ESTIMASI MODEL *GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC* (GARCH) UNTUK ANALISIS PERAMALAN NILAI TUKAR RUPIAH

(Skripsi)

Oleh
AZIZAH RAHMAHTIA MATTULADA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

ABSTRACT

GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC (GARCH) MODEL ESTIMATION FOR RUPIAH EXCHANGE RATE FORECASTING ANALYSIS

By

AZIZAH RAHMAHTIA MATTULADA

The Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity Theory (GARCH) is a theory that perfected the theory of Autoregressively Conditional Heteroscedasticity (ARCH) because it has a more flexible degree of lag. Usually, the GARCH theory is used to measure the exchange rate and the stock price index. This study aims to study estimates of the value of the GARCH parameter, determine the model and predict results with the method. Based on the analysis that has been done, the obtained GARCH model (1,1) is an accurate model for predicting Rupiah exchange values in subsequent periods, proved with a reasonably low MAPE value of 0.21873 so that the forecast is performed quite well due to the approximation of actual data. Based on the results of the estimates, the largest Rupee Exchange Value was achieved on February 2, 2023, at IDR 11.403.70, and the lowest on February 3, 2023, was IDR 11.398.44.

Keywords: *ARCH/GARCH, MAPE, Forecasting, Rupee Exchange Value*

ABSTRAK

ESTIMASI MODEL *GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC* (GARCH) UNTUK ANALISIS PERAMALAN NILAI TUKAR RUPIAH

Oleh

AZIZAH RAHMAHTIA MATTULADA

Teori *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH) merupakan teori yang menyempurnakan teori *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) karena memiliki tingkatan *lag* yang lebih fleksibel. Biasanya teori GARCH digunakan untuk mengukur kurs dan indeks harga saham. Penelitian ini bertujuan untuk mengkaji estimasi nilai parameter GARCH, menentukan model dan hasil prediksi dengan metode GARCH. Berdasarkan hasil analisis yang telah dilakukan, diperoleh model GARCH (1,1) merupakan model yang tepat untuk meramalkan Nilai Tukar Rupiah pada periode selanjutnya dibuktikan dengan nilai MAPE yang cukup rendah yaitu sebesar 0,21873 sehingga hasil peramalan yang dilakukan cukup baik dikarenakan mendekati data aktual. Berdasarkan hasil peramalan, diperoleh Nilai Tukar Rupiah terbesar pada 02 februari 2023 sebesar Rp 11.403,70 dan terendah pada 03 februari 2023 sebesar Rp 11.398,44.

Kata Kunci: *ARCH/GARCH, Peramalan, MAPE, Nilai Tukar Rupiah*

ESTIMASI MODEL *GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC* (GARCH) UNTUK ANALISIS PERAMALAN NILAI TUKAR RUPIAH

Oleh

AZIZAH RAHMAHTIA MATTULADA

Skripsi

Sebagai Salah Satu Syarat untuk Mencapai Gelar
SARJANA MATEMATIKA

Pada

Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS LAMPUNG
BANDAR LAMPUNG
2023

Judul Skripsi	: **ESTIMASI MODEL *GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC* (GARCH) UNTUK ANALISIS PERAMALAN NILAI TUKAR RUPIAH**
Nama Mahasiswa	: ***Azizah Rahmahtia Mattulada***
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031015**
Jurusan	: **Matematika**
Fakultas	: **Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam**

MENYETUJUI

1. Komisi Pembimbing

Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si	**Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**
NIP. 197407262000032001	NIP. 196101281988112001

2. Ketua Jurusan Matematika

Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si.
NIP. 197403162005011001

MENGESAHKAN

1. Tim Penguji

Ketua	: **Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si.**	…………………
Sekretaris	: **Dra. Dorrah Aziz, M.Si.**	…………………
Penguji Bukan Pembimbing	: **Prof. Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D.**	…………………

2. Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam

Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si.
NIP. 197110012005011002

Tanggal Lulus Ujian Skripsi : **14 Agustus 2023**

PERNYATAAN SKRIPSI MAHASISWA

Saya bertanda tangan di bawah ini:

Nama	: **Azizah Rahmahtia Mattulada**
Nomor Pokok Mahasiswa	: **1917031015**
Jurusan	: **Matematika**
Judul	: **Estimasi Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (GARCH) untuk Analisis Peramalan Nilai Tukar Rupiah**

Dengan ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil pekerjaan saya sendiri dan semua tulisan yang tertuang dalam skripsi ini telah mengikuti kaidah karya penulisan ilmiah Universitas Lampung.

