II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Konsep Dasar Peluang

Ruang sampel *S* adalah himpunan semua hasil dari suatu percobaan. Kejadian *E* adalah himpunan bagian dari ruang sampel. Peluang suatu kejadian *P(E)* adalah rasio dari banyaknya titik kejadian dan ruang sampel atau :

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

Dimana $n(E)$ dan $n(S)$ berturut-turut adalah banyaknya titik kejadian dan ruang sampel. Aksioma dan sifat-sifat peluang :

1. $0 < P(E) < 1$
2. $P(\{\ \}) = 0$
3. $P(S) = 1$
4. Untuk kejadian A dan B

   $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. Jika kejadian A dan B saling asing maka $P(A \cap B) = 0$
6. Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
7. Peluang Bersyarat $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; $P(B) > 0$

2.2 Peubah Acak

Misalkan E adalah sebuah percobaan dengan ruang sampelnya S. Sebuah ruang fungsi x yang menetapkan setiap anggota $s \in S$ ke sebuah bilangan real $X(s)$ dinamakan peubah acak (Herhyanto, 2009).

Jika banyak nilai-nilai yang mungkin dari X yaitu (ruang hasil R_x) berhingga atau tak berhingga tapi dapat dihitung, maka X dinamakan peubah acak diskrit. Nilai-nilai yang mungkin dari X bisa ditulis sebagai: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$

Jika nilai-nilai yang mungkin dari X (yaitu ruang hasil R_x) merupakan sebuah interval pada garis bilangan real, maka X dinamakan peubah acak kontinu.

2.3 Distribusi Peluang

Jika X adalah peubah acak diskrit, maka $p(x) = P(X = x)$ untuk setiap x dalam range X dinamakan fungsi peluang dari X. Nilai fungsi peluang dari X, yaitu $p(x)$, harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

a. $p(x) \geq 0$

b. $\sum_x p(x) = 1$

Kumpulan pasangan yang diurutkan $\{x, (p(x)\}$ dinamakan distribusi peluang dari X. Bentuk umum dari fungsi peluang ada dua kemungkinan, yaitu berupa konstanta dan berupa fungsi dari nilai peubah acak.

Misalnya X adalah peubah acak kontinu yang didefinisikan dalam himpunan bilangan real. Sebuah fungsi disebut fungsi densitas dari X, jika nilai-nilainya, yaitu $f(x)$, memenuhi sifat-sifat sebagai berikut :

a. $f(x) \geq 0$ untuk $x \in (-\infty, \infty)$

b. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

c. untuk setiap a dan b, dengan $-\infty < a < b < \infty$, maka :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

2.4 Fungsi Pembangkit Momen

Jika X adalah peubah acak, baik diskrit maupun kontinu, maka fungsi pembangkit momen dari X (dinotasikan dengan $M_x(t)$) didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = E(e^{tx}) \qquad (2.4.1)$$

Untuk $-h < t < h$ dan $h > 0$

Definisi 2.1: Fungsi Pembangkit Momen Diskrit

Jika X adalah peubah acak diskrit dan $p(x)$ adalah nilai fungsi peluang dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \sum_x e^{tx}\, p(x) \qquad (2.4.2)$$

Definisi 2.2: Fungsi Pembangkit Momen Kontinu

Jika X adalah peubah acak kontinu dan $f(x)$ adalah nilai fungsi densitas dari X di x, maka fungsi pembangkit momen dari X didefinisikan sebagai:

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx \qquad (2.4.3)$$

2.5 Konsep Dasar dan Fungsi Reliabilitas

Keterandalan (Reliabilitas) adalah ukuran suatu komponen atau peralatan untuk beroperasi terus–menerus tanpa adanya gangguan atau kerusakan. Menurut Patrick (2001) *practical reliability* merupakan probabilitas sebuah komponen atau suatu sistem untuk dapat beroperasi sesuai dengan fungsi yang diinginkan untuk suatu periode waktu tertentu ketika digunakan untuk dibawah kondisi operasional tertentu.

