GRAF IDENTITAS dari GRUP $A_4 \times S_3$

(Skripsi)

Oleh

M Lathoif Romadhon

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

IDENTITY GRAPH of GROUP $A_4 \times S_3$

By

M. LATHOIF ROMADHON

Groups and graphs are two concepts of algebraic mathematics and discrete mathematic; in the development of the field of algebra and discrete mathematics, especially groups and graphs, the concept of groups as graphs was introduced in a book entitled "*Groups As Graphs*" in 2009, which provides a basic understanding of groups as the graph through definitions and examples that describe each finite group in the form of a graph is called an identity graph, because what is the main key in forming the graph is determined by the identity element of the group. In this study, we will discuss the group structure, which can be expressed in the form of an identity graph of a group, especially the alternative group A_4 and the symmetric group S_3, which aims to determine the characteristics and relationships that exist between the identity graph in the alternative group A_4 and the symmetric group S_3 with the identity graph in the group $A_4 \times S_3$. The results obtained in this study are the complete graph from K_m with $m = 2$ and 3, which are obtained from the identity elements multiplied by the binary operations of the members of the group A_4 and group S_3.

Keywords : Group, Graph, Identity

ABSTRAK

GRAF IDENTITAS dari GRUP $A_4 \times S_3$

OLEH

M. LATHOIF ROMADHON

Grup dan graf adalah dua konsep matematika aljabar dan matematika diskrit, Dalam perkembangan bidang ilmu aljabar maupun matematika diskrit khususnya grup dan graf, telah diperkenalkan konsep grup sebagai graf dalam buku yang berjudul "*Groups As Graphs*" tahun 2009 yang memberikan pemahaman mendasar tentang grup sebagai graf melalui definisi dan contoh yang menggambarkan setiap grup berhingga dalam bentuk graf dan disebut dengan graf identitas. Yang menjadi kunci utama dalam membentuk graf tersebut adalah elemen identitas grup tersebut. Pada penelitian ini dibahas struktur grup yang dapat dinyatakan dalam bentuk graf identitas dari suatu grup, khususnya grup alternatif A_4 dan grup simetris S_3 yang bertujuan mengetahui karakteristik dan hubungan yang terdapat antara graf identitas pada grup alternatif A_4 dan grup simetris S_3 dengan graf identitas pada grup $A_4 \times S_3$. Hasil yang diperoleh pada penelitian ini adalah bentuk graf lengkap K_m dengan $m = 2$ dan 3 yang diperoleh dari elemen identitas hasil perkalian operasi biner anggota grup A_4 dengan grup S_3.

Kata kunci : Grup, Graf, Identitas.

GRAF IDENTITAS dari GRUP $A_4 \times S_3$

Oleh

M LATHOIF ROMADHON
1917031045

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengeahuan Alam
Universitas Lampung

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGEAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul : **GRAF IDENTITAS dari GRUP $A_4 \times S_3$**

Nama Mahasiswa : **M Lathoif Romadhon**

NPM : **1917031045**

Jurusan : **Matematika**

Fakultas : **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.
NIP. 198002062003121003

Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.
NIP. 198406272006042001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua : **Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc.** ....

Sekretaris : **Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc.** ....

Penguji
Bukan Pembimbing : **Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.** ....

2. **Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**
Universitas Lampung.

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : 17 Juli 2023

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **M Lathoif Romadhon**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031045**
Jurusan	: **Matematika**
Judul Skripsi	: **GRAF IDENTITAS dari GRUP $A_4 \times S_3$**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dansemua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 17 Juli 2023
Penulis

METERAI TEMPEL
79AAKX539647872

M Lathoif Romadhon
NPM. 1917031045

RIWAYAT HIDUP

Penulis memiliki nama lengkap M Lathoif Romadhon dilahirkan di Pasar Baru Kecamatan Kedondong Kabupaten Pesawaran pada 09 Desember 2001. Penulis merupakan anak keempat dari enam bersaudara dari pasangan Bapak M Sabit dan Ibu Eem. Alamat tempat tinggal penulis bertempat di Desa Gunung Sugih, Kecamatan Kedondong, Kabupaten Pesawaran, Lampung

Penulis menempuh pendidikan dasar di SDN Gunung Sugih dan lulus pada tahun 2012, kemudian melanjutkan pendidikan menengah pertama di MTsN 1 Pesawaran dan lulus pada tahun 2015. Penulis melanjutkan pendidikan menengah atas di MAN 1 Pesawaran dan lulus pada tahun 2018. Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai mahasiswa S1 Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur Seleksi Bersama Masuk Perguruan Tinggi Negeri (SBMPTN).

Selama kuliah, penulis aktif menjadi anggota organisasi kampus, antara lain menjadi Anggota Bidang Kaderisasi Rois FMIPA Universitas Lampung Periode 2020, Anggota Bidang Keilmuan HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung. Periode 2020, Wakil Ketua Umum HIMATIKA FMIPA Universitas Lampung Periode 2021, Kepala Dinas PSDM BEM FMIPA Universitas Lampung Periode 2022 dan Wakil Ketua UKM KSR PMI Unit Universitas Lampung Periode 2023. Pada Bulan Januari hingga Februari 2022 penulis melaksanakan Kerja Praktik di Dinas Bina Marga dan Bina Konstruksi Provinsi Lampung dan pada Bulan Juni hingga Agustus 2022 mengikuti Kuliah Kerja Nyata (KKN) di Pekon Sinar Banten, Kecamatan Talang Padang, Kabupaten Tanggamus.

PERSEMBAHAN

Dengan mengucap Alhamdulillah dan syukur kepada Allah SWT atas nikmat sertahidayah-Nya sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik dan tepat pada waktunya. Dengan rasa syukur dan Bahagia, saya persembahkan rasa terimakasih saya kepada:

Ayah dan Ibuku Tercinta

Terima kasih kepada orang tuaku atas segala pengorbanan, motivasi, doa dan ridhoserta dukungannya selama ini. Terimakasih telah memberikan pelajaran berharga kepada anakmu ini tentang makna perjalanan hidup yang sebenarnya sehingga kelak bisa menjadi orang yang bermanfaat bagi banyak orang.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang sudah sangat membantu, memberikan motivasi, memberikan arahan serta ilmu yang berharga.

Sahabat-sahabatku

Terima kasih kepada semua orang-orang baik yang telah memberikan pengalaman,semangat, motivasinya, serta doa-doanya dan senantiasa memberikan dukungan dalam hal apapun.

