I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Perkembangan ilmu pengetahuan dan teknologi sampai saat ini terus mengalami kemajuan. Salah satunya adalah cabang ilmu matematika yang sampai saat ini mengalami perkembangan yang berguna untuk kemajuan teknologi. Para peneliti terus melakukan penelitian untuk selalu menemukan penemuan-penemuan baru yang dapat memberikan sumbangan ilmu pengetahuannya sebagai penunjang berkembangnya ilmu-ilmu lain.

Saat ini tuntutan terhadap penguasaan matematika terapan semakin kuat. Kerja efektif, praktis dan akurat diperlukan baik untuk menjalani kehidupan saat ini (sebagai mahasiswa) maupun nanti bila memasuki dunia kerja. Banyak masalah matematik dapat disajikan dalam bentuk model matematika. Oleh karena itu, khususnya bagi mahasiswa yang mengambil jurusan matematika, IPA dan teknik perlu pengetahuan dasar bagaimana cara mencari solusi suatu model matematika.

Bagi mahasiswa, mata kuliah persamaan diferensial biasa merupakan mata kuliah yang dapat mengantarkan ke pemikiran-pemikiran menerapkan matematika. Persamaan diferensial merupakan persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih, yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial memegang peranan penting dalam rekayasa, fisika, ilmu ekonomi dan berbagai macam disiplin ilmu. Persamaan diferensial muncul dalam berbagai bidang sains dan teknologi.

Studi mengenai persamaan diferensial dimulai setelah penemuan Kalkulus dan Integral. Pada tahun 1676 Newton menyelesaikan sebuah persamaan diferensial dengan menggunakan deret tak hingga, sebelas tahun setelah penemuannya tentang bentuk fluksional dari kalkulus diferensial pada tahun 1665. Newton tidak mempublikasikan hal tersebut sampai dengan tahun 1693, pada saat Leibniz menghasilkan rumusan persamaan diferensial yang pertama.

Perkembangan persamaan diferensial sangat pesat dalam tahun-tahun berikutnya. Dalam tahun 1694-1697 John Bernoulli menjelaskan ":Metode Pemisahan Variabel" dan membuktikan bahwa persamaan diferensial homogen orde satu dapat direduksi menjadi bentuk persamaan diferensial dengan variabel-variabel yang dapat dipisahkan. Bernoulli menggunakan metode ini terhadap persoalan-persoalan trayektori ortogonal. John Bernoulli dan saudaranya Jacob Bernoulli (yang menemukan Persamaan Diferensial Bernoulli) berhasil menyederhanakan sejumlah besar persamaan diferensial menjadi bentuk yang lebih sederhana yang dapat mereka selesaikan.

Persamaan Diferensial Bernoulli adalah persamaan diferensial orde satu dan bentuk umum dari persamaan diferensial Bernoulli adalah $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$.

Persamaan diferensial tak linear homogen Bernoulli atau yang lazim dikenal dengan sebutan persamaan diferensial Bernoulli menjadi model utama dalam berbagai cabang bidang aplikasi. Persamaan diferensial Bernoulli tersebut dibedakan atas derajat ketaklinierannya (n). Sebagai contoh, persamaan diferensial orde dua Bernoulli (n=2) lazim digunakan untuk memodelkan proses pertumbuhan logistik dalam bidang ilmu hayati dan perilaku *chaos.* Untuk orde tak linear ketiga (n=3) persamaan diferensial Bernoulli membentuk persamaan *Gizbun-Landau* atau persamaan *quartic* yang lazim digunakan dalam menelaah proses terjadinya korosi. Persamaan diferensial Bernoulli juga merupakan bagian tak linear persamaan diferensial parsial *Klein Gordon* yang dikenal sangat luas pemakaiannya, diantaranya untuk mempelajari dinamika partikel-partikel elementer dan Stokastik resonan, penelaahan transportasi *fluxon*, pembangkitan laser *squeezed.*

Sebagaimana lazim dijelaskan pada pustaka matematika, penyelesaian persamaan diferensial Bernoulli selalu dilakukan melalui proses linierisasi sesuai dengan yang direkomendasikan oleh Jacob Bernoulli. Transformasi dari persamaan diferensial tak linear ke dalam persamaan diferensial linear dilakukan dengan menggunakann “fungsi transformasi Bernoulli”, yang selanjutnya diselesaikan dengan metode penyelesaian persamaan diferensial linear.

Dalam kehidupan sehari-hari, tidak jarang ditemui permasalahan yang dapat dirumuskan dalam bentuk persamaan diferensial tak linear. Pada umumnya, persamaan diferensial tak linear diselesaikan dengan linearisasi terlebih dahulu untuk selanjutnya diselesaikan dengan metode penyelesaian persamaan diferensial linear.

Namun, tidak semua persamaan diferensial tak linear dapat langsung dilinearisasi. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear adalah metode transformasi diferensial. Metode ini dapat digunakan tanpa linearisasi. Pada tahun 1986, Zhou memperkenalkan suatu metode yang dapat diterapkan pada persamaan tak linear tanpa linearisasi. Metode ini telah banyak diterapkan untuk menyelesaikan berbagai persamaan. Metode transformasi diferensial untuk menyelesaikan persamaan diferensial tak linear tanpa linearisasi yaitu persamaan diferensial Riccati.

Persamaan diferensial tak linear dalam bentuk $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$ dikenal dengan persamaan diferensial Riccati. Nama ini untuk mengenang ahli matematika dan filsafat dari Itali, Count Jacopo Francesco Riccati (1676-1754). Bila $R(x) = 0$ persamaan diferensial Riccati berbentuk persamaan diferensial Bernoulli dan bila $Q(x) = 0$ menjadi persamaan diferensial orde-1. Solusi persamaan diferensial Riccati bergantung pada fungsi $P(x), Q(x)$ dan $R(x)$. Penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan diferensial Riccati sesuai dengan sifat-sifat transformasi diferensial.

Transformasi diferensial merupakan suatu langkah iteratif untuk memperoleh solusi analitik deret Taylor. Metode analitik adalah metode penyelesaian model matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku. Metode analitik disebut juga metode sejati karena ia memberi kita solusi sejati atau solusi yang sesungguhnya, yaitu solusi yang memiliki galat sama dengan nol, sedangkan metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan atau aritmatika biasa (tambah, kurang, kali dan bagi).

1.2 Tujuan Penelitian

Tujuan dilakukannya penelitian ini adalah menyelesaikan persamaan diferensial Riccati menggunakan metode transformasi diferensial.

1.3 Manfaat Penelitian

Manfaat dilakukannya penelitian ini adalah:

1. Mengetahui sifat-sifat transformasi diferensial dan menyelesaikan persamaan diferensial Riccati dengan metode transformasi diferensial.
2. Menambah bahan referensi mengenai persamaan diferensial Riccati.