Fungsi-fungsi pada distribusi uji hidup sistem merupakan suatu fungsi yang menggunakan variabel random waktu hidup suatu sistem. Variabel random waktu hidup suatu sistem biasanya dinotasikan dengan huruf *T* dan akan membentuk suatu distribusi. Distribusi waktu hidup dijelaskan oleh tiga fungsi, yaitu fungsi Reliabilitas R(t), fungsi densitas peluang f(t) dan fungsi kegagalan/fungsi *hazard* h(t). Ketiga fungsi tersebut ekuivalen secara matematik, yang berarti jika salah satu dari ketiga fungsi tersebut diketahui, maka fungsi yang lain dapat diturunkan.

Keterandalan (reliabilitas) adalah peluang suatu produk akan beroperasi dengan baik untuk periode yang telah ditetapkan di bawah kondisi yang ditentukan, seperti suhu dan tegangan, tanpa kegagalan (Cox & Oakes 1984). Keterandalan Dirumuskan sebagai:

$$\begin{aligned} R(t) &= P\ (\text{objek hidup lebih dari waktu } t) \\ &= P\ (T > t) \end{aligned}$$

= 1- *P (objek gagal sebelum waktu t)*

= 1- $P\ (T \leq\ t\ )$ (2.4.4)

R(t) merupakan fungsi keterandalan, probabilitas bahwa kegagalan tidak akan terjadi sebelum t, atau probabilitas bahwa waktu kerusakan lebih besar atau sama dengan t.

2.6 Fungsi Densitas Peluang

Waktu tahan hidup *T* mempunyai fungsi densitas peluang yang dinotasikan dengan *f(t)* dan didefinisikan sebagai peluang kegagalan suatu objek pada interval $(t, t + \Delta t)$ per satuan waktu. Fungsi densitas peluang dinyatakan sebagai :

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(objek\ gagal\ pada\ interval\ (t, t + \Delta t)}{\Delta t} \right]$$

$$f(t) = \lim_{\Delta t} \left[\frac{P(t < \ T < t + \Delta t)}{\Delta t} \right]$$

Yang mempunyai sifat sebagai berikut :

$$i. f(t) \geq 0, t \geq 0$$

$$ii. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

Fungsi f disebut fungsi densitas peluang bagi variabel random kontinu T bila ruas daerah dibawah kurva dan diatas sumbu –t sama dengan 1, dan bila ruas daerah dibawah kurva antara $t = a$ dan $t = b$ menyatakan peluang T terletak antara a dan b (Walpole, 1995).

2.7 Fungsi Kegagalan (Fungsi *Hazard*)

Fungsi kegagalan dari waktu tahan hidup T dinotasikan dengan $h(t)$ dan didefinisikan sebagai peluang suatu objek gagal di dalam interval waktu $(t, t+\Delta t)$ dengan diketahui bahwa objek tersebut masih hidup selama waktu t (David, 1996). Fungsi kegagalannya dinyatakan dengan:

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t | T > t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t) \cap (T > t)}{\Delta t P(T \geq t)} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t(1 - F(T))} \right]$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t(1 - F(T))} \right]$$

$$= \frac{1}{(1 - F(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right]$$

$$= \frac{f(t)}{(1 - F(t)}$$

$$= \frac{f(t)}{R(t)} \qquad (2.4.5)$$

2.8 Tipe Data Tersensor

Sensor dilakukan untuk memperpendek waktu percobaan karena untuk mengukur waktu kegagalan atau kematian objek memerlukan waktu yang lama dan biaya yang tidak sedikit. Dalam uji ketahanan terdapat tiga jenis sensor (Lee, 1992), yaitu:

1. Sensor Tipe I

Sensor tipe I adalah tipe penyensoran di mana percobaan akan dihentikan setelah mencapai waktu *T* yang telah ditentukan untuk mengakhiri semua *n* individu yang masuk pada waktu yang sama. Berakhirnya waktu uji *T* menjelaskan waktu sensor uji, dengan kata lain jika tidak terdapat individu yang hilang secara tiba-tiba, maka waktu tahan hidup observasi tersensor sama dengan lama waktu pengamatan.