Almamater Tercinta

Universitas Lampung

KATA INSPIRASI

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupanya"

(QS. Al-Baqarah: 286)

"Sesungguhnya Allah tidak adakan mengubah keadaan suatu kaum hingga merekamengubah keadaan yang ada pada diri mereka sendiri"

(QS. Ar-Ra'd: 11)

"Sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan"

(QS. Al-Insyirah: 6)

"Balas dendam terbaik adalah menjadikan dirimu lebih baik"

(Ali bin Abi Thalib)

"Barangsiapa yang hendak menginginkan dunia, maka hendaklah ia menguasai ilmu. Barangsiapa menginginkan akhirat hendaklah ia menguasai ilmu, dan barangsiapa yang menginginkan keduanya (dunia dan akhirat) maka hendaklah ia menguasai ilmu"

(HR Ahmad)

SANWACANA

Puji syukur atas kehadirat Allah SWT karena berkat limpahan rahmat, karunia serta nikmat yang telah diberikan-Nya, sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul **GRAF IDENTITAS dari GRUP $\boldsymbol{A_4} \times \boldsymbol{S_3}$** dengan baik. Skripsi ini disusun sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar sarjana Matematika (S.Mat) pada jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

Dalam penyusunan Skripsi ini, tentu tak lepas dari dukungan, arahan serta berbagai masukan dari berbagai pihak yang telah membantu. Untuk itu penulis ucapkan rasa hormat dan terimakasih kepada:

1. Bapak Dr. Ahmad Faisol, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing utama atas kesediaan waktu, pemberian arahan, serta masukan dalam proses pembuatan dan penyelesaian Skripsi ini.
2. Ibu Dr. Fitriani, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing kedua yang telah memberikan arahan serta masukan dalam penulisan serta penyelesaian Skripsi ini.
3. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku dosen penguji atas kesediaan waktu, pemberian arahan, saran serta masukan yang membangun dalam proses penyelesaian skripsi ini.
4. Bapak Agus Sutrisno, S.Si., M.Si. selaku dosen pembimbing akademik atas kesediaan waktu, pemberian saran serta masukan selama perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si. selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si. selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

7. Seluruh civitas akademika, dosen, serta staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
8. Ibu, Abah, Teh Titin, Ak Mumuh, Ak Kholik, Kak Ijal, Sonip, Ibin dan seluruh keluarga yang selalu memberikan nasihat, membimbing, mendukung, dan memotivasi dalam penyelesaian Skripsi ini.
9. Lis Dwi Andini yang selalu membersamai dan memberikan dukungan, kebaikan, perhatian dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Terimakasih kepada Fikri, Ali, dan Ikhsan sebagai teman seperbimbingan serta Gusti yang selalu membantu dalam menyelesaikan skripsi ini.
11. Teman-teman dan sahabat yang selalu mendukung yaitu Ikhsan, Aris, Fiqih, Surya, Teman Teman kos Ridwan, Firman, Bang ulul, Para Pimpinan HIMATIKA 2021, Abang Yunda Keluarga Besar HIMATIKA, Teman Teman BEM FMIPA Unila 2022, Keluarga UKM KSR PMI Unit Unila serta Teman-Teman Jurusan Matematika Angkatan 2019 yang telah mendukung dan memotivasi dalam penyelesaian skripsi ini.
12. Keluarga Besar Yayasan Peradaban Qurani yang selalu mendukung dan memotivasi penulis dalam menyelesaikan Skripsi ini.
13. Semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian Skripsi ini, yang tidak bisa penulis tuliskan satu persatu.

Penulis menyadari bahwa Skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, serta memiliki kesalahan didalamnya. Oleh sebab itu, saran dan kritikan yang membangun senantiasa penulis harapkan demi menyempurnakan skripsi ini. Penulis juga berharap semoga dengan adanya skripsi ini dapat memberikan kebermanfaatan informasi bagi yang membacanya.

Bandar Lampung, 17 Juli 2023
Penulis,

M Lathoif Romadhon
NPM 1917031045

DAFTAR ISI

Halaman

ABSTRACT i

ABSTRAK ii

DAFTAR ISI xii

DAFTAR GAMBAR xiv

DAFTAR TABEL xv

I. PENDAHULUAN 1

1.1. Latar Belakang dan Masalah 1

1.2. Tujuan Penelitian 2

1.3. Manfaat Penelitian 2

II. TINJAUAN PUSTAKA 4

2.1 Himpunan 4

2.2 Fungsi 6

2.3 Hasil kali Cartesius 8

2.4 Operasi biner 9

2.5 Teori grup 10

2.6 Subgrup 11

2.7 Grup simetri S_n 11

2.8 Grup alternatif A_n 17

2.9 Graf 17

2.10Graf Identitas 20

III. METODOLOGI PENELITIAN 22

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian 22

3.2 Metode Penelitian 22

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN **24**

4.1 Grup $A_4 \times S_3$ 24

4.2 Menentukan Graf identitas dari Grup Alternatif A_4 , Graf identitas dari Grup Simetri S_3 , dan Graf identitas dari Grup $A_4 \times S_3$........................ 26

4.3 Subgrup dari grup Alternatif A_4 , grup Simetri S_3 , dan grup $A_4 \times S_3$ 43

4.4 Menentukan hubungan antara graf identitas dari grup Alternatif A_4, grup Simetri S_3 dengan grup $A_4 \times S_3$ 47

V. KESIMPULAN **48**

DAFTAR PUSTAKA **49**

LAMPIRAN **50**

DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 2.9.1 Graf Ketetanggaan 19

Gambar 2.9.2 Graf Terhubung G dan Graf tidak Terhubung H 19

Gambar 2.10.1 Graf Identitas $\mathbb{Z}_4$ 21

Gambar 4.2.1 Graf Identias dari grup Alternatif A_4 27

Gambar 4.2.2 Graf Identitas dari grup Simetri S_3 28

Gambar 4.2.3 Graf Identitas dari grup $A_4 \times S_3$ 42

DAFTAR TABEL

Halaman

Tabel 2.5.1 Cayley grup $G = \{-1,1\}$ 12

Tabel 2.7.1 Cayley Grup Simetri S_3 16

Tabel 2.10.1 Cayley Grup $\mathbb{Z}_4$ 20

Tabel 4.2.1 Cayley Grup Alternatif A_4 27

Tabel 4.2.2 Cayley Grup Simetri S_3 28

I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang dan Masalah

Grup dan graf adalah dua konsep matematika aljabar. Menurut Khana (1993), grup $(G,*)$ didefinisikan sebagai suatu himpunan tak kosong yang dilengkapi suatu operasi biner " $*$ " dan memenuhi aksioma tertutup, asosiatif, mempunyai elemen identitas dan setiap elemen mempunyai inversnya masing-masing. Selanjutnya, teori graf merupakan salah satu kajian matematika diskrit yang membahas tentang titik dan garis.

Graf sebagai himpunan titik dan garis (dinotasikan $G = \{V(G), E(G)\}$) merujuk pada buku yang ditulis oleh Robin J. Wilson dan John J. Watkins yang berjudul *"Graphs An Inttroductory Approach"* yang mendefinisikan graf secara umum sebagai himpunan titik (*vertex*) dan garis (*edge*), dimana himpunan titiknya tidak boleh kosong dan setiap garis menghubungkan sepasang titik. Diberikan graf G, himpunan titik dari graf tersebut dinotasikan sebagai $V(G)$ dan himpunan garis dari graf dinotasikan sebagai $E(G)$.

Dalam perkembangan bidang ilmu aljabar maupun matematika diskrit khususnya grup dan graf, Kandasamy dan Smarandache memperkenalkan konsep grup sebagai graf dalam tulisannya yang berjudul "*Groups As Graphs*" tahun 2009 yang memberikan pemahaman mendasar tentang grup sebagai graf melalui definisi dan contoh. Kandasamy dan Smarandache menggambarkan setiap grup berhingga dalam bentuk graf. Mereka menyebut graf tersebut dengan graf identitas, karena yang menjadi kunci utama dalam membentuk graf tersebut ditentukan oleh elemen identitas grup tersebut.

