Hubungan Koefisien Tribinomial dengan Bilangan Catalan, Bilangan Mersenne, dan Bilangan Stirling

(Tesis)

Oleh

DESIANA PUTRI

NPM 2127031012

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

UNIVERSITAS LAMPUNG

BANDAR LAMPUNG

2023

ABSTRAK

HUBUNGAN KOEFISIEN TRIBINOMIAL DENGAN BILANGAN CATALAN, BILANGAN MERSENNE, DAN BILANGAN STIRLING

Oleh

Desiana Putri

Bilangan Catalan yang ditemukan oleh ilmuan asal Belgia bernama Eugene Charles Catalan dan didefinisikan dalam persamaan $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}}$. Bilangan Catalan memiliki beberapa aplikasi terhadap beberapa permasalahan kombinatorik, seperti pada koefisien binomial $\binom{n}{r}$ dan koefisien tribinomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ yang dapat membentuk bilangan Catalan. Koefisien tribinomial adalah bentuk khusus dari koefisien binomial untuk permasalahan bilangan segitiga T_n dengan $n \geq 1$. Pada penelitian ini akan dibuktikan bahwa koefisien binomial dan koefisien tribinomial membentuk bilangan Catalan. Dibuktikan pula bahwa koefisien tribinomial dan bilangan Catalan memiliki keterkaitan dengan bilangan Mersenne M_p. Selain itu, koefisien tribinomial juga memiliki hubungan dengan bilangan Stirling jenis kedua. Untuk mempermudah menentukan nilai koefisien tribinomial, bilangan Catalan serta bilangan Mersenne, dibuat program komputasi dengan Phyton.

Kata kunci : Bilangan Catalan, koefisien binomial, koefisien tribinomial, bilangan Mersenne, bilangan Stirling, program Phyton.

ABSTRACT

THE RELATIONSHIP OF TRIBINOMIAL COEFFICIENT WITH CATALAN NUMBER , MERSENNE NUMBER, AND STIRLING NUMBER

By

Desiana Putri

Catalan numbers was discovered by a Belgian scientist named Eugene Charles Catalan and was defined in equation $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}}$. Catalan numbers have several applications to some combinatorics problem, such as the binomial coefficients $\binom{n}{r}$ and tribinomial coefficients $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ which can form Catalan numbers. The tribinomial coefficient is a special form of the binomial coefficient for problem of triangular numbers T_n with $n \geq 1$. In this study it will be proven that the binomial coefficient and tribinomial coefficients form Catalan numbers. It has also been proven that the tribinomial coefficients and Catalan numbers are related to the Mersenne numbers M_p. The tribinomial coefficient also has a relationship with Stirling numbers of the second kind. To make it easier to find tribinomial coefficients, Catalan numbers and Mersenne numbers, a computational program with Python is created.

Keywords: Catalan number, binomial coefficient, tribinomial coefficient, Mersenne number, Stirling number, Python program.

HUBUNGAN KOEFISIEN TRIBINOMIAL DENGAN BILANGAN CATALAN DAN BILANGAN MERSENNE SERTA BILANGAN STIRLING

Oleh

Desiana Putri

Tesis

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
MAGISTER MATEMATIKA

Pada
Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Lampung

PROGRAM STUDI MAGISTER MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Tesis	: **HUBUNGAN KOEFISIEN TRIBINOMIAL DENGAN BILANGAN CATALAN, BILANGAN MERSENNE, DAN BILANGAN STIRLING**
Nama Mahasiswa	: *Desiana Putri*
Nomor Pokok Mahasiswa	: 2127031012
Program Studi	: Magister Matematika
Jurusan	: Matematika
Fakultas	: Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.	**Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.**
NIP 19631108 198902 2 001	NIP 19731109 200012 2 001

2. Ketua Program Studi Magister Matematika

Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si.
NIP 19760411 200012 2 001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Prof. Dra. Wamiliana, M.A., Ph.D.** ....

Sekretaris : **Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si.** ....

Penguji Anggota : **1. Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si. ....

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP 19711001 200501 1 002

3. Direktur Program Pascasarjana

Prof. Dr. Ir. Murhadi, M.Si.
NIP 19640326 198902 1 001

4. Tanggal Lulus Ujian Tesis : **03 Agustus 2023**

PERNYATAAN

Yang bertanda tangan di bawah ini :

Nama	: **Desiana Putri**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **2127031012**
Program Studi	: **Magister Matematika**
Jurusan	: **Matematika**

Dengan ini menyatakan bahwa tesis saya yang berjudul "**HUBUNGAN KOEFISIEN TRIBINOMIAL DENGAN BILANGAN CATALAN, BILANGAN MERSENNE, DAN BILANGAN STIRLING**" adalah hasil pekerjaan saya sendiri. Semua hasil tulisan dalam tesis ini telah mengikuti kaidah penulisan karya ilmiah Universitas Lampung. Apabila kemudian hari terbukti bahwa tesis ini merupakan hasil salinan atau telah dibuat orang lain, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai ketentuan akademik yang berlaku.

Bandar Lampung, 03 Agustus 2023
Penulis,

Desiana Putri
NPM. 2127031012

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan sebagai anak kedua dari dua bersaudara pasangan Bapak Mulyadi dan Ibu Sri Atmini pada tanggal 26 Desember 1997 di Desa Negara Ratu, Kecamatan Batanghari Nuban, Lampung Timur.

Penulis menyelesaikan Pendidikan Taman Kanak-kanak (TK) pada tahun 2004 dan Sekolah Dasar (SD) di SD Negeri 2 Negara Ratu pada tahun 2010. Pada tahun 2013 menyelesaikan Sekolah Menengah Pertama di SMP Negeri 2 Purbolinggo, dan pada tahun 2016 menyelesaikan Sekolah Menengah Atas di SMA Negeri 1 Kotagajah.

Pada tahun 2016 penulis terdaftar sebagai mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung dan lulus sebagai Sarjana Matematika pada tahun 2020. Pada tahun 2021 penulis berkesempatan untuk melanjutkan pendidikan di program studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung. Saat ini penulis merupakan seorang guru di SMPN 2 Purbolinggo, Lampung Timur.