Bandar Lampung, 14 Agustus 2023

Penulis,

Azizah Rahmahtia Mattulada

RIWAYAT HIDUP

Penulis bernama Azizah Rahmahtia Mattulada, yang merupakan anak kedua dari tiga bersaudara yang dilahirkan di Bandar Lampung pada 26 Juli 2001 oleh pasangan Bapak Agusalim dan Ibu Rohmah Arifin, S.Ag.

Penulis menempuh pendidikan di TK Bratasena Adiwarna yang diselesaikan pada tahun 2007, kemudian melanjutkan sekolah di SDN 2 Campang Raya yang diselesaikan pada tahun 2013, kemudian melanjutkan sekolah di SMP Negeri 29 Bandarlampung yang diselesaikan pada tahun 2016, kemudian melanjutkan sekolah di SMA Negeri 12 Bandarlampung yang diselesaikan pada tahun 2019.

Pada tahun 2019 penulis terdaftar sebagai Mahasiswa Program Studi S1 Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung melalui jalur SNMPTN. Selama menjadi mahasiswa, penulis pernah aktif berorganisasi. Penulis pernah menjadi Anggota Biro Dana dan Usaha Himpunan Mahasiswa Matematika (HIMATIKA) pada tahun 2020, penulis juga pernah aktif menjadi Koordinator Desain dan Dokumentasi pada DINAMIKA XXII 2021, penulis juga pernah aktif menjadi Staff Bidang Humas Koperasi Mahasiswa Universitas Lampung dan menjadi staff terbaik pada tahun 2022, penulis juga pernah aktif menjadi Kepala Divisi Pemasaran Koperasi Mahasiswa Universitas Lampung pada tahun 2023.

Pada bulan April 2022, penulis melaksanakan Kerja Praktik (KP) di Badan Pengelola Pajak dan Retribusi Daerah (BPPRD) Kota Bandarlampung, kemudian pada pertengahan tahun 2022, penulis melaksanakan Kuliah Kerja Nyata (KKN) selama 40 hari di Desa Talang Sepuh, Kecamatan Talang Padang, Kabupaten Tanggamus.

KATA INSPIRASI

"Dan barang -siapa yang bertakwa kepada Allah, niscaya Allah menjadikan baginya kemudahan dalam urusannya."
(Q.S At-Talaq: 4)

"Allah tidak membebani seseorang melainkan sesuai dengan kesanggupannya."
(Al-Baqarah: 286)

"Karena sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan, sesungguhnya sesudah kesulitan itu ada kemudahan."
(Q.S Al-Insyirah: 5-6)

"Maybe I'm just a girl on a mission, But I'm ready to fly."
(Dr. HC Taylor Alison Swift)

PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Rabbil 'Alamin, dengan mengucap puji dan syukur kepada Allah SWT atas Segala limpah rahmat, hidayah dan karuniaNya, Saya persembahkan skripsi ini yang dibuat dengan kesabaran dan ketulusan hati kepada:

Kedua Orang Tua Tercinta

Terima kasih atas kasih sayang, dukungan, motivasi, nasihat dan doa yang tidak berhenti sampai saat ini, karena doa dan didikan kalianlah yang membawaku bertahan dan kuat sampai sejauh ini.

Dosen Pembimbing dan Pembahas

Terima Kasih kepada dosen pembimbing dan pembahas yang telah memberikan ilmu, bimbingan, serta dukungan yang sangat membangun sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.

Almamater Tercinta Universitas Lampung

SANWACANA

Puji syukur kehadirat Allah SWT, atas segala rahmat dan karunianya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "**Estimasi Model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* (GARCH) untuk Analisis Peramalan Nilai Tukar Rupiah**".