Terdapat beberapa artikel sebelumnya yang mengkaji tentang graf yang dibangun dari grup, antara lain Rohmad pada tahun 2016 membahas graf identitas dari grup dihedral, Chelvam pada tahun 2011 membahas graf commuting dari grup dihedral, Talebi pada tahun 2008 membahas graf non-commuting dari grup dihedral, Vianney pada tahun 2022 membahas graf identitas grup simetris, serta Godase pada tahun 2015 mempelajari graf dari beberapa grup berhingga, yaitu grup penjumlahan $\mathbb{Z}_n$ modulo n, grup siklis $\mathbb{C}_n$ berorde n dan grup dihedral D_n berorde $2n$ dan menyebut graf tersebut dengan graf unit.

Dengan menggunakan dua sumber utama yaitu grup dan graf, serta literatur yang lain, maka penulis tertarik melakukan penelitian ini untuk membahas struktur grup yang dapat dinyatakan dalam bentuk graf identitas dari suatu grup, khususnya grup alternatif A_4 dan grup simetris S_3 yang bertujuan mengetahui karakteristik dan hubungan yang terdapat antara graf identitas pada grup alternatif A_4 dan grup simetris S_3 dengan graf idetintas pada grup $A_4 \times S_3$.

1.2. Tujuan Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui karakteristik dan hubungan yang terdapat antara graf identitas pada grup alternatif A_4 dan grup simetri S_3 dengan graf identitas pada grup $A_4 \times S_3$.

1.3. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat dari penelitian ini adalah:

1. memahami definisi, karakteristik dan sifat graf identitas dari A_4 dan S_3 graf identitas pada grup $A_4 \times S_3$;

2. sebagai bahan materi lanjutan untuk mengkaji lebih dalam tentang graf identitas khususnya graf identitas dari grup $A_4 \times S_3$;
3. sebagai referensi untuk penelitian lanjutan tentang bagaimana penggunaan graf identitas secara meluas di bidang matematika, maupun bidang ilmu lain baik secara teori maupun terapan.

II. TINJAUAN PUSTAKA

Penerapan graf dalam teori grup melibatkan dua hal penting yaitu teori grup dan teori graf. Pada pembahasan bab ini akan dijelaskan dasar-dasar teori grup dan teori graf yang digunakan untuk menunjang proposal penelitian ini. Dasar-dasar teori grup yang akan dibahas meliputi: himpunan, fungsi, produk cartesius, operasi biner, teori grup, subgrup, grup simetri S_n dan grup alternatif A_n. Pada teori graf akan dibahas dasar dasar teori yang meliputi: graf dan identitas graf.

2.1 Himpunan

Konsep himpunan merupakan dasar dari semua cabang matematika, berikut dijelaskan beberapa definisi dan contoh himpunan.

Definisi 2.1.1 Himpunan adalah suatu kumpulan objek (kongkrit maupun abstrak) yang didefinisikan dengan jelas. Objek-objek dalam himpunan tersebut dinamakan anggota himpunan (Setiawan, 2011).

Secara matematika, himpunan dapat dinyatakan dengan tanda kurung kurawal "{}" dan digunakan notasi huruf besar.

Contoh 2.1.1

Berikut diberikan beberapa contoh dari Himpunan.

1. $A = \{ 0, 1, 2, 3 \}$.
2. B = { pena, pensil, buku, penghapus, penggaris }.
3. C = { Indonesia, Malaysia, Thailand, Vietnam, Myanmar, Singapura, Timor leste, Kamboja, Laos, Brunei dan Filipina }.
4. D = { merah, kuning, hijau, biru, ungu, hitam, putih}.

Untuk membentuk himpunan, salah satu metode yang dapat digunakan adalah metode *Roster* (tabelaris) yaitu dengan menyebut atau mendaftar semua anggota, seperti pada himpunan *A* dan *B* sedangkan metode lainnya adalah metode *Rule* yaitu dengan menyebut syarat keanggotaannya. Sebagai contoh, penggunaan metode Rule adalah

$$C = \{ x \mid x \text{ negara-negara ASEAN} \}.$$

Kalimat di belakang garis tegak (|) menyatakan syarat keanggotaan.

Apabila suatu objek merupakan anggota dari suatu himpunan maka objek itu dinamakan *elemen* dan notasi yang digunakan adalah $\in$. Sebaliknya apabila suatu objek bukan merupakan anggota dari suatu himpunan maka objek itu dinamakan bukan *elemen* dan notasi yang digunakan adalah $\notin$. Sebagai contoh jika himpunan $A = \{0, 1, 2, 3\}$ maka $2 \in A$ sedangkan $4 \notin A$. Banyaknya elemen dari himpunan *A* disebut dengan nama bilangan *cardinal* dan disimbolkan dengan $n(A)$ atau $|A|$. Berarti pada contoh diatas $n(A)$ atau $|A|$ adalah 4 (Setiawan, 2011).

Definisi 2.1.2 Himpunan adalah koleksi atau kumpulan objek objek yang terdefinisi dengan baik (*well defined*). Objek-objek dalam himpunan disebut elemen atau unsur **(**Nurdin & Nufus, 2018).

Suatu himpunan dinotasikan dengan huruf kapital. Dapat diasumsikan tentang himpunan secara sederhana.

1. Suatu himpunan S disusun oleh objek-objek. Jika α adalah anggota himpunan S, maka dapat dinotasikan dengan $\alpha \in S$.
2. Terdapat tepat satu himpunan yang tidak memiliki anggota, disebut dengan himpunan kosong, dinotasikan dengan $\emptyset$ atau { }.
3. Himpunan terdefinisi dengan baik (*well difined*), artinya untuk sebarang objek α yang diberikan, maka selalu dapat ditentukan apakah α termasuk dalam sebuah himpunan tertentu atau tidak.

   Contohnya setiap bilangan bulat positif dapat dinyatakan sebagai himpunan bilangan prima atau tidak. Jika himpunan bilangan prima dinyatakan dengan P, maka $2 \in P$ dan $4 \notin P$.

2.2 Fungsi

Selanjutnya akan dijelaskan terkait definisi dan contoh fungsi.

Definisi 2.2.1 Fungsi (pemetaan) dari himpunan X ke himpunan Y adalah relasi khusus yang memasangkan setiap elemen dalam himpunan X dengan tunggal elemen dalam himpunan Y, yang biasa ditulis dengan notasi $f : X \to Y$. Himpunan X disebut domain dari fungsi f sedangkan himpunan Y disebut kodomain dari fungsi f (Susilo, 2012).

Contoh 2.2.1

Diberikan $X = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Y = \{a, b, c, d, e\}$, maka relasi

$$R = \{(1, b), (2, c), (3, c), (4, d)\}$$

adalah suatu fungsi dari himpunan X ke himpunan Y sebab setiap elemen dalam X berelasi dengan tepat satu elemen dalam Y.

Terdapat beberapa jenis fungsi, salah satunya adalah fungsi komposisi. Berikut dijelaskan definisi dan contoh dari fungsi komposisi.

Definisi 2.2.2 Jika diberikan dua fungsi $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$, maka komposisi kedua fungsi tersebut didefinisikan sebagai fungsi $g \circ f : X \to Z$ dengan aturan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ untuk setiap $x \in X$ (Susilo, 2012).

Proses pengoperasian fungsi komposisi $g(f(x))$ atau biasa dinotasikan sebagai $(g \circ f)(x)$ ialah dengan mulai mengoperasikan nilai x pada fungsi $f(x)$, kemudian hasil dari $f(x)$ tadi dioperasikan kembali kedalam fungsi $g(x)$ untuk memperoleh hasil komposisi fungsinya.