KATA INSPIRASI

"Sesungguhnya bersama kesulitan ada kemudahan"

(Q.S. Al-Insyirah : 6)

"Allah tidak akan mengubah keadaan suatu kaum sebelum mereka mengubah keadaan mereka sendiri"

(Q.S. Ar-Ra'd : 11)

"jadikan sabar dan sholat sebagai penolongmu"

(Q.S. Al-Baqoroh :45)

"Jika kamu tidak sanggup menahan lelahnya belajar, maka kamu harus sanggup menahan perihnya kebodohan"

(Imam Syafi'i)

"Tanpa cinta, kecerdasan itu berbahaya dan tanpa kecerdasan, cinta itu tidak cukup"

(B. J. Habibie)

"Hduplah seakan kamu akan mati besok. Belajarlah seakan kamu akan hidup selamanya"

(Mahatma Gandhi)

"Bersyukur untuk menjalani kehidupan sekarang, bersabar untuk menanti keindahan di masa depan"

(Desiana Putri)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahirobbil'alamiin. Dengan rasa syukur yang tiada terkira kepada Allah Subhanahuwata'alaa yang telah memberikan kelancaran dalam menyelesaikan tesis ini. Ku persembahkan hasil karya ini kepada:

Orangtua tercinta Bapak Mulyadi dan Mama Sri Atmini yang telah merawat, membesarkan, mendidik, memberikan segalanya, dan mendukung penuh penulis untuk dapat menggapai mimpi-mimpi. Juga Kakak Eli Susanti dan Kakak Ipar Pri Susanto yang selalu memberikan doa dan semangat. Serta keluarga besar Kakek Alm. Sumarto Kemis dan Kakek Alm. Mukiman.

Para Guru dan Para Dosen yang telah memberikan waktu dan ilmunya kepada penulis.

Para sahabat dan teman-teman yang selalu membantu dan memberikan semangat untuk setiap proses hidup.

Orang-orang yang menyayangiku dan orang-orang yang aku sayangi.

Almamater kebanggaan Unila.

Negeri tercinta Indonesia.

SANWACANA

Alhamdulillahi Robbil'alamiin, Puji dan syukur Penulis ucapkan kepada Allah SWT telah melancarkan Penulis untuk menyelesaikan tesis ini. Sholawat serta salam senantiasa tetap tercurah kepada Nabi Muhammad SAW.

Tesis dengan judul "Hubungan Koefisien Tribinomial dengan Bilangan Catalan, Bilangan Mersenne, dan Bilangan Stirling" adalah salah satu syarat untuk memperoleh gelar Magister Matematika di Universitas Lampung.

Dalam menyelesaikan tesis ini, banyak pihak yang telah membantu Penulis dalam memberikan bimbingan, dorongan, dan saran-saran. Sehingga dengan segala ketulusan dan kerendahan hati pada kesempatan ini Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Ibu Prof. Dra. Wamiliana, MA., Ph.D., selaku Dosen Pembimbing I dan Pembimbing Akademik, yang telah bersedia membimbing, memberikan saran, waktu, kesabaran dan arahan dalam menyelesaikan tesis ini.
2. Ibu Dr. Notiragayu, S.Si., M.Si., selaku pembimbing II, yang telah memberikan bimbingan, saran, arahan dan motivasi.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembahas I dan Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, atas kesediaannya untuk memberikan saran dan kritik guna penyelesaian tesis ini.
4. Ibu Prof. Dr. Asmiati, S.Si., M.Si., selaku Dosen Pembahas II dan Ketua Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, atas kesediaannya untuk memberikan saran dan kritik guna penyelesaian tesis ini.
5. Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

6. Seluruh dosen dan staf karyawan Jurusan Matematika.
7. Para guru yang telah mengajarkan ilmunya serta mendidik penulis.
8. Bapak Mulyadi dan Mama Sri Atmini yang telah membesarkan, mendidik serta memberikan cinta yang sangat besar dan selalu mendoakan. Kakak Eli Susanti dan Kakak Ipar Pri Susanto yang memberikan dukungan, doa dan motivasi. Serta Keluarga besar Kakek Alm. Sumarto dan Kakek Alm. Mukiman.
9. Sahabat sekaligus teman belajar "WHS Menuju Halal" atas segala bantuan, motivasi, dan doa-doanya.
10. Teman seperjuangan Magister Matematika 2021 atas kebersamaannya.
11. Keluarga besar SMPN 2 Purbolinggo Lampung Timur yang telah memberikan doa, semangat dan dukungan kepada penulis.
12. Para sahabat dan teman-teman yang selalu memberi semangat dan doa untuk penulis.
13. Almamater tercinta Universitas Lampung.
14. Seluruh pihak yang telah membantu yang tidak bisa disebutkan satu persatu.

Semoga seluruh kebaikan dari semua pihak dapat Allah SWT balas dengan sebaik-baiknya. Semoga tesis ini dapat memberikan manfaat bagi kita semua.

Bandar Lampung, 03 Agustus 2023
Penulis

Desiana Putri

DAFTAR ISI

Halaman

V. KESIMPULAN

DAFTAR PUSTAKA

LAMPIRAN

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

DAFTAR TABEL

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Bilangan merupakan hal yang tidak dapat dipisahkan dari matematika. Bilangan digunakan dalam pencacahan dan pengukuran. Jenis-jenis bilangan yang sering dikenal dalam kehidupan sehari-hari adalah bilangan kompleks, bilangan riil, bilangan imajiner, bilangan rasional, bilangan irasional, bilangan bulat, bilangan cacah, bilangan positif dan bilangan negatif, bilangan asli, bilangan prima dan bilangan komposit. Masing-masing dari jenis bilangan ini mempunyai definisi dan sifat yang berbeda. Bilangan tidak hanya digunakan dalam bidang matematika saja, namun pada bidang lain seperti filosofi, teknologi, dan sains juga sangat membutuhkan konsep bilangan.

Dalam sejarah, bilangan muncul dari bangsa-bangsa yang bermukim sepanjang aliran sungai seperti Bangsa Mesir di aliran Sungai Nil, Bangsa Babilonia di pinggiran Sungai Tigris dan Efrat, Bangsa Hindu India di sepanjang Sungai Indus dan Gangga, begitupun Bangsa China di sepanjang aliran Sungai Hung Ho dan Yang Tze. Bangsa-bangsa tersebut menggunakan bilangan untuk perhitungan berbagai kebutuhan sehari-hari seperti dalam hal perhitungan penanggalan, perdagangan, pengukuran luas tanah, perhitungan perubahan musim dan lain sebagainya. Beberapa bilangan yang digunakan pada zaman dahulu yaitu bilangan *Hieroglyhic* (bilangan berbentuk simbol gambar) yang digunakan oleh orang Mesir, bilangan *Cuneiform* (bentuk runcing) yang digunakan oleh bangsa babilonia, bilangan Yunani dan bilangan Romawi. Kemudian seiring perkembangan zaman ditemukan sistem bilangan Hindu-Arab oleh Bangsa India, lalu menyebar di seluruh dunia hingga digunakan sampai sekarang ini.