Dalam menyelesaikan skripsi ini, penulis mendapat dukungan, bimbingan, motivasi, saran dan bantuan dari beberapa pihak sehingga skripsi ini dapat terselesaikan dengan baik. Oleh karena itu, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Ibu Dr. Khoirin Nisa, S.Si., M.Si., selaku Pembimbing I yang selalu bersedia memberikan kesediaan waktunya untuk memberikan arahan, bimbingan, dan dukungan yang sangat membangun sehingga penulis selalu dipermudah dalam proses penyelesaian skripsi ini.
2. Ibu Dra. Dorrah Aziz., M.Si., selaku Pembimbing II yang telah memberikan waktunya untuk memberi bimbingan serta saran selama proses penyusunan skripsi ini.
3. Ibu Prof. Ir. Netti Herawati, M.Sc., Ph.D., selaku dosen Penguji yang telah bersedia memberikan kritik dan saran serta evaluasi kepada penulis sehingga dapat lebih baik lagi.
4. Ibu Dian Kurniasari, S.Si., M.Sc., selaku dosen Pembimbing Akademik yang telah membimbing penulis sampai akhir perkuliahan.
5. Bapak Dr. Aang Nuryaman, S.Si., M.Si., selaku Kepala Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

6. Bapak Dr. Eng. Heri Satria, S.Si., M.Si., selaku Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.
7. Seluruh Dosen, Staf Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung yang telah memberikan ilmu, wawasan dan pengetahuan yang berharga bagi penulis selama proses perkuliahan berlangsung.
8. Orangtua tercinta, Bunda dan Ayah yang telah memberikan kasih sayang, dukungan dan doa kepada penulis.
9. Saudaraku, Adek Azzahra Aurellia Mattulada dan Daeng Afrand Aulia Mattulada yang telah memberikan dukungan kepada penulis.
10. Teman seperjuangan di Jurusan Matematika yang banyak membantu dan saling mengasihi disaat suka maupun duka pada masa perkuliahan, Surya, Adel, Yusril, Intan, Odey, Valen, Yoga, Atif dan yang lainnya.
11. Teman seperbimbingan, Widya, Melisa, Yusril, Nurje yang saling menyemangati dan memberi dukungan dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Sahabat-sahabatku Ica, Afif yang telah menyemangati dan menemani penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
13. Adik-adikku di Kopma Unila, Rafi, Dalila, Fauzan dan Raddien yang memotivasi penulis agar menyelesaikan skripsi ini.
14. Kabinet Abhinaya Kopma Unila, terkhusus Bidang Usaha, yaitu Shafa, Risa, Topan, Lintang, Andri dan Fikri yang telah memberikan semangat, doa, pengalaman, dan bantuan selama penulis menyelesaikan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa terdapat banyak kekurangan dalam penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, kritik dan saran sangat diharapkan guna menyempurnakan skripsi ini.

Bandarlampung,14 Agustus 2023
Penulis

Azizah Rahmahtia Mattulada

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR TABEL

Tabel Halaman

DAFTAR GAMBAR

Gambar Halaman

I. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang dan Masalah

Data deret waktu ialah jenis data yang dikumpulkan menurut urutan waktu dalam rentang waktu tertentu. Peramalan ialah bagian penting dalam proses pengambilan keputusan. Peramalan umumnya dilakukan untuk mengetahui apa yang terjadi di waktu mendatang dengan didasari oleh waktu lalu dan kemudian dianalisis dengan menggunakan cara atau metode tertentu.

Menurut Heizer & Render (2015), peramalan berupa seni dan ilmu yang meramalkan kejadian di waktu mendatang. Hal itu dikerjakan dengan mengambil data masa lalu dan menggunakan model matematika untuk memprediksinya ke masa mendatang.

Pada bidang keuangan, volatilitas data deret waktu cenderung tinggi, volatilitas tinggi tersebut dapat dilihat dari fluktuasinya yang juga relatif tinggi lalu diikuti dengan fluktuasi yang rendah kemudian kembali tinggi, artinya rata-rata dan variansnya tidak konstan (Widarjono, 2009). Heteroskedastisitas bersyarat adalah istilah yang digunakan untuk menggambarkan data deret waktu dengan tingkat volatilitas yang tinggi. Memprediksi pergerakan nilai di bidang keuangan akan menjadi tantangan karena volatilitas yang signifikan. Kesalahan akan terlihat apabila akan melakukan prediksi data keuangan tidak melihat dari berapa banyak volatilitas berubah dari waktu ke waktu.

Teori *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) digunakan untuk mengukur volatilitas. Karena munculnya heteroskedastisitas, teori ini digunakan untuk mengukur perkiraan rata-rata dan varians inflasi di UK (Engle, 1982). Teori ini masih memiliki satu kekurangan, yaitu order yang terbatas sehingga semakin besar order, maka semakin tidak layak modelnya.

