II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam bab ini diberikan beberapa definisi dan istilah yang digunakan dalam penelitian ini.

Definisi 2.1 (Turunan)

Turunan merupakan pengukuran terhadap bagaimana fungsi berubah. Secara umum, turunan menyatakan bagaimana suatu besaran berubah akibat perubahan besaran lainnya. Turunan fungsi f adalah fungsi lain f' (dibaca "f aksen") yang lainnya pada sebarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

asalkan limit ini ada.

Jika limit ini memang ada, maka dikatakan bahwa f terdiferensialkan di c.

Contoh 1.

Andaikan $f(x) = 13x - 6$. Cari $f'(4)$.

Penyelesaian:

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[13(4+h) - 6] - [13(4) - 6]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{13h}{h} = \lim_{h \to 0} 13 = 13$$

(Purcell and Varberg, 1987).

Definisi 2.2 (Diferensial)

Difference dalam bahasa inggris artinya beda, sehingga diferensial adalah selisih variabel. Jika $y = f(x)$ dengan $f(x)$ adalah suatu fungsi yang terdiferensialkan terhadap variabel bebas x, maka dy adalah diferensial dari variabel tak bebas (terikat) y, yang didefinisikan dengan $dy = f(x)dx$.

Andaikan $y - f(x, y)$, dengan f adalah suatu fungsi yang dapat didiferensialkan, diferensial dari peubah tak bebas (terikat) dy, disebut juga diferensial total dari f, yang didefinisikan $dy = df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$ (Purcell and Varberg, 1987).

Definisi 2.3 (Persamaan Diferensial)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas. Bila hanya ada satu variabel bebas yang diasumsikan, maka subyek disebut persamaan diferensial biasa.

Contoh 2.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
2. $x\,dy + y\,dx = 4\,dx$ (Purcell and Varberg, 1987).

Definisi 2.4 (Orde, Degree dan Persamaan Diferensial)

Suatu persamaan diferensial biasa orde n adalah persamaan berbentuk: $F\left(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}\right) = 0$ yang menyatakan hubungan antara perubah bebas x, perubah tak bebas $y(x)$ dan turunannya yaitu $y', y'', \cdots, y^{(n)}$.

Jadi suatu persamaan diferensial disebut mempunyai orde (tingkat) n jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu adalah turunan ke n.

Dan suatu persamaan diferensial disebut mempunyai degree (derajad) k jika turunan yang tertinggi dalam persamaan diferensial itu berderajad k.

Contoh 3.

1. $x\frac{dy}{dx} + 5y = 6$; orde satu, derajad satu
2. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 4\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$; orde tiga, derajad satu
3. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 2xy = 6$; orde tiga, derajad dua

   Karena turunan tertingginya berderajad dua (Kartono, 1994).

Definisi 2.5 (Persamaan Diferensial Eksak)

Suatu persamaan diferensial dengan bentuk

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.1}$$

Disebut persamaan diferensial eksak, jika ada suatu fungsi $f(x, y)$yang diferensial totalnya sama dengan $M(x, y)dx + N(x, y)dy$, yaitu (dengan meniadakan lambang x dan y)

$$df = M\,dx + N\,dy \tag{2.2}$$

Jika persamaan (2.1) eksak, maka karena persamaan (2.2) dan persamaan (2.1), persamaan ini sepadan dengan

$$df = 0$$

Jadi, fungsi $f(x, y)$ adalah konstan dan penyelesaian umum persamaan (2.1) diberikan oleh

$$f(x, y) = c \tag{2.3}$$

Contoh 4.

Persamaan diferensial

$$(2x - y)dx + (-x + 4y)dy = 0 \tag{2.4}$$

adalah eksak, sebab

$$d(x^2 - xy + 2y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - xy + 2y^2)dx + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - xy + 2y^2)dy$$

$$= (2x - y)dx + (-x + 4y)dy$$

Jadi, penyelesaian umum persamaan (2.4) berbentuk (secara implisit)

$$x^2 - xy + 2y^2 = c$$

(N. Finiziodan G. Ladas, 1982).