Barisan bilangan adalah daftar urutan bilangan dari kiri ke kanan yang mempunyai karakteristik atau pola tertentu. Beberapa barisan bilangan terus dikembangkan karena keunikannya, seperti barisan bilangan Fibonacci, binomial, Lucas dan Catalan. Pada tahun 2000, F. Luca menginvestigasi tentang barisan bilangan Fibonacci dan Lucas dengan digit yang berbeda hanya satu. Begitu juga Garrett (2001) yang mengobservasi barisan Lucas-Lehmer untuk bilangan prima Mersenne. Pada tahun 2019, Wamiliana dkk. melakukan penelitian terkait penghitungan jumlah kubik pada bilangan Lucas dan bilangan Gibonacci (perumuman dari bilangan Fibonacci). Kemudian pada tahun 2022, Annamalai mengkontruksi tentang Komputasi dan Teknik Kombinatorial untuk Koefisien Binomial dan Deret Geometri.

Bilangan Catalan (*Catalan number*) adalah suatu bentuk bilangan yang terdiri dari bilangan bulat positif yang diperoleh dengan menghitung struktur kombinasi dari suatu barisan. Jumlah dari bilangan Catalan ke-*n* disimbolkan dengan C_n (Koshy, 2009). Penelitian terkait bilangan Catalan di Indonesia masih sedikit karena baru dikenal. Tetapi beberapa peneliti sudah mulai tertarik untuk mengobservasi bilangan Catalan, seperti Zaky (2013) yang telah meneliti tentang persamaan rekursif pada bilangan Catalan dan Wamiliana dkk. (2023) telah mengobservasi bilangan Catalan dan multiset grup aditif Z_{10} serta mencari hubungannya dengan bilangan Stirling.

Awal mulanya, bilangan Catalan ditemukan pada tahun 1838 oleh seorang matematikawan asal Belgia, Eugène Charles Catalan ketika mempelajari bentuk barisan *parentheses*. Barisan *parentheses* adalah barisan yang terbentuk dengan baik dari tanda kurung (Pak, 2014). *Parentheses* dibuat dari semua rangkaian yang seimbang yang dibentuk dari *n* tanda kurung sebelah kiri dan *n* tanda kurung sebelah kanan dengan jumlah dari tanda kurung antara kiri dan kanan harus sama besar. Sebagai contoh, untuk $n = 2$, dapat dibentuk rangkaian seperti ( ) ( ) dan (( )), namun tidak diperbolehkan membentuk rangkaian seperti ( ))).

Roman (2015) menjelaskan dalam bukunya yang berjudul *An Introduction to Catalan Numbers,* sebenarnya bilangan ini telah lama diketahui oleh matematikawan Mongol yaitu Ming-Antu (1692-1763). Ia menggunakannya untuk mengekspresikan sin(2x) dan sin(4x) dalam istilah sin(x), yaitu:

$$\sin 2x = 2\sin(x) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{k-1}}{4^{k-1}} sin^{2k+1}(x)$$

$$\sin 2x = 2\sin(x) - sin^3(x) - \frac{1}{4}sin^5(x) - \frac{1}{8}sin^7(x) \cdots.$$

Ming-Antu menemukan bilangan ini pada tahun 1730-an, namun penelitiannya hanya dipublikasikan di China sehingga tidak ketahui oleh ilmuan Barat (Koshy, 2009).

Leonhard Euler, seorang Matematikawan asal Switzerland, menemukan sebuah formula relasi rekursi untuk bilangan Catalan pada tahun 1750-an, dengan bentuk rekursifnya dinyatakan sebagai berikut:

$$C_{n+1} = C_0C_n + C_1C_{n-1} + C_2C_{n-2} + \cdots + C_nC_0,$$

dengan C_n yaitu banyaknya *triangulation* (pembentukan segitiga) dari poligon konveks dengan $(n + 2)$ sisi (Pak, 2014).

Setelah itu, banyak ilmuan yang mengembangkan konsep bilangan Catalan dan penerapannya. Pada tahun 2006, matematikawan Pan dan Sun telah melakukan penelitian mengenai aplikasi kombinatorial pada bilangan Catalan. Miana dkk. (2017) telah melakukan observasi dengan judul *Sums of Powers of Catalan Triangle Numbers*, dan penelitian terkait variasi bilangan Catalan dari operasi biner beberapa nonasosiatif telah dilakukan oleh Hein dan Huang (2022).

Beberapa penelitian yang telah dilakukan memberikan inspirasi bagi penulis untuk melakukan penelitian tentang aplikasi bilangan Catalan dengan bidang kombinatorika khususnya koefisien binomial. Selain dari hasil penelitian sebelumnya, penelitian ini juga didasarkan pada suatu investigasi yang dipublikasikan oleh Hansel pada sekitar tahun 1974 terkait permasalahan bilangan segitiga T_n, dengan $n \geq 1$ yang disebut dengan koefisien tribinomial dan keterkaitannya dengan bilangan Catalan (Koshy, 2009). Investigasi ini masih sangat menarik untuk diteliti lebih lanjut.

Adapun fokus dari penelitian ini adalah menentukan nilai dari koefisien tribinomial yang dinotasikan dengan $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$, dengan $0 \leq r \leq n$ dan menyelidiki hubungan koefisien binomial dengan bilangan Catalan serta menyelidiki hubungan koefisien tribinomial tersebut dengan bilangan Catalan. Diketahui juga bahwa koefisien tribinomial memiliki keterkaitannya dengan bilangan Mersenne sehingga penelitian ini juga menyelidiki hubungan antara bilangan Catalan, koefisien tribinomial dan bilangan Mersenne, serta hubungan koefisien tribinomial dengan bilangan Stirling.

1.2. Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Menunjukkan bahwa jumlah koefisien pada setiap baris dari konstruksi koefisien tribinomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$, dengan $0 \leq r \leq n$, dapat membentuk bilangan Catalan;
2. Menunjukkan hubungan koefisien tribinomial dengan bilangan Mersenne;
3. Menunjukkan bahwa koefisien binomial juga memiliki hubungan dengan bilangan Catalan;
4. Mencari hubungan koefisien tribinomial dengan bilangan Stirling.

