Penerbit M. Zaini, Aceh.

Kizmaz,H. 1981. *On Certain Sequance Spaces.* Karadeniz Teknik University, Turkey.

Kreyszig,E. 1989. *Introductory Function Analysis With Application.* Willey Classic Library, New York.

Maddox, I.J. 1970. *Element of Functional Analysis. Cambridge.* University Press, London.

Mizrahi, A. dan Sulivan, M. 1949. *Calculus and Analytic Geometry.* Wadsworth Publishing Company Belmont, California.

Pirade, S.M., Manurung, T., dan Titaley, J. 2017. Integral Riemann-Stieltjes Pada Fungsi Bernilai Real. *Journal of Dedicators Community, Vol. 6, No. 1.*

Robert, G. Ronald R. 2000. *Introduction to Real Analysis.* Jhon Wiley & Sons, inc, Newtork

Rudin, Walter. 1921. *Real and Complex Analysis.* California: University Of California

Siagian, M.G. 2016. Kemampuan Koneksi Matematik dalam Pembelajaran Matematika. *Journal of Mathematics and Science.*

Varberg, D., E. J. Purcell, S. E. Rigdon. 2010. *Kalkulus Edisi Kesembilan*. Terjemahan I Nyoman Susila. Erlangga. Jakarta.