Definisi 2.6 (Persamaan Diferensial Linear Orde-1)

Persamaan diferensial linear orde-1 adalah persamaan berbentuk

$$y' + p(x)y = q(x) \tag{2.5}$$

Persamaan ini mempunyai faktor integrasi $e^{\int P(x)dx}$. Penyelesaian umum persamaan diferensial ini adalah:

$$ye^{\int P(x)dx} = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + c$$

Langkah-langkah mendapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial:

1. Tentukan faktor integrasi
2. Dapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial dengan melakukan integrasi (Kartono, 1994).

Definisi 2.7 (Persamaan Diferensial Bernoulli)

Suatu persamaan diferensial dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + yP(x) = y^n Q(x); n \neq 0 \tag{2.6}$$

dengan transformasi $z = y^{1-n}$ dan $\frac{dy}{dx} = \frac{1y^n}{1-n}\frac{dz}{dx}$

akan menghasilkan persamaan linear orde satu

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)zP(x) = (1-n)Q(x)$$

mempunyai penyelesaian umum persamaan diferensial:

$$z\, e^{\int (1-n)P(x)dx} = \int (1-n)Q(x)e^{\int (1-n)P(x)dx} + C$$

(Kartono, 1994).

Definisi 2.8 (Persamaan Diferensial Riccati)

Persamaan diferensial Riccati adalah persamaan diferensial tak linear dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x) \tag{2.7}$$

Bila $R(x) = 0$ persamaan diferensial Riccati berbentuk persamaan diferensial Bernoulli dan bila $Q(x) = 0$ menjadi persamaan diferensial orde-1. Solusi persamaan diferensial Riccati bergantung pada fungsi $P(x), Q(x)$ dan $R(x)$. Penyelesaian persamaan diferensial Riccati dengan metode transformasi diferensial dilakukan dengan mentransformasikan persamaan diferensial Riccati sesuai dengan sifat-sifat transformasi diferensial (Shepley L. Ross, 1966).

Definisi 2.9 (Metode Transformasi Diferensial)

Definisi dasar dari transformasi diferensial untuk suatu fungsi yang analitik pada domain *D* yaitu fungsi yang mempunyai turunan pada setiap titik di persekitaran domain *D* yang dinyatakan sebagai berikut.

$$U(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0}, k = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{2.8}$$

dengan $u(x)$ merupakan fungsi asli dan $U(k)$ merupakan fungsi transformasi. Suatu fungsi u di x dapat dinyatakan dalam bentuk deret Taylor, yaitu

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k u(x)}{dx^k}\right]_{x=x_0} (x - x_0)^k \quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.8), maka persamaan (2.9) menjadi

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)(x - x_0)^k, \quad (2.10)$$

yang disebut sebagai invers transformasi diferensial. Dari persamaan (2.9) dapat dikatakan bahwa konsep dari transformasi diferensial diturunkan dari deret Taylor (Rahayu, Sugianto dan B. Prihandono, 2012).

Definisi 2.10 (Deret Taylor)

Deret Taylor dari sebuah fungsi riil atau fungsi kompleks $f(x)$ yang terdiferensialkan tak hingga dalam sebuah pemetaan sebuah bilangan riil atau kompleks a adalah deret pangkat

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x - a)^3 + \cdots$$

yang dalam bentuk lebih ringkas dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

dengan $n!$ melambangkan faktorial n dan $f^{(n)}(a)$ melambangkan nilai dari turunan ke-n dari f pada titik a.

Turunan ke nol dari f didefinisikan sebagai f itu sendiri, dan $(x-a)^0$ dan $0!$ didefinisikan sebagai 1.

Dalam kasus khusus dimana $a=0$, deret ini disebut juga sebagai Deret Maclaurin, dari nama matematikawan Skotlandia Colin Maclaurin (Thomas, Finney dan L. Ross, 1996).