1.3. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini yaitu memberikan sumbangan pemikiran untuk memperluas dan memperdalam pengetahuan ilmu matematika mengenai bilangan Catalan, koefisien tribinomial, bilangan Mersenne, bilangan Stirling, serta memberikan pengetahuan mengenai hubungan bilangan Catalan dengan koefisien binomial, hubungan koefisien tribinomial dengan bilangan Catalan, bilangan Mersenne, dan bilangan Stirling.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Bilangan Catalan

Berikut definisi dari bilangan Catalan yang dapat dinyatakan dalam beberapa cara dan juga contoh penggunaannya.

Definisi 2.1.1

Pendefinisian bilangan Catalan yang sering dikenal yaitu sebagai berikut:

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2\mathrm{n}}{\mathrm{n}}, \tag{2.1}$$

dengan $n \geq 0$ dan $n \in \mathbb{Z}$ (Koshy, 2009).

Bilangan Catalan secara rekursif dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}, \tag{2.2}$$

dengan $n \geq 0$ dan $C_0 = 1$ (Koshy, 2009).

Menurut Singmaster (2018), Bilangan Catalan dapat didefinisikan dalam persamaan berikut:

$$C_n = \frac{\binom{2n+1}{n}}{(2n+1)}. \tag{2.3}$$

Kemudian, secara kombinatorik dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}, \tag{2.4}$$

(Koshy, 2009).

Selain dari empat persamaan tersebut, Bilangan Catalan dapat juga dinyatakan sebagai berikut:

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \tag{2.5}$$

(Koshy, 2009).

Contoh 2.1.1

Berdasarkan Definisi 2.1.1, berikut ini diberikan 6 bilangan Catalan yang pertama yaitu 1, 1, 2, 5, 14, dan 42, yang didapat dengan cara sebagai berikut:

Untuk $n = 0$, maka $C_0 = \frac{1}{0+1}\binom{2(0)}{0}$ = 1.1 = 1;

Untuk $n = 1$, maka $C_1 = \frac{1}{1+1}\binom{2(1)}{1} = \frac{1}{2}$. 2 = 1;

Untuk $n = 2$, maka $C_2 = \frac{1}{2+1}\binom{2(2)}{2} = \frac{1}{3}$. 6 = 2;

Untuk $n = 3$, maka $C_3 = \frac{1}{3+1}\binom{2(3)}{3} = \frac{1}{4}$. 20 = 5;

Untuk $n = 4$, maka $C_4 = \frac{1}{4+1}\binom{2(4)}{4} = \frac{1}{5}$. 70 = 14;

Untuk $n = 5$, maka $C_5 = \frac{1}{5+1}\binom{2(5)}{5} = \frac{1}{6}$. 252 = 42.

Dengan langkah yang sama, maka untuk $6 \leq n \leq 10$ diperoleh:
$C_6 = 132$, $C_7 = 429$, $C_8 = 1430$, $C_9 = 4862$, dan $C_{10} = 16796$.
Sehingga diperoleh barisan bilangan Catalan 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, … .

2.2 Koefisien Binomial

Definisi 2.2.1

Misalkan *n* dan *r* adalah bilangan bulat non negatif, koefisien binomial $\binom{n}{r}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \tag{2.6}$$

dengan $n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$ dan $0 \leq r \leq n$. Jika $r > n$ maka $\binom{n}{r}$ didefinisikan sama dengan 0 (Koshy, 2009).

Koefisien binomial juga dinotasikan sebagai $C(n,r)$, C_r^n dan nCr. Koefisien binomial menyatakan jumlah kombinasi (tidak memperhatikan urutan) dari *n* objek yang diambil *r* objek pada suatu waktu (Koshy, 2009).

Menurut Johnsonbaugh (1997), koefisien binomial adalah bilangan-bilangan yang muncul dari hasil penjabaran penjumlahan dua variabel yang dipangkatkan, misalnya $(a+b)^n$.

Teorema 2.2.2 (Johnsonbaugh, 1997)

Jika a dan b adalah bilangan real dan adalah n bilangan bulat positif, maka

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k. \tag{2.7}$$

Bukti:

Penjabaran dari $(a+b)^n$ merupakan perkalian $(a+b)$ sebanyak n faktor, yaitu

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\dots(a+b).$$

Koefisien dari $a^{n-k}b^k$ dapat ditentukan dengan banyaknya cara pemilihan a dari $n-k$ faktor diantara faktor n yang ada atau pemilihan b dari k faktor diantara n faktor. Hal ini dapat dilakukan dengan $C(n,n-k)$ atau $C(n,k)$ cara. Penentuan koefisien ini berlaku untuk setiap $k = 0,1,\dots,n$. Sehingga

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= C(n,0)a^{n-0}b^0 + C(n,1)a^{n-1}b^1 + \cdots + C(n,n)a^{n-n}b^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} C(n,k)a^{n-k}b^k.\end{aligned}$$

Graham, dkk. (1994) menyebutkan dalam bukunya yang berjudul *Concrete Mathematics,* ada beberapa identitas koefisien binomial, yaitu sebagai berikut:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},\ n \geq 0,\ n,k \text{ bilangan bulat.} \tag{2.8}$$

$$\binom{r}{k} = \frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, k \neq 0. \tag{2.9}$$

$$\binom{r}{k} = \binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1}, k \text{ bilangan bulat.} \tag{2.10}$$

$$\binom{r}{k} = (-1)^k \binom{k-r-1}{k}, k \text{ bilangan bulat} \tag{2.11}$$

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k} = \binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}, m, k \text{ bilangan bulat.} \tag{2.12}$$

$$\sum_k \binom{r}{k} x^k y^{r-k} = (x+y)^r, \geq 0 \text{ bilangan bulat atau } |x/y| < 1. \tag{2.13}$$

$$r\sum_k \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}, n \text{ bilangan bulat} \tag{2.14}$$

Koefisien binomial memenuhi relasi rekurensi yang menarik, yaitu Identitas Pascal. Nama ini diambil untuk menghormati matematikawan asal Prancis yaitu Blaise Pascal (Koshy, 2009).

Teorema 2.2.3 Identitas Pascal

Misalkan *n* dan *r* adalah bilangan bulat positif dan $r \leq n$, maka:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \tag{2.15}$$

(Koshy, 2009).