Berikut akan diberikan teorema mengenai fungsi komposisi.

Teorema 2.2.1

(i) Komposisi dua fungsi yang injektif adalah fungsi yang injektif.

(ii) Komposisi dua fungsi yang surjektif adalah fungsi yang surjektif.

(iii) Komposisi dua fungsi yang bijektif adalah fungsi yang bijektif (Susilo, 2012).

Bukti:

(i) Misalkan $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua buah fungsi yang injektif. Akan dibuktikan bahwa $g \circ f : X \to Z$ adalah fungsi yang injektif.

Diberikan sebarang elemen $x_1, x_2 \in X$ sedemikian sehingga

$$g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2).$$

Oleh karena itu,

$$g(f(x_1)) = g(f(x_2)).$$

Karena g adalah fungsi yang injektif, maka $f(x_1) = f(x_2)$. Kemudian karena f adalah fungsi yang injektif, maka $x_1 = x_2$.

Terbukti bahwa $g \circ f$ adalah fungsi yang injektif.

(ii) Misalkan $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua buah fungsi yang surjektif. Akan dibuktikan bahwa $g \circ f : X \to Z$ adalah fungsi yang surjektif.

Diberikan sebarang elemen $z \in Z$.

Karena g adalah fungsi yang surjektif, maka ada elemen $y \in Y$ sedemikian sehingga $g(y) = z$.

Karena f adalah fungsi yang surjektif, maka ada elemen $x \in X$ sedemikian sehingga $f(x) = y$, sehingga

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z.$$

Jadi, ada elemen $x \in X$ sedemikian sehingga

$$(g \circ f)(x) = z.$$

Terbukti bahwa $g \circ f : X \to Z$ adalah fungsi yang surjektif.

(iii) Misalkan $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah dua buah fungsi yang bijektif. Karena f dan g adalah fungsi yang injektif, maka $g \circ f$ adalah fungsi yang injektif. Karena f dan g adalah fungsi yang surjektif, maka $g \circ f$ adalah fungsi yang surjektif. Jadi, $g \circ f$ adalah fungsi yang injektif dan surjektif, yaitu $g \circ f : X \to Z$ adalah fungsi yang bijektif.

Selain fungsi komposisi, terdapat pula fungsi invers yang definisinya dijelaskan pada Definisi 2.2.3.

Definisi 2.2.3 Fungsi $f : A \rightarrow B$ menyatakan pemetaan setiap $a \in A$ ke $f(a) = b$ dengan $b \in B$. Jika ada fungsi $g : B \rightarrow A$ sedemikian sehingga $g(b) = a$ maka fungsi g disebut invers dari f dan fungsi f adalah invers dari fungsi g (Sulistiyono dkk., 2007).

Contoh 2.2.3 Diberikan $A = \{1, 3, 5, 7\}$dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$dan $f : A \rightarrow B$ didefinisikan dengan $f(x) = x + 1$, untuk setiap $x \in A$. Diperoleh nilai $f(1) = 2$, $f(3) = 4$, $f(5) = 6$ dan $f(7) = 8$. Oleh karena itu inversnya yaitu $f^{-1}(2) = 1$, $f^{-1}(4) = 3$, $f^{-1}(6) = 5$ dan $f^{-1}(8) = 7$.

2.3 Hasil kali Cartesius

Untuk memahami lebih dalam mengenai himpunan dan fungsi serta penggunaannya, berikut diberikan definisi dan contoh dari hasil kali cartesius.

Definisi 2.3.1 Dari sebarang himpunan A dan B, dapat didefinisikan himpunan baru yaitu $A \times B$ yang disebut hasil kali Cartesius dari himpunan A dan B, yaitu himpunan yang anggota-anggotanya merupakan pasangan-pasangan terurut seperti dinotasikan sebagai berikut (Nurdin & Nufus, 2018).

$$A \times B = \{ (a, b) | \, a \in A \text{ dan } b \in B\}.$$

Contoh 2.3.1 Diberikan $A = \{-1,0,1\}$ dan $B = \{0,2\}$, diperoleh

$$A \times B = \{ (-1,0), (-1,2), (0,0), (0,2), (1,0), (1,2)\},$$

sedangkan

$$B \times A = \{(0, -1), (0,0), (0,1), (2, -1), (2,0), (2,1)\}.$$

Secara umum, pasangan terurut $A \times B$ dan $B \times A$ adalah tidak sama. Dapat dibuktikan bahwa $A \times B = B \times A$ jika dan hanya jika $A = B$, $A = \emptyset$, atau $B = \emptyset$ (Rosjanuardi, 2020).

2.4 Operasi biner

Sebelum membahas definisi grup, akan dijelaskan terlebih dahulu mengenai definisi operasi biner sebagai dasar pembentukan grup. Berikut diberikan definisi operasi biner.

Definisi 2.4.1 Diberikan himpunan tidak kosong A. Operasi biner "$*$" pada A adalah pemetaan dari setiap pasangan berurutan x, y dalam A dengan tepat satu anggota $x * y$ dalam A yaitu (Setiawan, 2011).

$$* : A \times A \rightarrow A$$

Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ mempunyai dua operasi biner yang dikenakan padanya yaitu penjumlahan $(+)$ dan perkalian $(.)$. Dalam hal ini untuk setiap pasangan x dan y dalam $\mathbb{Z}, x + y$ dan $x . y$ dipasangkan secara tunggal dengan suatu anggota dalam $\mathbb{Z}$.

Operasi biner memenuhi:

1. terdefinisikan dengan baik (*well-defined*) yaitu untuk setiap pasangan berurutan x, y dalam A dipasangkan dengan tepat satu nilai $x * y$.
2. A tertutup terhadap operasi "$*$" yaitu untuk setiap $x, y \in A$ maka $x * y \in A$. (Setiawan, 2011).

Untuk lebih memahami Definisi 2.4.1, berikut ini diberikan contoh operasi biner.

Contoh 2.4.1 Didefinisikan operasi "$*$" dengan aturan $x * y = x + 2y$ dengan x, y terhadap

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Akan ditunjukkan bahwa "$*$" merupakan operasi biner di $\mathbb{N}$

Jelas bahwa "$*$" terdefinisikan dengan baik karena rumus memberikan hasil tunggal. Untuk setiap $x, y \in \mathbb{N}$, diperoleh $x + 2y \in \mathbb{N}$, atau $2y + x > 0$ jika $x > 0$ dan $y > 0$. Akibatnya $\mathbb{N}$ tertutup terhadap operasi "$*$" (Setiawan, 2011).

2.5 Teori grup

Suatu cabang matematika yang mempelajari struktur aljabar dinamakan aljabar abstrak (*abstract algebra*). Sistem aljabar (*algebraic system*) terdiri dari suatu himpunan objek, satu atau lebih operasi pada himpunan bersama dengan hukum tertentu yang dipenuhi oleh operasi. Salah satu alasan yang paling penting untuk mempelajari sistim tersebut adalah untuk menyatukan sifat-sifat pada topik-topik yang berbeda dalam matematika, salah satunya adalah teori grup. Berikut akan dijelaskan Definisi dan contoh dari teori grup.