2. Sensor Tipe II

Sensor tipe II adalah tipe penyensoran di mana sampel ke-*r* merupakan jumlah kegagagalan yang ditetapkan. Dengan kata lain jika total sampel berukuran *n*, maka percobaan akan dihentikan sampai diperoleh *r* kegagalan. Semua unit uji *n* masuk pada waktu yang sama. Pada sensor tipe II, jika tidak terdapat individu yang hilang, maka waktu tahan hidup observasi tersensor sama dengan waktu tahan hidup observasi tidak tersensor. Kelebihan dari sensor ini adalah dapat menghemat waktu dan biaya.

3. Sensor Tipe III

Dalam sensor tipe III ini, individu atau unit uji masuk ke dalam percobaan pada waktu yang berlainan selama periode waktu tertentu. Beberapa unit uji mungkin gagal/mati sebelum pengamatan berakhir sehingga waktu tahan hidupnya dapat diketahui dengan pasti. Kemungkinan kedua adalah unit uji keluar sebelum pengamatan berakhir, atau kemungkinan ketiga adalah unit uji tetap hidup sampai batas waktu terakhir pengamatan. Untuk objek yang hilang, waktu tahan hidupnya adalah sejak masuk dalam pengamatan sampai dengan waktu terakhir sebelum hilang. Untuk unit uji yang tetap hidup, waktu tahan hidupnya adalah dari mulai masuk pengamatan sampai waktu pengamatan berakhir. Penyensoran data dapat disebabkan oleh beberapa hal, antara lain:

a. Data hilang

b. Data keluar (*withdrawls*)

c. Berakhir waktu pengamatan

Percobaan juga dapat dilakukan tanpa menggunakan ketiga tipe penyensoran tersebut, yaitu dengan sampel lengkap. Sampel lengkap berarti bahwa nilai kegagalan dari semua unit sampel yang diobservasi dapat diketahui. Percobaan akan berhenti jika semua sampel yang diamati mengalami kegagalan.

2.9 Proses Poisson

Definisi 2.3: Proses Poisson (*Stationary independent increments*)

Suatu proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika memenuh:

i. $(N(0) = 0)$

ii. (proses mempunyai kenaikan bebas stasioner (*stationary independent increments*)

iii. $P(N(h) = 1) = \lambda h + 0(h)$

iv. $P(N(h) \geq 2) = 0(h)$

(S.Osaki, 1992)

Peluang bahwa ada k kejadian pada interval $(0, t|$, dari definisi 2.3, untuk $t \geq 0$ berlaku:

$P_k(t) = P(N(t) = k | N(0) = 0), k = 0,1,2, \ldots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k\,(t) = 1 \qquad (2.4.6)$$

Karena proses poisson stationer, maka:

$P(N(s+t) - N(S) = k) = P(N(t) = k | N(0) = 0) = P_k(t)$

Untuk sebarang $s \geq 0, t \geq 0$.

Definisi 2.4: Proses Poisson (independent increments)

Suatu proses menghitung $\{N(t), t \geq 0\}$ dikatakan proses poisson dengan parameter $\lambda > 0$ jika memenuhi:

i. $(N(0) = 0)$

ii. Proses mempunyai kenaikan bebas ($independent\ increments$)

iii. Peluang ada k kejadian dalam interval waktu t:

$$P_k(t) = P(N(t+s) - N(s) = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1, \ldots$$

(S. Osaki, 1992)

Maka:

$E[N(t)] = \lambda t$

$var[N(t)] = \lambda t$

$\lambda = \frac{E[N(t)]}{t} = rate$ (laju dari proses)

$= \text{rata} - \text{rata banyaknya kejadian yang terjadi per waktu } t$

Teorema 1:

Jika jumlah kegagalan mengikuti distribusi Poisson maka suatu variabel random waktu antar kegagalan mengikuti distribusi Eksponensial.