Bukti:

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!} + \frac{(n-1)!}{r!(n-r-1)!}$$

$$= \frac{r(n-1)!}{r(r-1)!\,(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{r!\,(n-r)(n-r-1)!}$$

$$= \frac{r(n-1)!}{r!(n-r)!} + \frac{(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{r(n-1)!+(n-r)(n-1)!}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)![r+(n-r)]}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!n}{r!(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$= \binom{n}{r}$$

Contoh 2.2.3

$$\binom{13}{10} = \binom{12}{9} + \binom{12}{10}$$

$$\frac{13!}{10!\,(13-10)!} = \frac{12!}{9!\,(12-9)!} + \frac{12!}{10!\,(12-10)!}$$

$$\frac{13!}{10!\,3!} = \frac{12!}{9!\,3!} + \frac{12!}{10!\,2!}$$

$$\frac{13 \times 12 \times 11}{3 \times 2 \times 1} = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} + \frac{12 \times 11}{2 \times 1}$$

$$286 = 220 + 66$$

$$286 = 286$$

Variasi dari koefisien binomial $\binom{n}{r}$ ketika $0 \leq r \leq n$ dapat dibentuk dalam susunan segitiga, seperti terlihat pada Gambar 2.1 dan Gambar 2.2. Susunan segitiga tersebut dinamakan segitiga Pascal, setelah Pascal menulis buku yang berjudul *Treatise on the Arithmetic Triangle* pada tahun 1653 (diterbitkan secara anumerta pada tahun 1665). Dalam bukunya, Pascal menunjukkan hubungan antara koefisien binomial dan polinomial (Koshy, 2009).

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & \\
 & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & \\
 & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & \\
 & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & \\
 & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{0}
\end{array}
$$

Gambar 2.1 Susunan Segitiga Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Gambar 2.2 Susunan Segitiga Pascal Akhir setelah Dihitung

2.3 Koefisien Binomial Pusat

Koefisien binomial pusat atau dalam bahasa Inggris disebut Central Binomial Coefficient (CBC), yang disimbolkan dengan $\binom{2n}{n}$, terletak di tengah barisan yang bernilai genap pada segitiga Pascal, yang dapat dilihat pada gambar berikut:

$$
\begin{array}{c}
\boxed{1} \\
1 \qquad 1 \\
1 \qquad \boxed{2} \qquad 1 \\
1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1 \\
1 \qquad 4 \qquad \boxed{6} \qquad 4 \qquad 1 \\
1 \qquad 5 \qquad 10 \qquad 10 \qquad 5 \qquad 1 \\
1 \qquad 6 \qquad 15 \qquad \boxed{20} \qquad 15 \qquad 6 \qquad 1
\end{array}
$$

Gambar 2.3 Koefisien Binomial Pusat (CBC)

(Koshy, 2009).

Definisi 2.3.1

CBC dapat didefinisikan menggunakan identitas Pascal sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\binom{2n}{n} &= \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n} \\
&= \binom{2n-1}{n} + \binom{2n-1}{n} \\
&= 2\binom{2n-1}{n} \qquad (2.16)
\end{aligned}
$$

(Koshy, 2009).

Contoh 2.3.2

Berdasarkan Definisi 2.3.1, berikut ini diberikan 5 nilai CBC yang pertama yaitu 1, 2, 6, 20, dan 70, yang didapat dengan cara sebagai berikut:

Untuk $n = 0$, maka $\binom{0}{0} = 1$

Untuk $n = 1$, maka $\binom{2}{1} = 2\binom{2.1-1}{1}$

$$
\begin{aligned}
&= 2\binom{1}{1} \\
&= 2.1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Untuk $n = 2$, maka $\binom{4}{2} = 2\binom{2.2-1}{2}$

$= 2\binom{3}{2}$

$= 2.3$

$= 6$

Untuk $n = 3$, maka $\binom{6}{3} = 2\binom{2.3-1}{3}$

$= 2\binom{5}{3}$

$= 2.10$

$= 20$

Untuk $n = 4$, maka $\binom{8}{4} = 2\binom{2.4-1}{4}$

$= 2\binom{7}{4}$

$= 2.35$

$= 70$

Perhatikanlah bahwa koefisien binomial pusat muncul pada baris genap.

2.4 Bilangan Segitiga

Bilangan segitiga adalah bilangan yang dihasilkan dari menghitung objek yang diatur dalam bentuk segitiga sama sisi. Bilangan segitiga dinotasikan oleh T_n, dengan n adalah banyaknya titik di sepanjang satu sisi (Chen dan Fang, 2007).

Definisi 2.4.1

Bilangan segitiga T_n didefinisikan dalam bentuk rumus berikut:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{2.17}$$

dengan $n \in \mathbb{N}$ (Chen dan Fang, 2007).

Contoh 2.4.1

Berdasarkan Definisi 2.3.1, berikut contoh dari bilangan segitiga untuk $1 \leq n \leq 6$ yaitu:

Untuk $n = 1$, maka $T_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$;

Untuk $n = 2$, maka $T_2 = \frac{2(2+1)}{2} = 3$;

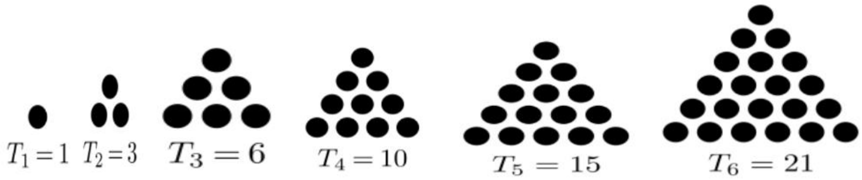
Untuk $n = 3$, maka $T_3 = \frac{3(3+1)}{2} = 6$;

Untuk $n = 4$, maka $T_4 = \frac{4(4+1)}{2} = 10$;

Untuk $n = 5$, maka $T_5 = \frac{5(5+1)}{2} = 15$;

Untuk $n = 6$, maka $T_6 = \frac{6(6+1)}{2} = 21$.

Berikut adalah gambar dari bilangan segitiga.