Menurut Bollerslev (1986), teori *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH) merupakan teori yang menyempurnakan teori tersebut karena memiliki tingkatan *lag* yang lebih fleksibel. Biasanya Bollerslev menggunakan teori GARCH untuk mengukur kurs dan indeks harga saham.

Desvina & Meijer (2018), telah melakukan penelitian mengenai metode GARCH untuk peramalan nilai tukar petani. Hasan (2019), telah melakukan peramalan harga emas menggunakan pengukuran volatilitas model GARCH.
Wijaya & Nugraha (2020), telah meramalkan kinerja perusahaan perbankan tahun 2017 yang terdaftar di Bursa Efek Indonesia dengan metode ARCH-GARCH. Husna & Prakoso (2022), juga telah meramalkan harga cabai di kota Semarang dengan pendekatan model ARCH-GARCH.

Dalam persoalan keuangan, nilai tukar (kurs) merupakan salah satu hal terpenting. Nilai tukar sangat mempengaruhi perdagangan antar negara, karena dengan adanya nilai tukar, setiap orang bisa melakukan transaksi di seluruh dunia. Akan tetapi, setiap orang yang akan melakukan transaksi harus mencari tahu terlebih dahulu tentang nilai tukar yang berlaku pada negara yang ingin dilakukan transaksi. Kita dapat melakukan sebuah peramalan untuk mengetahui nilai tukar di waktu mendatang. Terdapat bermacam-macam metode statistika yang dapat dimanfaatkan untuk meramalkan nilai tukar rupiah. Akan tetapi, metode yang dapat dilakukan untuk mengatasi heteroskedastisitas salah satu diantaranya ialah metode GARCH.

Berdasarkan permasalahan tersebut, dengan adanya kelebihan dari metode GARCH dibanding metode lain dalam meramalkalkan data keuangan di bidang kurs mata uang, maka peneliti tertarik untuk melakukan estimasi model GARCH untuk meramalkan nilai tukar rupiah.

1.2 Tujuan Penelitian

1. Mengkaji estimasi parameter *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic*.
2. Menentukan model dan hasil peramalan dengan metode *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* dalam memprediksi nilai tukar rupiah di masa mendatang.

1.3 Manfaat Penelitian

1. Dapat memahami model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedastic* dalam mengatasi data yang memiliki volatilitas yang tinggi.
2. Memberikan informasi tentang peramalan pada data nilai tukar rupiah bagi peneliti maupun pembaca.
3. Dapat dijadikan referensi oleh peneliti lain yang akan menangani subjek yang sama dari sudut pandang yang berbeda.

II. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Deret Waktu

Deret waktu yaitu kumpulan sampel yang diatur menurut variabel tertentu dan secara kronologis. Kumpulan sampel yang dipelajari secara berurutan dan dalam kaitannya dengan waktu dikenal sebagai deret waktu (Desvina & Pani, 2014). Metode deret waktu adalah teknik peramalan yang mengkaji hubungan antara variabel waktu dengan variabel yang akan dievaluasi. Peramalan harus mempertimbangkan jenis atau pola data deret waktu. Pola deret waktu dibagi menjadi empat kategori yaitu horizontal, tren, musiman, dan siklis (Hanke & Wichern, 2005). Data tersebut dapat dikumpulkan pada setiap hari, mingguan, bulanan, atau tahunan pada interval waktu tertentu.

2.2 Peramalan (*Forecasting*)

Salah satu teknik yang dapat digunakan untuk memperkirakan jumlah sesuatu di masa depan adalah peramalan. Menurut definisi, peramalan adalah teknik yang menggunakan data dari masa lalu atau sekarang untuk memprediksi secara teratur apa yang dapat terjadi pada waktu mendatang yang bertujuan meminimalkan kesalahan yang akan dibuat. Tentu saja, peramalan tidak menjamin hasil, melainkan berusaha untuk menentukan strategi untuk apa yang dapat terjadi pada waktu mendatang sehingga mungkin menjadi salah satu faktor yang membuat pilihan bijak (Jonnius & Ali, 2015). Peramalan adalah ilmu dan seni membuat prediksi tentang masa depan. Ini dapat dicapai dengan menganalisis data historis dan model matematika guna memprediksi hasil di masa depan (Heizer & Render, 2015).