Definisi 2.5.1 Suatu grup $\langle G ,* \rangle$ terdiri dari himpunan anggota G bersama dengan operasi biner " $*$ " yang didefinisikan pada G disebut grup jika memenuhi hukum berikut ;

1. operasi " $*$ " bersifat tertutup, yaitu untuk setiap $a, b \in G,$ terdapat $a * b \in G$;
2. operasi " $*$ " bersifat assosiatif, yaitu untuk setiap $a, b \in G,$ terdapat $(a * b) * c = a * (b * c)$;
3. operasi " $*$ " memiliki elemen identitas, yaitu terdapat $e \in G$ sehingga $e * x = x * e = x$ untuk setiap $x \in G$;
4. operasi " $*$ " memiliki invers, yaitu untuk setiap $a \in G$, terdapat $a' \in G$ sehingga $a * a' = a' * a = e$.

Biasanya lambang $\langle G ,* \rangle$ hanya dituliskan G, demikian juga ab artinya $a * b$ dan a^{-1} adalah lambang untuk invers a (Setiawan, 2011).

Berikut diberikan contoh contoh grup.

Contoh 2.5.1

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup terhadap operasi $+$.
   Diberikan himpunan himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
   Oleh karena itu, bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan grup karena memenuhi aksioma grup terhadap operasi $+$.
2. Himpunan bilangan asli $\mathbb{N}$ bukan grup terhadap operasi +, karena tidak memenuhi aksioma grup terhadap operasi $+$.
3. Himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan grup terhadap operasi +.

Bukti :

Diberikan himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C} = a + bi$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan i adalah suatu bilangan imajiner dimana $i^1 = -1$, akan dibuktikan bahwa $\langle \mathbb{C}, + \rangle$ adalah grup terhadap operasi penjumlahan, maka;

(i) operasi penjumlahan $(+)$ bersifat tertutup terhadap himpunan bilangan $\mathbb{C}$.

Diberikan $a = 1$ dan $b = 0$ dengan $0,1 \in \mathbb{C}$

maka

$$a + bi = 1 + 0i \in \mathbb{C}$$
$$a + bi = 1 \in \mathbb{C}$$

(ii) operasi penjumlahan $(+)$ bersifat asosiatif, yaitu untuk setiap $a, b, c, i \in \mathbb{C}$ terdapat $(a + bi) + c = a + (bi + c)$.

Diberikan $a = 1, b = 0$ dan $c = 2$ dengan $0,1,2 \in \mathbb{C}$

maka

$$(a + bi) + c = a + (bi + c) \in \mathbb{C}$$
$$(1 + 0i) + 2 = 1 + (0i + 2) \in \mathbb{C}$$
$$(1) + 2 = 1 + (2) \in \mathbb{C}$$

(iii) operasi penjumlahan $(+)$ memiliki elemen identitas, yaitu untuk setiap $x \in \mathbb{C}$ terdapat $e \in \mathbb{C}$ sehingga $e + x = x + e = x \in \mathbb{C}$

Diberikan $x = 1$ dan $e = 0$ dengan $0,1 \in \mathbb{C}$

maka

$$e + x = x + e = x \in \mathbb{C}$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 \in \mathbb{C}$$

(iv) operasi penjumlahan $(+)$ memiliki invers di setiap elemennya, yaitu untuk setiap $a \in \mathbb{C}$ terdapat $a' \in \mathbb{C}$, sehingga $a + a' = a' + a = e \in \mathbb{C}$

Diberikan $a = 1$ dengan $1 \in \mathbb{C}$

maka

$$a + a' = a' + a = e \in \mathbb{C}$$
$$1 + -1 = -1 + 1 = 0 \in \mathbb{C}$$

Sehingga terbukti bahwa $\langle \mathbb{C}, + \rangle$ merupakan grup (Miller, 2013).

Definisi 2.5.2 Diberikan himpunan berhingga G dan $\langle G, *\rangle$ merupakan grup terhadap operasi $*$. Tabel Cayley dari $\langle G, *\rangle$ adalah tabel yang label baris-baris dan kolom-kolomnya bersesuaian dengan elemen-elemen di G dan entri dari baris dari elemen a dan kolom dari elemen b adalah hasil operasi $a * b$ (Miller, 2013).

Contoh 2.5.2 Diberikan himpunan $G = \{-1,1\}$ yang merupakan grup terhadap operasi perkalian biasa. Hasil dari operasi perkalian dengan menggunakan Tabel Cayley adalah sebagai berikut:

Tabel 2.5.1. Tabel Cayley $G = \{-1,1\}$

	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

Tabel 2.5.1 merupakan tabel hasil grup $G = \{-1,1\}$ terhadap operasi perkalian biasa.

Berikut dijelaskan definisi dan contoh grup komutatif.

Definisi 2.5.3 Grup G dikatakan komutatif jika untuk setiap a dan b di G berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000).

Contoh 2.5.3 Diketahui grup $(\mathbb{Z}, +)$ dengan $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat. Ambil $a, b \in \mathbb{Z}$, maka $a + b = b + a$ Karena $a + b \in \mathbb{Z}$ dan $b + a \in \mathbb{Z}$ merupakan grup komutatif, maka $(\mathbb{Z}, +)$ merupakan grup komutatif.

Selanjutnya akan ditampilkan struktur dari grup $G_1 \times G_2$ yang menjadi pokok bahasan pada penelitian ini beserta dengan operasinya.

Proposisi 2.5 Diberikan grup $(G_1, *_1)$ dan grup $(G_2, *_2)$. Himpunan $G_1 \times G_2 = \{(a,b) \mid a \in G_1$ dan $b \in G_2\}$ terhadap operasi biner

$$\circ : (G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \rightarrow (G_1 \times G_2)$$

$$(a,b) \circ (x,y) = (a *_1 x, b *_2 y),$$

dengan $a, x \in G_1$ dan $b, y \in G_2$, merupakan grup.

2.6 Subgrup

Sistem aljabar yang besar biasanya mengandung sistem bagian yang lebih kecil. Sistem yang lebih kecil mungkin lebih penting dan mungkin membangun sistem yang lebih besar. Sebagai contoh grup $\langle \mathbb{R}, + \rangle$ mengandung grup yang lebih kecil seperti $\langle \mathbb{Q}, + \rangle$ dan $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Contoh-contoh diatas menyarankan bahwa di samping tipe tertentu dari sistem juga dipelajari sistem bagian (*subsystem*) sehingga dalam penelaahan grup juga dibahas tentang sistem bagiannya yang dinamakan grup bagian atau subgrup.

Definisi 2.6.1 Diberikan grup $(G,*)$ dan himpunan bagian tak kosong $H \subseteq G$. Himpunan H disebut subgrup dari G jika H juga merupakan grup terhadap operasi biner $" * "$ yang sama pada grup G, dinotasikan dengan $H \leq G$.

Teorema 2.6.1

Diberikan grup G dan himpunan bagian tak kosong S dari G. Himpunan S merupakan subgrup dari G jika dan hanya jika untuk setiap $x, y \in S$ berlaku $xy^{-1} \in S$ (Suryanti, 2017).

Bukti

Diberikan S subgrup dari G, untuk setiap $x, y \in S$ akan dibuktikan $xy^{-1} \in S$. Diberikan sembarang $x, y \in S$, karena S subgrup maka jelas $\exists y^{-1} \in S$, sehingga $xy^{-1} \in S$.

Diberikan $xy^{-1} \in S$, untuk setiap $x, y \in S$ Akan dibuktikan bahwa S merupakan subgrup dari G

- Diberikan sembarang $x \in S$, maka $xx^{-1} = e \in S$, sehingga ada elemen identitas di S
- Diberikan sembarang $x, y \in S, \exists y^{-1} \in S$ sehingga $xy = x(y^{-1})^{-1}$, artinya berlaku sifat tertutup di S.
- Diberikan sembarang $x \in S$, maka $, \exists a^{-1} \in S$. Jadi setiapa elemen di S mempunyai invers.
- Sifat asosiatif jelas terpenuhi karena $S \subset G$.