Fungsi peluang distribusi Poisson dengan parameter λt adalah:

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^x}{x!} e^{-\lambda t} & ; x = 0,1,2, \dots , \\ & 0; x \; lainnya \end{cases} \qquad (2.4.7)$$

Bukti:

$f(t) =$ fungsi densitas peluang dari interval waktu t antar pemunculan kejadian yang berurutan $t \geq 0$.

$F(t) =$ fungsi distribusi kumulatif dari *t*

Jika suatu variabel random waktu antar kedua kegagalan berurutan dimisalkan T, Maka:

$$P\{T > t\} = P\{\text{tidak ada kegagalan dalam waktu } t\}$$

$$= \int_T^{\infty} f(t)dt = P_0\,(t) = e^{-\lambda t}$$

Atau menggunakan $F(t)$ sebagai fungsi distribusi kumulatif dari T diperoleh:

$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t}$

Maka fungsi densitasnya adalah:

$$f(t) = f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; t \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 \quad ; t\ lainnya \end{cases}$$

Dari fungsi densitas distribusi Eksponensial dengan parameter λ diatas, maka diperoleh fungsi pembangkit momen:

$$M_T(x) = \int_0^\infty e^{tx}\ \lambda t^{-\lambda t} dt = \int_0^\infty \lambda t^{-(\lambda - x)} dt = \left. \frac{-\lambda t^{-(\lambda - x)}}{\lambda - x} \right]_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

$$M_T'(x) = \frac{\lambda}{(\lambda - x)^2}\, dan\ M_T''(x) = \frac{2\lambda}{(\lambda - x^3}$$

$E(T) =$ diperoleh dari turunan pertama fungsi pembangkit momen, sehingga:

$$E(T) = M_T'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(T) = M_T''(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Maka:

$$var(T) = E(T^2) - (E(T)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Jadi waktu kegagalan yang berurutan mengikuti distribusi Eksponensial dengan rata-rata $\frac{1}{\lambda}$ dan varian $\frac{1}{\lambda^2}$

2.10 Distribusi Gamma

Menurut Herhyanto (2009) peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1} . e^{-\frac{x}{\beta}} ; x > 0, a > 0, \beta > 0 \\ 0; x\ lainnya \end{cases}$$

Peubah acak X yang berdistribusi Gamma disebut juga peubah acak gamma. Peubah acak X yang berdistribusi Gamma dapat dinotasikan dengan $G(x;\alpha,\beta)$, artinya peubah acak X berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β.

Peubah acak X yang berdistribusi Gamma dengan parameter α dan β bisa juga ditulis sebagai:

$$X \sim G(\alpha,\beta)$$

Fungsi pembangkit momen distribusi Gamma berdasarkan definisi pembangkit momen kontinu adalah :

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\, 0\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} x^{a-1}. e^{-\frac{x}{\beta}}\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \left[\left(\frac{1}{\beta}\right) - t\right] dx$$

$$= \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{a-1} e^{-x} \left[\left(\frac{1}{\beta}\right) - t\right] dx$$

Misalnya : $y = x\left(\frac{1}{\beta} - t\right), maka\ x = \frac{y}{\frac{1}{\beta} - t}$ sehingga $dx = \frac{\beta}{1-\beta t} dy$

Untuk $x = 0,$ maka $y = 0$

Untuk $x = \infty,$ maka $y = \infty$

$$M_x(t) = \frac{1}{\beta^a \Gamma(a)} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\beta y}{1-\beta t}\right)^{a-1} . e^{-y} \frac{\beta}{1-\beta t} dy$$

$$= \frac{\beta^a}{\beta^a \Gamma(a)(1-\beta t)^a} \int_{-\infty}^{\infty} y^{a-1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)(1-\beta t)^a}\ \Gamma(a)$$

$$M_x(t) = (1-\beta t)^a; t < \frac{1}{\beta}$$

Maka diperoleh fungsi pembangkit momen distribusi Gamma adalah $M_x(t) = (1-\beta t)^a; t < \frac{1}{\beta}$

2.11 Distribusi Eksponensial

Distribusi Eksponensial merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma dengan $\alpha = 1$ dan $\beta = \theta$

Fungsi Densitas Eksponensial:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} & ; x > 0 \\ & 0; x\ lainnya \end{cases}$$

dengan θ adalah rata-rata waktu kegagalan dan *t* adalah waktu percobaan.