Peramalan ialah salah satu hal penting dalam proses penentuan keputusan. Keputusan yang baik ialah keputusan yang memperhitungkan konsekuensi dari implementasi keputusan. Masalah peramalan juga merupakan masalah yang kita hadapi sepanjang waktu jika kita membuat prediksi yang tidak akurat (Ginting & Rosnani, 2007).

2.3 Stasioneritas

Menurut Effendi & Setiawan (2014), Stasioner mengacu pada situasi di mana rata-rata dan varian galat tidak berubah atau tetap konstan dari waktu ke waktu, begitu pula sebaliknya.

Menurut Wei (2006), Stasioner terbagi menjadi dua jenis, yaitu:

1. Stasioner dalam rata-rata
   Ketika nilai rata-ratanya konstan, maka proses tersebut dikatakan stasioner dalam rata-rata. Stasioner dalam rata-rata dapat dirumuskan sebagai berikut:
   $$E(Z_t) = \mu. \tag{2.1}$$
2. Stasioner dalam variansi
   Ketika nilai variansinya konstan, maka proses tersebut dapat dikatakan stasioner dalam variansi. Stasioner dalam variansi dapat dinyatakan sebagai berikut:
   $$var(Z_t) = E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2. \tag{2.2}$$

2.4 *Autocorrelation Function* (ACF)

Hubungan linier antara dua variabel disebut sebagai korelasi (Raykov & Marcoulides 2013). Keterkaitan antara nilai-nilai dari deret waktu yang sama di beberapa waktu berbeda dikenal sebagai autokorelasi (Makridakis, dkk, 1999).

Menurut Wei (2006), Ukuran korelasi antara Z_t dan Z_{t+k} disebut dengan fungsi autokorelasi. Rata-rata dari dua nilai tersebut dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E(Z_t) = E(Z_{t+k}) = \mu. \tag{2.3}$$

dan mempunyai variansi konstan yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$var(Z_t) = var(Z_{t+k}) = E(Z_t - \mu)^2 = \sigma^2. \tag{2.4}$$

Fungsi autokovarian antara Z_t dan Z_{t+k} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$cov(Z_t, Z_{t+k}) = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)] = \gamma_k. \tag{2.5}$$

Sehingga fungsi autokorelasi antara Z_t dan Z_{t+k} dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \mathrm{corr}(Z_t, Z_{t+k}) &= \frac{\mathrm{cov}\,(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{\mathrm{var}(Z_t)}\sqrt{\mathrm{var}(Z_{t+k})}} \\ &= \frac{\mathrm{cov}\,(Z_t, Z_{t+k})}{\sqrt{\mathrm{var}(Z_t)}\sqrt{\mathrm{var}(Z_t)}} \\ &= \frac{cov\,(Z_t, Z_{t+k})}{Var(Z_t)} \\ &= \frac{E[(Z_t-\mu)(Z_{t+k}-\mu)]}{E(Z_{t+k}-\mu)^2} \\ &= \frac{\Sigma_{t=1}^{n}(Z_t-\mu)\Sigma_{t=1}^{n}(Z_{t+k}-\mu)}{\Sigma_{t=1}^{n}(Z_t-\mu)^2} \\ &= \rho k. \end{aligned} \tag{2.6}$$

dengan:

Z_t = variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... }

$\hat{Z}_t$ = estimasi variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... }

Z_{t+k} = variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... } pada saat k

$\hat{Z}_{t+k}$ = estimasi variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... } pada saat k

ε_t = nilai galat pada saat t

ε_{t+k} = nilai galat pada saat $t + k$

k = selang waktu, k = {0,1,2, ... }

μ = nilai ekspektasi variabel acak (rata − rata variabel acak)

n = banyak pengamatan

P_k = nilai fungsi autokorelasi parsial pada saat k

γ_k = nilai fungsi koefisien kovaransi pada saat k

ρ_k = nilai fungsi koefisien korelasi pada saat k

2.5 *Partial Autocorrelation Function* (PACF)