Dari empat pembuktian tersebut dapat di simpulkan bahwa S merupakan subgrup dari G

Contoh 2.6.1

1. Himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{R}$.
2. $S = \{0,2,4\}$ merupakan subgrup dari $\mathbb{Z}_6$
3. $\mathbb{Z}_6$ bukan subgrup dari $\mathbb{Z}_{12}$.
4. Untuk sebarang grup G, himpunan $\{e\}$ dan G merupakan grup bagian dari G. (Setiawan, 2011).

2.7 Grup simetri S_n

Setelah memahami definisi dan contoh-contoh grup, dijelaskan definisi grup simetri.

Definisi 2.7.1 Misalkan A merupakan himpunan tak kosong. Permutasi dari A adalah fungsi bijektif dari A ke A. Untuk setiap permutasi $X : R \to R$ terdapat fungsi invers $X^{-1} : R \to R$ yang memenuhi $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1$ semua aksioma grup dipenuhi oleh $(S_n, \circ)$. Grup $(S_n, \circ)$ disebut sebagai grup simetri pada himpunan R (Herawati dkk, 2021)

Definisi 2.7.2 Diberikan R adalah sembarang himpunan tak kosong dan misal S_R adalah himpunan yang memuat semua fungsi-fungsi bijektif dari $R \to R$ (atau himpunan yang memuat semua permutasi dari R). Himpunan S_R dengan operasi komposisi " $\circ$ " atau $(S_R, \circ)$ merupakan suatu grup yang disebut grup simetri (Dummit dan Foote, 2004).

Operasi komposisi $\circ$ merupakan suatu operasi biner pada S_R karena jika $x: R \to R$ dan $y: R \to R$ adalah fungsi-fungsi bijektif, maka $x \circ y$ juga merupakan suatu fungsi bijektif dari $R \to R$. Selanjutanya operasi " $\circ$ " adalah komposisi fungsi yang bersifat asosiatif. Identitas dari S_R merupakan permutasi 1 yang didefinisikan dengan $1(a) = a$, untuk setiap $a \epsilon R$. Untuk setiap permutasi $x: R \to R$ terdapat fungsi invers $x^{-1}: R \to R$ yang memenuhi $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 1$. Semua aksioma grup dipenuhi oleh (S_R,∘). Grup (S_R,∘) disebut sebagai grup simetri pada himpunan R. Suatu *cycle* adalah deretan bilangan bulat yang mempresentasikan unsur-unsur dari S_n yang mempermutasikan *cycle* nya dari bilangan bulat. Panjang *cycle* adalah banyaknya bilangan bulat yang terdapat pada *cycle* tersebut. Suatu *cycle* dengan panjang t disebut *cycle* -t dan dua *cycle* dikatakan saling asing jika banyaknya bilangan bulat tidak sama. Jika $\alpha \in S_n$ adalah produk dari *cycle* yang saling asing dengan panjang *cycle* $n_1, n_2, \ldots, n_r$ dimana $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_r$, maka $n_1, n_2, \ldots$, n_r disebut sebagai tipe *cycle* dari α.

Definisi 2.7.3 Suatu *cycle* yang panjangnya 2 dinamakan transposisi. *Cycle* dapat ditulis sebagai hasil kali transposisi. Hasil kali tranposisi yang diekspresikan dengan sejumlah ganjil transposisi disebut permutasi ganjil. Sedangkan hasil kali tranposisi yang diekspresikan dengan sejumlah genap transposisi disebut permutasi genap (Suryanti, 2017).

Untuk lebih memahami beberapa definisi sebelumnya diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 2.7.1 Diberikan suatu himpunan tak kosong A. A dinyatakan dengan $A = \{1, 2, 3\}$. Permutasi dari himpunan A tersebut ialah suatu fungsi dari A ke A yang satu-satu dan pada. Untuk semua $x \in A$, permutasi yang mungkin terjadi adalah:

1. $f(1) = 1,\ f(2) = 2,\ f(3) = 3;$
2. $f(1) = 1,\ f(2) = 3,\ f(3) = 2;$
3. $f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 3;$
4. $f(1) = 2,\ f(2) = 3,\ f(3) = 1;$
5. $f(1) = 3,\ f(2) = 1,\ f(3) = 2;$
6. $f(1) = 3,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1.$

Misalkan permutasi yang pertama ditulis dengan α_1, maka untuk menyatakan hubungan antara A dan hasil permutasinya adalah dengan menyusunnya dalam bentuk matriks, yaitu:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ f(1) & f(2) & f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Dengan cara yang sama, permutasi ke dua sampai ke enam juga dapat dinyatakan dalam bentuk matriks berikut ini:

$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$,

$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Selain dengan notasi matriks, permutasi juga dapat dinyatakan dalam notasi putaran atau biasa disebut *cycle.* Matriks α_1 dapat dinyatakan dalam bentuk (1), sehingga $\alpha_1 = (1)$. Matriks $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ dan α_6 jika dinyatakan kedalam bentuk notasi *cycle*, maka akan diperoleh semua permutasi pada himpunan A, yaitu
$A = \{(1\ 2\ 3), (\ 1\ 3\ 2\ ), (1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3)\}$.

Berdasarkan *cycle*-*cycle* yang telah diperoleh tersebut, diketahui bahwa setiap *cycle* nya merupakan hasil kali transposisi.
Sebagai contoh dipilih *cycle* $(1\ 2\ 3)$ yang dapat ditulis sebagai hasil kali 2 transposisi, yaitu $(1\ 3)(1\ 2)$. Sehingga *cycle* $(1\ 2\ 3)$ merupakan salah satu permutasi genap pada himpunan A. Sedangkan *cycle* $(1\ 2)$ dapat ditulis sebagai hasil kali 1 transposisi, yaitu $(1\ 2)$ itu sendiri. Akibatnya *cycle* $(1\ 2)$ merupakan salah satu permutasi ganjil pada himpunan A.

Himpunan A tersebut merupakan grup simetri dengan order 3, sehingga
$S_3 = \{(1\ 2\ 3), (\ 1\ 3\ 2\ ), (\ 1\ ), (\ 1\ 2\ ), (\ 1\ 3\ ), (\ 2\ 3\ )\}$. Apabila dikenai operasi komposisi " $\circ$ " pada S_3, maka struktur $(S_3, \circ)$ membentuk grup simetri-3 yang dapat dilihat pada Tabel 2.7.1.

Tabel 2.7.1 Tabel Cayley Grup Simetri S_3

$\circ$	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3)
(1 3 2)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 3)	(1 2)	(2 3)
(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)	(2 3)	(1 3)	(1 2)
(2 3)	(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)
(1 3)	(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 3 2)	(1)	(1 2 3)
(1 2)	(2 3)	(1 3)	(1 2)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1)

Dari Tabel 2.7.1 dapat dilihat invers dari setiap elemen grup simetri S_3, yaitu invers dari $(1\ 2\ 3)$ adalah $(1\ 3\ 2)$, invers dari $(1\ 3\ 2)$ adalah $(1\ 2\ 3)$, invers dari (1) adalah (1), invers dari $(2\ 3)$ adalah $(2\ 3)$, invers dari $(1\ 3)$ adalah $(1\ 3)$, dan invers dari $(1\ 2)$ adalah $(1\ 2)$.