Gambar 2.4 Bilangan Segitiga untuk $1 \leq n \leq 6$

2.5 Koefisien Tribinomial

Definisi 2.5.1

Dengan menggunakan ide yang sama dari koefisien binomial, koefisien binomial untuk bilangan segitiga yang disebut dengan koefisien tribinomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{t_n^*}{t_r^* t_{n-r}^*}, \tag{2.18}$$

dengan $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, $0 \leq r \leq n$ dan $t_n^* = T_n T_{n-1} \cdots T_2 T_1$. Definisi t_n^* sesuai dengan $n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$ (Koshy, 2009).

Koefisien tribinomial dapat didefinisikan dalam persamaan lain, yaitu:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \frac{1}{n-r+1}\binom{n+1}{r+1}\binom{n}{r} \tag{2.19}$$

(Koshy, 2009).

Koefisien tribinomial memiliki persamaan secara rekursif sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ r-1 \end{bmatrix}\frac{T_n}{T_r}, \tag{2.20}$$

$$= \begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}\frac{T_n}{T_{n-r}}, \tag{2.21}$$

(Koshy, 2009).

Contoh 2.5.1

Berdasarkan Definisi 2.4.1, diberikan contoh koefisien tribinomial untuk $0 \leq n \leq 3$ sebagai berikut:

Untuk *n* = 0, maka $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1;$

Untuk *n* = 1, maka $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1;$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1;$$

Untuk *n* = 2, maka $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 1;$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2-1+1}\binom{3}{2}\binom{2}{1} = \frac{1}{2}(3)(2) = 3;$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 1;$$

Untuk *n* = 3, maka $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 1;$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3-1+1}\binom{4}{2}\binom{3}{1} = \frac{1}{3}(6)(3) = 6;$$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3-2+1}\binom{4}{3}\binom{3}{2} = \frac{1}{2}(4)(3) = 6;$$

$$\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} = 1.$$

Dari contoh di atas, dapat disimpulkan bahwa:

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix}, \tag{2.22}$$

Bukti:

$$\begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n-r\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{n-(n-r)+1}\binom{n+1}{n-r+1}\binom{n}{n-r}$$

$$= \frac{1}{r+1}\binom{n+1}{n-r+1}\binom{n}{r} \text{ (sifat Persamaan 2.8)}$$

$$= \frac{1}{n-r+1}\frac{n+1}{r+1}\binom{n}{r}\binom{n}{r}$$

$$= \frac{1}{n-r+1}\binom{n+1}{r+1}\binom{n}{r}$$

$$= \begin{bmatrix}n\\r\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}n\\1\end{bmatrix} = t_n, \tag{2.23}$$

$$\begin{bmatrix}n\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}n\\n\end{bmatrix} = 1. \tag{2.24}$$

(Koshy, 2009).

2.6 Koefisien Tribinomial Pusat (CTC)

Definisi 2.6.1

Koefisien tribinomial pusat (*Central Tribinomial Coefficients* (CTC)) didefinisikan oleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix}2n\\n\end{bmatrix} = \frac{1}{2n-n+1}\binom{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$= (2n+1).\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

$$= (2n+1)(C_n)^2, \qquad (2.25)$$

dengan C_n adalah bilangan Catalan ke-n (Koshy, 2009).

Contoh 2.6.1

Berdasarkan Definisi 2.5.1, berikut ini diberikan 5 nilai CTC yang pertama yaitu 1, 3, 20, 175, dan 1764, yang diperoleh dengan cara sebagai berikut:

Untuk $n = 0$, maka $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = (2.0+1)(C_0)^2$

$= (1)(1)^2$

$= 1,$

Untuk $n = 1$, maka $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = (2.1+1)(C_1)^2$

$= (3)(1)^2$

$= 3,$

Untuk $n = 2$, maka $\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = (2.2+1)(C_2)^2$

$= (5)(2)^2$

$= 20,$

Untuk $n = 3$, maka $\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix} = (2.3+1)(C_3)^2$

$= (7)(5)^2$

$= 175,$

Untuk $n = 4$, maka $\begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix} = (2.4+1)(C_4)^2$

$= (9)(14)^2$

$= 1764.$

2.7 Bilangan Mersenne

Definisi 2.7.1

Bilangan Mersenne adalah bilangan bulat positif yang berbentuk sebagai berikut:

$$M_p = 2^p - 1, \tag{2.26}$$

dengan $p \in \mathbb{N}$ (Deza, 2022).

Contoh 2.7.1

Berdasarkan Definisi 2.6.1, berikut adalah contoh bilangan Mersenne dengan $1 \leq p \leq 10$, yaitu:

Untuk p = 1, maka $M_1 = 2^1 - 1 = 1$;

Untuk p = 2, maka $M_2 = 2^2 - 1 = 3$;

Untuk p = 3, maka $M_3 = 2^3 - 1 = 7$;

Untuk p = 4, maka $M_4 = 2^4 - 1 = 15$;

Untuk p = 5, maka $M_5 = 2^5 - 1 = 31$;

Untuk p = 6, maka $M_6 = 2^6 - 1 = 63$;

Untuk p = 7, maka $M_7 = 2^7 - 1 = 127$;

Untuk p = 8, maka $M_8 = 2^8 - 1 = 255$;

Untuk p = 9, maka $M_9 = 2^9 - 1 = 511$;

Untuk p = 10, maka $M_{10} = 2^{10} - 1 = 1023$.

Sehingga dapat diketahui untuk 10 bilangan Mersenne pertama yaitu 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, dan 1023.

2.8 Bilangan Stirling

Bilangan Stirling memiliki dua jenis, yaitu bilangan Stirling jenis pertama dan bilangan Stirling jenis kedua. Bilangan Stirling jenis pertama adalah bilangan yang didapat dengan menghitung banyaknya susunan dari n objek ke dalam k permutasi siklik yang tak kosong dan diberi lambang $s(n, k)$. Sedangkan, bilangan Stirling jenis kedua adalah bilangan yang didapat dengan menghitung banyaknya cara untuk mempartisi suatu himpunan dari n objek ke dalam k

himpunan bagian tak kosong. Berikut adalah definisi bilangan Stirling jenis pertama dan kedua.

Definisi 2.8.1 Bilangan Stirling jenis pertama, dengan k dan n bilangan bulat, $1 \leq n \leq k - 1$ memenuhi relasi rekursi sebagai berikut:

$$s(n, k) = (n - 1)\, s(n - 1, k) + s(n - 1, k - 1), \qquad (2.27)$$

dengan syarat awal $s(n, 0) = 0$, untuk $n \geq 1$ dan $s(n, n) = 1$, untuk $n \geq 0$ (Riordan, 2012).