Menurut Machmudin & Brodjol (2012), Jika pengaruh semua jeda waktu lainnya konstan, *Partial Autocorrelation Function* atau fungsi autokorelasi parsial diterapkan sebagai penunjuk kekuatan hubungan antara nilai-nilai variabel yang sama. Menurut Ariefianto (2012), PACF menggambarkan korelasi antara variabel pada saat t dan variabel pada waktu $t - k$ dengan menghilangkan semua efek antara variabel pada saat t dan variabel pada waktu $t - k$. Menurut Wei (2006) variansi antara Z_t dan $\hat{Z}_t$ dapat dituliskan seperti berikut:

$$\text{var}\left(Z_t - \hat{Z}_t\right) = E\left(Z_t - \hat{Z}_t\right)^2 = E(\varepsilon_t)^2. \qquad (2.7)$$

Sedangkan variansi antara Z_{t+k} dan $\hat{Z}_{t+k}$ dapat dituliskan seperti berikut:

$$\text{var}\left(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}\right) = E\left(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}\right)^2 = E(\varepsilon_{t+k})^2. \qquad (2.8)$$

dan fungsi autokovarian dapat dituliskan seperti berikut:

$$\begin{aligned}\text{cov}\left[\left(Z_t - \hat{Z}_t\right), \left(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}\right)\right] &= E\left[\left(\left(Z_t - \hat{Z}_t\right) - \mu\right)\left(\left(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k}\right)\right) - \mu\right] \\ &= E[(\varepsilon_t - \mu)E(\varepsilon_{t+k} - \mu)] \\ &= E(\varepsilon_t - \mu)E(\varepsilon_{t+k} - \mu). \qquad (2.9)\end{aligned}$$

Sehingga fungsi autokorelasi parsial dapat dituliskan seperti berikut:

$$\text{corr}\left[(Z_t - \hat{Z}_t),(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})\right] = \frac{cov(Z_t - \hat{Z}_t),(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})}{\sqrt{var(Z_t - \hat{Z}_t)}\sqrt{var(Z_{t+k} - \hat{Z}_{t+k})}}$$

$$= \frac{E(\varepsilon_t - \mu)E(\varepsilon_{t+k} - \mu)}{\sqrt{E(\varepsilon_t)^2\sqrt{E(\varepsilon_{t+k})^2}}}$$

$$= \frac{\Sigma_{t=1}^{n}(\varepsilon_t - \mu)\Sigma_{t=1}^{n}(\varepsilon_{t+k} - \mu)}{\sqrt{\Sigma_{t=1}^{n}(\varepsilon_t)^2}\sqrt{\Sigma_{t=1}^{n}(\varepsilon_{t+k})^2}}$$

$$= \rho_k \tag{2.10}$$

dengan:

Z_t = variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... }

$\hat{Z}_t$ = estimasi variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... }

Z_{t+k} = variabel acak untuk semua t = {0, ±1, ±2, ... } pada saat k

$\hat{Z}_{t+k}$ = estimasi variabel acak untuk semua $t = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ pada saat k

ε_t = nilai *error* pada saat t

ε_{t+k} = nilai *error* pada saat $t + k$

k = selang waktu, k = {0,1,2, ... }

μ = nilai ekspektasi variabel acak (rata − rata variabel acak)

n = banyak pengamatan

P_k = nilai fungsi autokorelasi parsial pada saat k

γ_k = nilai fungsi koefisien kovaransi pada saat k

ρ_k = nilai fungsi koefisien korelasi pada saat k

2.6 Pembedaan (*Differencing*)

Differencing diberlakukan untuk mengolah data yang tidak stasioner dalam rata-rata (Makridakis, dkk 1999). Data deret waktu dapat dianggap stasioner jika rata-rata dan variansnya stabil atau konstan dan tidak ada tren naik atau turun atau faktor musiman dalam data tersebut. Ketika data tidak stasioner, maka perlu dilakukan perubahan. Adapun cara untuk melakukan perubahan pada data adalah menggunakan metode *differencing* (Wei, 2006).

Data yang dihasilkan dari proses *differencing* disebut data pembedaan tingkat pertama. Apabila pembedaan tingkat pertama data belum stasioner, maka akan dilakukan pembedaan tingkat berikutnya. Dapat diterapkan transformasi data asli sebagai logaritma natural (*ln*) atau akar kuadrat untuk menangani data yang stasioner tetap dalam varians. Data tidak stasioner dalam hal varians juga karena pengaruh musiman (*seasonal*), sehingga setelah menghilangkan pengaruh musiman, data tersebut dapat menjadi data stasioner. Apabila data tidak stasioner pada rata-rata atau varians, maka *differencing* atau pemrosesan akar kuadrat dilakukan.