Fungsi distribusi kumulatif distribusi Eksponensial adalah: $\frac{1}{\theta} e^{-t/\theta}$

$$F(t) = \int_0^t f(t) dt$$

$$F(t) = \int_0^t \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} dt$$

$$F(t)=\frac{1}{\theta}\int_{0}^{t} e^{-t/\theta}dt$$

$$F(t)=\frac{1}{\theta}\left[-\theta e^{-t/\theta}\right]_{0}^{t}$$

$$F(t)=-e^{-t/\theta}]_{0}^{t}$$

$$F(t)=1-e^{-t/\theta}$$

Fungsi tahan hidupnya adalah:

$$R(t)=1-F(t)=e^{-t/\theta}$$

Fungsi kegagalannya adalah:

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}=\frac{1}{\theta}$$

(Lee, 1992).

berdasarkan definisi pembangkit momen kontinu, maka fungsi pembangkit momen untuk distribusi Eksponensial adalah:

$$M_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{tx} f(x)dx+\int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{tx}\,0\,dx+\int_{0}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{\theta}\right).e^{-t/\theta}\,dx$$

$$=0+\int_{0}^{\infty} e^{tx}\left(\frac{1}{\theta}\right).e^{-t/\theta}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{tx}\left(\frac{1}{\theta}\right).e^{-t/_\theta}\,dx$$

$$= \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^{-t/_\theta}\,(1-\theta t)dx$$

Misalkan: $u = -\frac{t}{\theta}(1-\theta t)$

$$du = -\frac{1}{\theta}(1-\theta t)dx$$

$$dx = \frac{-\theta}{(1-\theta t)}du$$

Maka:

$$= \frac{1}{\theta}\int_0^\infty e^u\,\frac{-\theta}{(1-\theta t)}du$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}\int_0^\infty e^u\,du$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}\lim_{b\to\infty} e^u]_0^b$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}\lim_{b\to\infty} e^{-\frac{t}{\theta}(1-\theta t)}\Big]_0^b$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{e^{-\frac{t}{\theta}(1-\theta t)}}\Bigg]_0^b$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}(0-1)$$

$$= -\frac{1}{(1-\theta t)}$$

$$M_x(t) = (1-\theta t)^{-1}$$

Maka diperoleh fungsi pembangkit momen distribusi Eksponensial adalah $M_x(t) = (1 - \theta t)^{-1}$

2.12 Distribusi Khi-Kuadrat

Distribusi Khi-kuadrat merupakan bentuk khusus dari distribusi Gamma dengan $\alpha = \frac{v}{2}$ dan $\beta = 2$

Fungsi Densitas Khi-kuadrat

Peubah acak X dikatakan berdistribusi khi-kuadrat, jika dan hanya jika fungsi densitasnya berbentuk :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{v}{2}}\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{(v-2)}{2}} e^{\frac{-x}{2}}; x > 0 \\ 0; x\ lainnya \end{cases}$$

Peubah acak X berdistribusi khi-kuadrat disebut juga peubah acak khi-kuadrat. Penulisan notasi dari peubah acak yang berdistribusi khi-kuadrat adalah $X^2(v)$, artinya peubah acak X berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat kebebasan v. Peubah acak X yang berdistribusi khi-kuadrat dengan derajat bebas v bisa juga ditulis sebagai :

$$X \sim X^2(v)$$

Berdasarkan definisi pembangkit momen kontinu, maka fungsi pembangkit momen untuk distribusi khi-kuadrat adalah :