Definisi 2.8.2 Bilangan Stirling jenis kedua dengan lambang $S(n, k)$ dengan $n \geq 0$ dan $0 \leq k \leq n$, yang memenuhi relasi rekursi sebagai berikut:

$$S(n + 1, k) = S(n, k - 1) + \; kS(n, k), \qquad (2.28)$$

dengan $S(1,1) = 1, S(n, 0) = 0$ untuk $n \geq 1$ dan $S(n, k) = 0$ untuk $n < k$ (Riordan, 2012).

Pada bilangan Stirling jenis kedua, jumlah bilangan setiap barisnya membentuk bilangan Bell dengan definisi sebagai berikut:

Definisi 2.8.3 Bilangan Bell didefinisikan dalam persamaan

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} S(n, k) = B_n. \qquad (2.29)$$

(Mansour dan Schork, 2016).

Berikut adalah tabel bilangan Stirling jenis kedua dan bilangan Bell untuk $1 \leq k \leq n \leq 9$.

Tabel 2.1 Bilangan Stirling jenis kedua dan bilangan Bell

n \ k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Bilangan Bell
1	1									1
2	1	1								2
3	1	3^*	1							5
4	1	7	6^*	1						15
5	1	15	25	10	1					52
6	1	31	90	65	15	1				203
7	1	63	301	350	140	21	1			877
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1		4140
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	21147

Sebagai contoh, pada tabel di atas, nilai 3^* didapat berdasarkan perhitungan dari Persamaan 2.28, yaitu:

$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k)$$
$$S(3,2) = S(2,1) + 2S(2,2)$$
$$= 1 + 2 \cdot 1$$
$$= 3.$$

Untuk nilai 6* didapat berdasarkan perhitungan sebagai berikut:

$$S(4,3) = S(3,2) + 3S(3,3)$$
$$= 3 + 3 \cdot 1$$
$$= 6.$$

III. METODE PENELITIAN

3.1. Waktu Dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan di Program Studi Magister Matematika Fakultas Matematika dan IlmuPengetahuan Alam Universitas Lampung pada semester genap tahun ajaran 2022/2023.

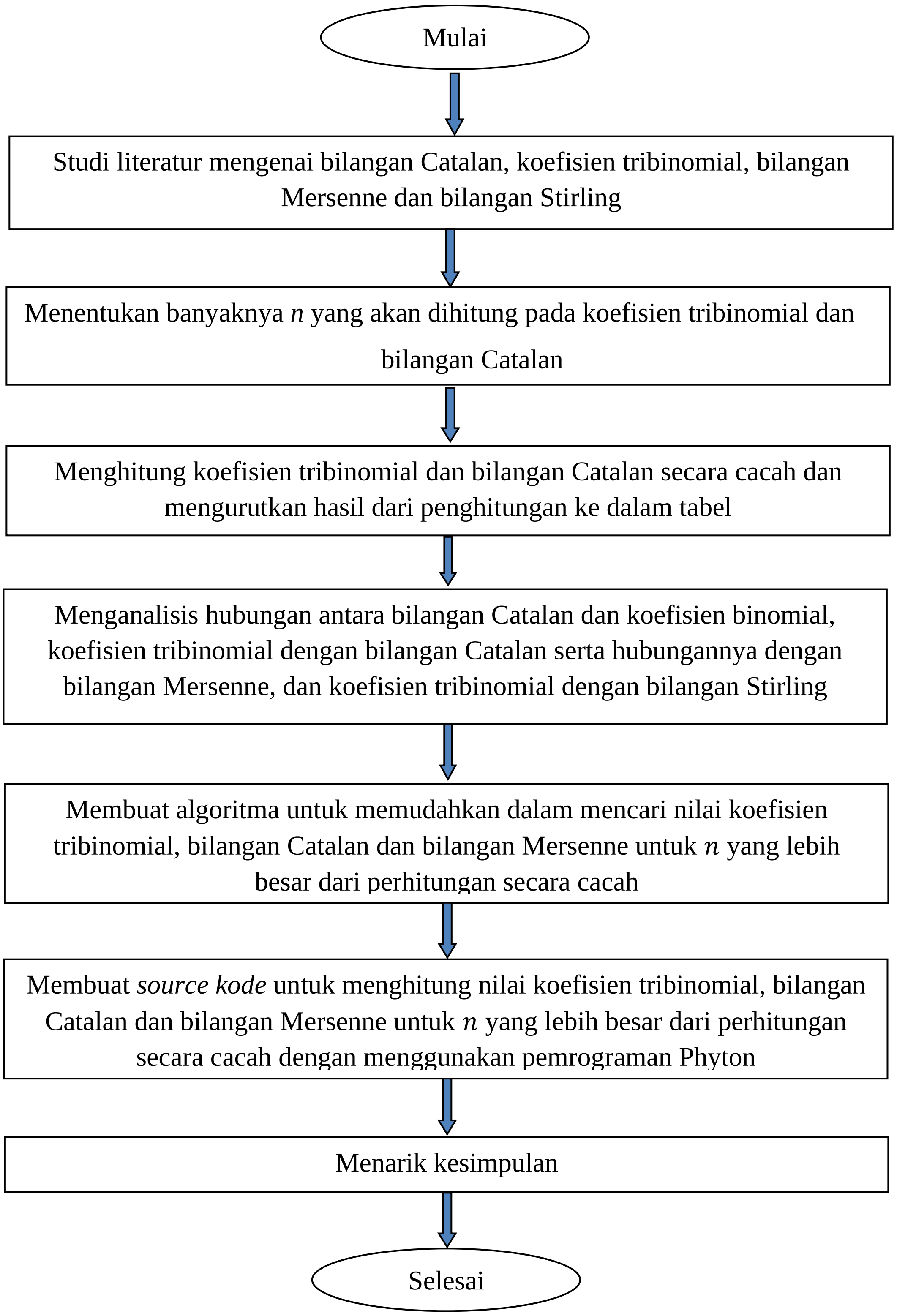
3.2. Metode Penelitian

Langkah-langkah yang digunakan dalam menyelesaikan penelitian ini yaitu :