2.8 Grup alternatif A_n

Berkaitan dengan grup simetri, akan dijelaskan juga definisi dan contoh dari grup alternatif.

Definisi 2.8.1 Himpunan A_n merupakan himpunan bagian dari S_n, yaitu himpunan dari semua permutasi genap. Himpunan A_n ini merupakan subgrup dari S_n yang selanjutnya disebut Grup Alternatif. Grup Alternatif A_n adalah subgrup normal dari Grup Simetri S_n, dan banyaknya elemen dari A_n adalah $\frac{1}{2}n!$ (Godase, 2015).

Contoh 2.8.1 Diberikan Grup Alternatif A_n. Grup Alternatif A_4 termasuk grup permutasi genap, secara umum di lambangkan dengan A_n, untuk n > 1, A_n, mempunyai susunan sebanyak $\frac{1}{2}n!$. Dengan demikian, A_4 mempunyai elemen sebanyak $\frac{1}{2}4! = 12$ anggotanya dilambangkan dengan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{12}$. Sebagai contoh $\alpha_1 \circ \alpha_2$ yang operasinya didefinsikan sebagai pemetaan, khususnya yang terkait dengan komposisi fungsi.

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

α_2 didapat dari proses pemetaan komposisi $(12)(23)$, jika

g = (12) = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ dan f = (34) = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

maka

$$\alpha_2 = g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\alpha_1 \circ \alpha_2$ dapat ditentukan dengan mengacu kepada cara untuk mendapatkan α_2 maka;

$\alpha_1 \circ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \alpha_2$.

Adapun jumlah elemen dari grup alternatif A_4 adalah $\frac{4!}{2}$, atau sebanyak 12 elemen, yaitu:

$A_4 = \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3), (1\ 2\ 3), (2\ 4\ 3), (1\ 4\ 2),$
$(1\ 3\ 4), (1\ 3\ 2), (1\ 4\ 3), (2\ 3\ 4), (1\ 2\ 4)\}.$

2.9 Graf

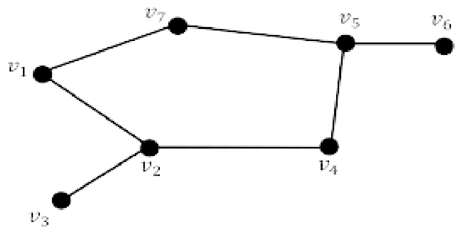
Berikut diberikan definisi dan contoh teori graf.

Definisi 2.9.1 Suatu graf G adalah struktur matematika yang berisikan dua himpunan berhingga V dan E. Elemen-elemen dari V disebut titik, dan unsur-unsur dari E disebut sisi (Gross dan Yellen, 2006).

Definisi 2.9.1. Graf G adalah pasangan himpunan (V, E) dengan V adalah himpunan tidak kosong dan berhingga dari objek-objek yang disebut sebagai titik dan E adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan dari titik-titik berbeda di G yang disebut sebagai sisi atau garis. Sisi $e = uv$ dikatakan menghubungkan titik u dan v. Jika $e = uv$ adalah sisi di graf G, maka u dan v disebut bertetangga (*adjacent*). Selanjutnya, sisi e dikatakan terkait (*incident*) dengan titik u dan v (Budayasa, 2007).

Anggota dari himpunan titik dapat ditulis dengan $V = \{v_{1,}\ v_2, v_{3,} \dots\ v_{n,}\}$, dan anggota himpunan sisi $E = \{e_{1,}\ e_2, e_{3,} \dots\ e_{n,}\}$. Selanjutnya, untuk graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E dapat dinotasikan dengan $G(V, E)$.

Contoh 2.9.1 Diberikan graf G dengan himpunan titik $V\ (G)$ dan himpunan sisi $E(G)$. Graf garis (*line graph*) $L(G)$ adalah graf dengan $V\ (L(G))\ =\ E(G)$ dan titik di $L(G)$ akan bertetangga jika dan hanya jika sisi-sisi yang bersesuaian saling terkait di G (Herawati dkk, 2021).

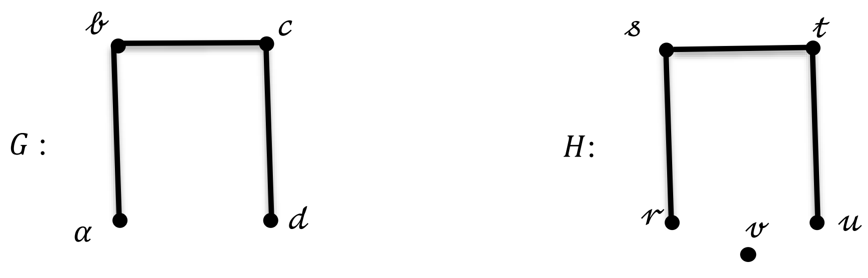


Gambar 2.9.1 Graf ketetanggaan

Pada Gambar 2.9.1. Titik v_1 bertetangga dengan Titik v_2 dan v_7, titik v_7 bertetangga dengan titik v_1 dan v_5.

Definisi 2.9.2 Graf G dikatakan terhubung (*connected*) jika untuk setiap dua titik G yang berbeda terdapat sebuah lintasan yang menghubungkan kedua titik tersebut, sedangkan graf yang tidak terhubung disebut *disconnected* (Budayasa, 2007).

Contoh 2.9.2



Gambar 2.9.2 Graf Terhubung G dan Graf tidak Terhubung H.

2.10 Graf Identitas

Setelah mengetahui definisi dan contoh dari graf, berikut diberikan definisi dan contoh dari graf identitas.

Definisi 2.10.1 jika terdapat dua elemen x, y dalam grup bertetangga atau dapat digabungkan dengan sisi jika $x.y = e$ (e merupakan elemen identitas dari G). Misalkan G adalah grup berhingga dan e adalah elemen identitas dari G. Graf identitas dari grup G, ditulis dengan $\Gamma(G)$, terdiri dari dua himpunan berhingga, yaitu himpunan tak kosong $V(\Gamma(G))$ dari titik dan himpunan $E(\Gamma(G))$ dari garis, yang memenuhi sifat berikut;

1. setiap elemen dari G adalah titik dari graf identitas;
2. untuk setiap a di $G, a \neq e$, titik a bertetangga dengan titik e;untuk setiap a dan b di $G, a \neq b. a, b \neq e$, titik a bertetangga dengan titik b jika dan hanya jika $a * b = b * a = e$ (Rohmad, 2016).

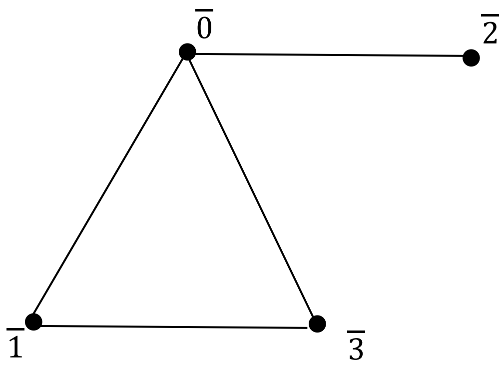
Graf identitas dari suatu grup dapat terbentuk karena setiap grup pasti memiliki elemen identitas.