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx} f(x) dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\, 0\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} x^{\frac{(v-2)}{2}} e^{\frac{-x}{2}} dx$$

$$= 0 + \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} x^{\frac{v}{2}-1}\, e^{\frac{-x\left[\left(\frac{1}{2}-t\right)\right]}{2}} dx$$

$$misalkan : y = x\left[\left(\frac{1}{2} - t\right)\right], maka\ x = \frac{y}{\left(\frac{1}{2}\right) - t}$$

$$dx = \frac{2}{1-2t} dy$$

Untuk $x = 0,$ maka $y = 0$

Untuk $x = \infty,$ maka $y = \infty$

$$M_x(t) \quad = \frac{1}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{y}{\left(\frac{v}{2}\right) - t}\right)^{\frac{v}{2}-1} e^{-y} \frac{2}{1-2t} dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \int_{0}^{\infty} y^{\frac{v}{2}-1}\, e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{(1-2t)^{\frac{v}{2}} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$M_x(t) = (1-2t)^{\frac{v}{2}}$$

Jadi diperoleh fungsi pembangkit momen distribusi Khi-kuadrat adalah

$$M_x(t) = (1-2t)^{\frac{v}{2}}$$

2.13 Statistik Cukup

Statistik cukup untuk parameter θ adalah statistik dalam arti tertentu dapat menyerap semua informasi tentang θ yang termuat dalam sampel. Bila $T(X)$ adalah statistic cukup untuk θ maka setiap inferensi tentang θ harus tergantung pada sampel $X = (X_1, X_2 \ldots, X_n)$ hanya melalui $T(X)$.

Definisi :

Andaikan $X_1, \ldots, X_n \sim p\ (x; \theta\ )$.

T adalah statistik cukup untuk θ jika distribusi bersyarat dari $X_1, \ldots, X_n\ \mid T$

tidak bergantung pada θ. Jadi, $p(x_1, \ldots, x_n\ |t; \theta) = p(x_1, \ldots, x_n\ |t\ )$.

Ini berarti dapat mengganti $X_1, \ldots, X_n$ dengan $T(X_1, \ldots, X_n\ )$ ataupun $T(X)$ tanpa kehilangan informasi.

Maksud dari definisi diatas yaitu : bila $f(x\ |\theta)$ adalah densitas dari $X = (X_1, \ldots, X_n\ )$ dan $g(T(x)|\theta\ )$ adalah densitas dari $T(X)$, maka $T(X)$ adalah statistik cukup untuk θ bila untuk setiap $X = (X_1, \ldots, X_n\ )$ dalam ruang sampel , rasio = $\frac{(f(x\ |\theta\ )}{g(T(x)|\theta\ )}$ tidak bergantung pada θ.

2.14 Metode Kemungkinan Maksimum (*Maximum Likelihood Estimation)*

Metode kemungkinan maksimum adalah metode untuk menduga satu sebaran dengan memilih dugaan-dugaan yang nilai-nilai parameternya diduga dengan memaksimalkan fungsi kemungkinannya, metode kemungkinan maksimum merupakan salah satu metode yang paling sering digunakan untuk mencari nilai estimasi dari suatu parameter.

Menurut Nar Herhyanto (2003), misalkan X adalah peubah acak kontinu atau diskrit dengan fungsi kepekatan peluang $f(x;\theta)$, dengan θ adalah salah satu parameter yang tidak diketahui. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ merupakan sampel acak berukuran n maka fungsi kemungkinan (likelihood function) dari sampel acak itu adalah:

$$L(\theta) = f(x_1;\theta)\, f(x_2;\theta) \dots f(x_n;\theta)$$

Dalam hal ini, fungsi kemungkinan adalah fungsi dari parameter yang tidak diketahui θ. Biasanya untuk mempermudah penganalisaan, fungsi kemungkinan $L(\theta)$ diberi log natural (ln). Penduga kemungkinan maksimum dari θ adalah nilai θ yang memaksimalkan fungsi $L(\theta)$.