1. Mengumpulkan bahan literatur dan studi kepustakaan yang berhubungan dengan bilangan Catalan, koefisien tribinomial, bilangan Mersenne dan bilangan Stirling,
2. mengkaji bilangan Catalan dan koefisien tribinomial untuk mendapatkan bentuk definisi dan sifat-sifatnya,
3. menentukan banyaknya n yang akan dihitung pada koefisien tribinomial dan bilangan Catalan,
4. menghitung koefisien tribinomial dan bilangan Catalan secara cacah berdasarkan definisi,
5. mengurutkan hasil dari penghitungan bilangan Catalan dan koefisien tribinomial ke dalam tabel berdasarkan n dan r yang bersesuaian,
6. menjumlahkan hasil dari setiap baris n pada tabel koefisien tribinomial, kemudian dilakukan pemeriksaan apakah jumlahnya sesuai dengan urutan bilangan Catalan,

7. melakukan analisis hubungan antara bilangan Catalan dengan koefisien binomial,
8. melakukan analisis hubungan antara koefisien tribinomial yang telah dihasilkan dengan bilangan Catalan serta mencari hubungannya dengan bilangan Mersenne
9. melakukan analisis hubungan antara koefisien tribinomial dengan bilangan Stirling,
10. membuat algoritma untuk melakukan penghitungan koefisien tribinomial dan bilangan Catalan serta bilangan Mersenne untuk n yang lebih besar dari penghitungan secara cacah,
11. membuat *source code* untuk menghitung koefisien tribinomial, bilangan Catalan, dan bilangan Mersenne dengan menggunakan pemrograman Phyton,
12. menarik kesimpulan.

Berikut diagram alir dari penelitian ini.



Gambar 3.1 Diagram alir penelitian

V. KESIMPULAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan dari penelitian yang telah dilakukan terkait koefisien tribinomial dan bilangan Catalan, dapat disimpulkan beberapa hal, yaitu:

1. Koefisien tribinomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ memiliki hubungan dengan bilangan Catalan yaitu jumlah koefisien pada setiap baris dari koefisien tribinomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ dengan syarat $0 \leq r \leq n$ membentuk bilangan Catalan, sehingga dapat dituliskan formulanya yaitu $\sum_{r=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix} = C_{n+1}$ (Koshy, 2009);
2. Koefisien tribinomial memiliki hubungan dengan bilangan Mersenne, yaitu pada koefisien tribinomial terdapat barisan yang berada di tengah atau disebut koefisien tribinomial pusat (CTC). CTC $\begin{bmatrix} 2n \\ n \end{bmatrix}$ dapat mengandung bilangan Mersenne apabila pada CTC yang bernilai ganjil dengan n merupakan bilangan Mersenne (kecuali $n = 0$, CTC tidak mengandung bilangan Mersenne). Bilangan Mersenne dapat ditentukan dengan $M_p = 2^p - 1$ dengan p adalah elemen bilangan asli. Bilangan Mersenne juga dapat ditentukan dengan formula $M_p = 2M_{p-1} + 1$,
3. Koefisien tribinomial $\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}$ memiliki hubungan dengan bilangan Stirling $S(n, k)$ yaitu:
   a. $S(n+1, n) = \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = T_n$, untuk $n \in \mathbb{N}$,
   b. $S(n, 1) = S(n, n) = \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$, untuk $n \in \mathbb{N}$.

5.2 Saran

Penelitian dapat dilanjutkan untuk mencari hubungan dari koefisien tribinomial ataupun bilangan Catalan dengan beberapa teori bilangan yang lain, seperti bilangan Fibonacci dan bilangan Bell.

DAFTAR PUSTAKA

Annamalai, C. (2022). Computation and Combinatorial Techniques for Binomial Coefficients and Geometric Series, diakses pada 06 Februari 2023 dari http://www.cambridge.org/engage/coe/article-details/62b325051278ae2d99eb3853.

Chen, Y. G. and Fang, J. H. (2007). Triangular Numbers In Geometric Progression. *Electronic Journal of Combinatorial Number Theory 7*, pp.1-2.

Deza, E. (2022). *Mersenne Numbers And Fermat Numbers*. World Scientific Publishing.

Garrett, P. (2010). Lucas-Lehmer Criterion for Primality of Mersenne Numbers, diakses pada 06 Februari 2023 dari https://www-users.cse.umn.edu/~garrett/m/number_theory/lucas_lehmer.pdf

Graham, R. L., Knuth, D. E., and Patashnik, O. (1994). *Discrete Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Campany.

Hein, N. and Huang, J. (2022). Variations of the Catalan Numbers from Some Nonassociative Binary Operations. *Discrete Mathematics,* 345, pp.1-18.

Jhonsonbaugh, R. (1997). *Discreate Mathematics 4 th*. Prentice Hall.

Koshy, T. (2009). *Catalan numbers with applications*. Oxford University Press.

Luca, F. (2000). Fibonacci And Lucas Numbers with only One Distinct Digit. *Portugaliae Mathematica,* Vol 57 (2): pp.243-254.

Mansour, T. and Schork, M. (2016). *Commutation relations, normal ordering, and Stirling numbers*. Boca Raton: CRC Press.

Miana, P.J., Ohtsuka, H., and Romero, N. (2017). Sums of Powers of Catalan Triangle Numbers. *Discrete Mathematics,* 340, pp.2388-2397.

Pak, I. (2014). History of Catalan Number. *arXiv:1408.5711v2* [math.HO].

Pan, H. and Sun, Z.W. (2006). A Combinatorial Identity with Application to Catalan Numbers. *Discrete Mathematics,* 306, pp.1921-1940.

Riordan, J. (2012). *Introduction to combinatorial analysis*. Courier Corporation.

Roman, S. (2015). *An Introduction to Catalan Number.* Springer Cham Heidelberg, New York.

Singmaster, D. (2018). An Elementary Evaluation of the Catalan Numbers. *The American Mathematical Monthly* Vol 85.5: pp.366-368.

Wamiliana, Suharsono, S. and Kristanto, P.E. (2019). Counting the sum of cubes for Lucas and Gibonacci numbers. *Science and Technology Indonesia*, 4(2), pp.31-35.

Wamiliana, Yuliana, A. and Fitriani. (2023). The Relationship of Multiset, Stirling Number, Bell Number, and Catalan Number. *Science and Technology Indonesia*, 8(2), pp.330-337.

Zaky, A. (2013). Mencari Solusi Persamaan Rekursif Bilangan Catalan dengan Prinsip-Prinsip Kombinatorial, diakses pada 06 Februari 2023 dari https://adoc.pub/mencari-solusi-persamaan-rekursif-bilangan-catalan-dengan-pr.html.