2.7 ARIMA ***Box-Jenkins***

Model *Box-Jenkins*, juga dikenal sebagai model ARIMA (*Autoregressive Integrated Moving Average).* Untuk menetapkan model yang sesuai, metode *Box-Jenkins* mencakup tiga langkah estimasi dan prediksi pada data deret waktu univariat. Langkah-langkahnya meliputi definisi model, estimasi parameter, dan prediksi (Enders, 1995). Data yang bergerak sepanjang rata-rata pada kedua model harus konstan (stasioner). Model ARIMA memiliki batas waktu. Keterlambatan suatu periode dalam *autoregressive* dapat dikatakan sebagai *autoregressive* orde pertama atau disingkat AR (1). Notasi untuk penundaan autoregresi adalah p. Keterlambatan waktu ketika periode proses *moving average* disebut *moving average* orde pertama atau MA(1) singkatnya. Notasi untuk mewakili jumlah kelambatan dalam *moving average* adalah q. Nilai p dan q bisa lebih besar dari 1. Proses *differencing* pada model ARIMA dimaksudkan untuk memperoleh data yang stasioner.

Biasanya *differencing* yang dilaksanakan tidak lebih dari dua kali. Notasi proses *differencing* data adalah d. Penulisan model ARIMA untuk AR (p), MA (q), dan *differencing* sebanyak d kali adalah ARIMA (p, d, q). Apabila dalam suatu proses ARIMA menerapkan *autoregressive* orde pertama serta *moving average* orde pertama, dan diferensiasi satu kali untuk mendapatkan data yang stasioner maka penulisan yang sesuai adalah ARIMA (1,1,1) (Santoso, 2011).

2.7.1 Model *Autoregressive* (AR)

Model *autoregressive* (AR) adalah suatu model persamaan regresi yang menghubungkan nilai sebelumnya dari suatu variabel dependen dengan variabel itu sendiri. Menurut Shumway & Stoffer (2011), model tersebut memiliki dugaan bahwa data periode saat ini dipengaruhi oleh data pada periode sebelumnya. Bentuk umum model AR orde-p atau AR (p) dinyatakan sebagai berikut:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ \dots \ + \phi_p Z_{t-p} + \alpha_t. \qquad (2.11)$$

dengan:

Z_t = variabel *dependent* pada waktu ke-t

$Z_{t-1}, Z_{t-2}, \dots Z_{t-p}$ = variabel *independent* yaitu *lag* dari Z_t

$\phi_1, \phi_2 \dots \phi_p$ = koefisien AR

α_t = nilai *error* pada waktu ke-t

p = orde AR

Persamaan (2.11) dapat dinyatakan dengan operator *B* atau operator *backshift* sehingga menjadi persamaan berikut:

$$Z_t = \phi_1 B Z_t + \phi_2 B^2 Z_t + \ \dots + \phi_p B^p Z_t + \alpha_t.$$

$$\alpha_t = \left(1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 - \ \dots \ - \phi_p B^p \right) Z_t.$$

atau

$$\alpha_t = \phi_p(B) Z_t. \qquad (2.12)$$

dan

$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 - \ \dots \ - \phi_p B^p$ disebut operator AR(*p*).

Fungsi autokorelasi dari AR (p) diperoleh dengan mengalikan persamaan (2.11) dengan Z_{t-k} yang dituliskan sebagai berikut:

$$Z_{t-k} = \phi_1 Z_{t-k} Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-k} Z_{t-2} + \ \dots + \phi_p Z_{t-k} Z_{t-p} + Z_{t-k}\alpha_t. \quad (2.13)$$

Jika pada kedua ruas persamaan (2.13) dimasukkan nilai harapan dan diduga terdapat stasioneritas, maka persamaan tersebut menjadi:

$$E(Z_{t-k}Z_t) = \phi_1 E(Z_{t-k}Z_{t-1}) + \phi_2 E(Z_{t-k}Z_{t-2}) + \ \dots + \phi_p E\left(Z_{t-k}Z_{t-p}\right) + (Z_{t-k}\alpha_t). \quad (2.14)$$

Karena nilai residual (α_t) bersifat random dan tidak berkorelasi dengan Z_{t-k} , maka $E(Z_{t-k}\alpha_t)$ adalah nol untuk $k > 0$ sehingga persamaan (2.14) menjadi