Contoh 2.10.1 Diberikan $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ adalah grup terhadap operasi terhadap operasi penjumlahan modulo 4. Tabel Cayley untuk $\mathbb{Z}_4$ yaitu :

Tabel 2.10.1. Tabel Cayley grup $\mathbb{Z}_4$.

$+_4$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

Berdasarkan **Tabel 2.10.1** Tabel Cayley grup $\mathbb{Z}_4$. dapat dilihat bahwa $\overline{0} +_4 \overline{0} = \overline{0}, \overline{1} +_4 \overline{3} = \overline{0}$, $\overline{2} +_4 \overline{2} = \overline{0}$, $\overline{3} +_4 \overline{1} = \overline{0}$. Jadi graf identitas dari $\mathbb{Z}_4$ adalah sebagai berikut



Gambar 2.10.1 Graf Identitas $\mathbb{Z}_4$.

Pada **Gambar 2.10.1** titik $\overline{1}$ dan titik $\overline{3}$, titik $\overline{1}$ dan titik $\overline{0}$, titik $\overline{3}$ dan titik $\overline{0}$, serta titik $\overline{0}$ dan titik $\overline{2}$ saling bertetangga sehingga terhubung oleh garis.

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilakukan pada semester ganjil tahun akademik 2022/2023 dan bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang beralamatkan di Jalan Prof. Dr. Ir.Soemantri Brojonegoro, Gedong Meneng, Kecamatan Rajabasa, Kota Bandar Lampung, Lampung.

3.2 Metode Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian kajian teori mengenai analisis hubungan atau kaitan antara graf identitas spesial dari grup $A_4 \times S_3$ dengan graf identitas spesial dari A_4 dan S_3. Pada penelitian ini digunakan studi literatur yaitu sebagai berikut:

1. studi literatur yang diperoleh dari jurnal, buku dan artikel ilmiah yang berkaitan dengan penelitian ini.
2. mengkaji definisi dan teorema yang berhubungan dengan permasalahan pada penelitian

Adapun langkah-langkah yang dilakukan untuk mencapai tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Grup $A_4 \times S_3$
2. Menentukan Graf identitas dari Grup Alternatif A_4, Graf identitas dari Grup Simetri S_3, dan Graf identitas dari Grup $A_4 \times S_3$.
3. Subgrup dari grup Alternatif A_4, grup Simetri S_3, dan grup $A_4 \times S_3$

4. Menentukan hubungan antara graf identitas dari grup Alternatif A_4, grup Simetri S_3 dengan grup $A_4 \times S_3$

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analasis dan pembahasan maka diperoleh kesimpulan yaitu grup $A_4 \times S_3$ merupakan suatu grup yang anggotanya merupakan pasangan berurutan dari elemen elemen grup alternatif A_4 dan grup simetri S_3 dengan notasi $A_4 \times S_3 = \{(\alpha, \beta) | \alpha \in A_4$ dan $\beta \in S_3\}$. Jika H subgrup dari A_4 dan J subgrup dari S_3 maka $H \times J$ merupakan subgrup dari $A_4 \times S_3$. Graf identitas yang terbentuk dari grup alternatif A_4 , grup simetri S_3 dan grup $A_4 \times S_3$ keseluruhan nya berbentuk graf lengkap K_m dengan $m = 2$ dan 3.

Hubungan yang terdapat antara graf identitas grup alternatif A_4, dan grup simetri S_3 dengan grup $A_4 \times S_3$ yaitu apabila graf identitas yang terbentuk dari grup alternantif A_4 berbentuk graf lengkap K_2 sebanyak 3 dan graf lengkap K_3 sebanyak 4 dengan graf identitas yang terbentuk dari grup simetri S_3 berbentuk graf lengkap K_2sebanyak 3 dan graf lengkap K_3 sebanyak 1 maka akan terbentuk graf identitas dari grup $A_4 \times S_3$ yang berbentuk graf lengkap K_2 sebanyak 15 dan graf lengkap K_3 sebanyak 28.

DAFTAR PUSTAKA

A.A. Talebi. 2008. *On the Non-commuting Graphs of Group D2n. International Journal of Algebra, 2, 957-961,*

Arifin, A. 2000. *Aljabar*. Bandung: ITB Bandung.

Ayres, F dan Jaisingh, L.R. 2004. *Theory and Problems of Abstract Algebra 2nd*

Budayasa, I.K. 2007. *Teori Graph dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Chapman & Hall/CRC.

Chartrand, G. dan Lesniak, L. 1996. *Graphs and Digraphs Third Edition*. London: Cuart.

Dummit, D. S. dan Foote, R. M. 2004. *Abstract Algebra Third Edition*. USA: John Wiley & Sons, Inc.

Godase, A.D. 2015. Unit Graph of some finite group Z., C., and S., *International Journal of Universal Science and Technology*, 122 – 130.

Gross, J.L. dan Yellen, J. 2006. *Graph Theory and its Applications Second Edition.* New York: Chapman & Hall/CRC.

Herawati, M. V. A., Henryanti, P. S., & Aditya, R. 2021. Identity Graph of Finite Cyclic Groups. *International Journal of Applied Sciences and Smart Technologies, 03*(01), 101–110. Information LLC,

Kandasamy,W.B.V & Smarandache, F. 2009. Group as Graphs, Editura CuArt, 2009.

Maria Vianney Any Herawati. 2022. *graf identitas grup simetris*, Fakultas Mipa Universitas Sam Ratulangi. 116.

Miller, C.C. 2013. Essentials of Modern Algebra, Mercury Learning and Information LLC.

Nurdin, E., & Nufus, H. 2018. *Modul Teori Himpunan*. *1*. Sultan Syarif Kasyim Islamic University of riau

Robin J. Wilson, John J. Watkins. 1990. On Graphs An Inttroductory Approach

Rohmad, R. 2016. *Graf identitas dari grup dihedral*. *September*. *http://etheses.uin-malang.ac.id/id/eprint/5812%0Ahttp://etheses.uin-malang.ac.id/5812/1/12610083.pdf*

Rosjanuardi, Rizky. 2020. Fungsi, H. *Himpunan dan Fungsi part 2.pdf*. 1–28.

Setiawan, Adi. 2011. Ring, D. A. N. T. *Aljabar abstrak (teori grup dan teori ring)* Universitas Kristen Satya Wacana Salatiga *edition*. New York: McGraw-Hill Publishing Company.*fakultas mipa universitas sam ratulangi*.

Sulistiyono, Kurnianingsih S, dan Kuntarti. 2007. *Matematika SMA dan MA untuk Kelas XI Semester 2 Program IPA*. Jakarta : Esis

Suparyanto dan Rosad. 2015. Graf identitas grup berhingga. *Suparyanto Dan Rosad 2015*, *5*(3), 248–253.

Suryanti, S. 2017. *Teori Grup* (*Struktur Aljabar 1*).Gresik: UMG Press.

Susilo, F. 2012. *Landasan Matematika*. Yogyakarta: Graha Ilmu.

T.T. Chelvam, K. Selvakumar, S. Raja. 2011. *Commuting Graph on Dihedral Group. Journal of Mathematics and Computer Science, 2, 402-406*.

Vijay K. Khanna, S. K. Bhambri. 1993. *On A Course In Abstract Algebra*.

Waliyanti, I.K. 2016. Aljabar lintasan leavit sederhana. Delta-pi : jurnal matematika dan Pendidikan matematika

Yenti, S. R. I., & Andalas, U. 2008. Grup Alternating *Andalas*.