2.15 Metode Bootstrap

Pertama kali *bootstrap* diperkenalkan oleh Efron pada tahun 1979 untuk mengetahui sebaran statistik sampel yang tidak diketahui pengamatan-pengamatan bebas menyebar secara identik. *Bootstrap* merupakan metode *resampling* untuk inferensia statistik yang biasa digunakan untuk menduga selang kepercayaan, tetapi juga digunakan untuk menduga bias dan menduga ragam atau menentukan hipotesis.

Metode bootstrap dapat diterapkan untuk kasus nonparametrik maupun parametrik. Dalam kedua kasus tersebut, inferensia didasarkan pada suatu observasi sampel acak berukuran n dan berdistribusi identik (Efron dan Tibshirani, 1993).

Definisi 2.5

Jika $X = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)$ sampel acak dari suatu populasi maka variabel $\mathrm{X}^* = (\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \dots, \mathrm{x}_n^*)$ adalah sampel acak *bootstrap* yaitu sampel yang diperoleh dari X secara acak dengan pengembalian. Variabel $\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \dots, \mathrm{x}_n^*$ bebas dan berdistribusi bersyarat terhadap X. Tanda $*$ mengindikasi bahwa X^* bukan himpunan data X tetapi hasil resampel, berarti titik data $\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \dots, \mathrm{x}_n^*$ adalah sampel acak berukuran n dengan pengembalian dari populasi $\mathrm{n}(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n)$, $\mathrm{x^*}_1$=$\mathrm{x}_7, \mathrm{x^*}_2 = x_3, \dots$, $\mathrm{x^*}_n = \mathrm{x}_n$ (Efron dan Tibshirani, 1993).

Dalam kasus nonparametrik, distribusi sampel f_n diambil dari distribusi populasi yang tidak diketahui, f_n disebut distribusi empiris dari X yaitu distribusi yang mempunyai peluang 1/n untuk setiap titik pada X. Sedangkan untuk kasus parametrik distribusi f_n diketahui. Dalam kedua kasus tersebut X^* diambil dengan *resampling* dari distribusi sample asli X (Efron dan Tibshirani, 1993).

Prinsip dasar dalam pembentukan sampel dengan metode *bootstrap* nonparametrik adalah sebagai berikut:

1. Konstruksi distribusi peluang sampel, yaitu f_n dengan setiap unsur dalam populasi memiliki kesempatan yang sama untuk diikutsertakan kedalam sampel sehingga setiap titik $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_n$ memiliki peluang untuk terpilih sebesar 1/n, dengan kata lain anggota sampel diambil dengan pengembalian.

2. Dengan f_n tetap, ambil sampel acak berukuran n dari populasi dengan pengambalian sebut $\mathrm{x^*}_\mathrm{i}$, dengan $\mathrm{x_i} = \mathrm{x^*}_\mathrm{i}$, sehingga $\mathrm{x_i}$ akan menyebar identik i=1,2,3, ... , n sampel ini disebut sampel *bootstrap* $X^* = (\mathrm{x}_1^*, \mathrm{x}_2^*, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}^*)$.
3. R_n merupakan himpunan pasangan terurut (X, f_n) atau disebut distribusi sampling R_n(X, f_n). Aproksimasi R_n(X, f_n) dengan distribusi sampling *bootstrap* $R^*{}_n\left(X^*{}_i, f^*{}_n\right)$.

Untuk menjelaskan metode *bootstrap* secara umum pandang R_n(X, f_n) besaran yang tergantung dari sampel X=($\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \mathrm{x}_\mathrm{n}$) dan distribusi peluang sampel f. Berdasarkan Teorema Limit Pusat, pada kasus nonparametrik diambil $R_n = \sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ dengan $R_n\,\tilde{}\,N(0,1)$dan $\hat{\theta}_n$ adalah statistik untuk θ (Efron dan Tibshirani, 1993).