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \ \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \, ; k > 0 \, . \quad (2.15)$$

Apabila kedua ruas pada persamaan (2.15) dibagi dengan γ_0, maka diperoleh

$$\frac{\gamma_k}{\gamma_0} = \frac{\phi_1 \gamma_{k-1} + \ \dots + \phi_p \gamma_{k-p}}{\gamma_0}.$$

atau

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \ \dots + \phi_p \rho_{k-p} \qquad ; \ k > 0 \, , \quad (2.16)$$

2.7.2 Model *Moving Average* (MA)

Menurut Box, dkk (2016), proses *Moving Average* berorde q menunjukkan hubungan dependen antara nilai pengamatan dan nilai galat beuntun dari periode t sampai $t - q$. Secara umum model MA q atau MA(q) dinyatakan sebagai berikut:

$$Z_t = \alpha_t - \theta_1 \alpha_{t-1} - \ \dots - \theta_q \alpha_{t-q} \, , \quad (2.17)$$

dengan:

Z_t	= nilai variabel dependen pada waktu *t*
$\alpha_t , \alpha_{t-1} , \dots , \alpha_{t-q}$	= nilai residual pada waktu t , $t-1, \dots , t-q$
$\theta_1 , \dots , \theta_q$	= koefisien MA
q	= orde MA

Persamaan (2.12) dapat ditulis sebagai berikut:

$$Z_t = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ \dots - \theta_q B^p\right)\alpha_t \, ,$$

atau

$$Z_t = \theta_q(B)\alpha_t \,, \tag{2.18}$$

dengan $\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_1 B^2 - \ ... - \theta_q B^q$.

Jika kedua ruas pada persamaan (2.17) dikalikan dengan Z_{t-k} , maka hasilnya yaitu:

$$Z_{t-k}Z_t = (\alpha_t - \theta_1\alpha_{t-1} - \ ... - \theta_q\alpha_{t-q})(\alpha_{t-k} - \theta_1\alpha_{t-k-1} - \ ... - \theta_q\alpha_{t-k-q}. \tag{2.19}$$

Jika dimasukkan nilai harapan pada kedua ruas persamaan (2.19), persamaannya menjadi:

$$E(Z_{t-k}Z_t) = E\big[\big(\alpha_t - \theta_1\alpha_{t-1} - \ ... - \theta_q\alpha_{t-q}\big)\big(\alpha_{t-k} - \theta_1\alpha_{t-k-1} - \ ... - \theta_q\alpha_{t-k-q}\big)\big]$$

$$\begin{aligned}\gamma_k = E(&\alpha_t\alpha_{t-k} - \theta_1\alpha_t\alpha_{t-k-1} - \ ... - \theta_q\alpha_t\alpha_{t-k-q} - \theta_1\alpha_{t-1}\alpha_{t-k-1} + \\ &\theta_1^2\alpha_{t-1}\alpha_{t-k-1} + \cdots + \theta_1\theta_q\alpha_{t-1}\alpha_{t-k-q} - \ ... - \theta_q\theta_{t-q}\alpha_{t-q} + \\ &\theta_q\theta_1\alpha_{t-q}\alpha_{t-k-1} + \ ... + \theta_q^2\alpha_{t-q}\alpha_{t-k-q}\ ).\end{aligned} \tag{2.20}$$

Nilai harapan pada persamaan (2.20) tergantung pada nilai *k*. Jika $k = 0$, maka persamaan (2.20) menjadi:

$$\gamma_0 = E(\alpha_t\alpha_{t-0}) + E(\theta_1^2\alpha_{t-1}\alpha_{t-0-1}) + \ ... + \theta_q^2 E\big(\alpha_{t-q}\alpha_{t-0-q}\big), \tag{2.21}$$

Semua suku lain dalam persamaan (2.21) hilang karena:

$$E(\alpha_t\alpha_{t-i})\ ;\ i \neq 0\,,$$

dan

$$E(\alpha_t\alpha_{t-i}) = \sigma_\alpha^2\ ;\ i = 0\,,$$

sehingga persamaan (2.21) menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \sigma_\alpha^2\theta_1^2\sigma_\alpha^2 + \ ... + \theta_q^2\sigma_\alpha^2 \\ &= \big(1 + \theta_1^2 + \ ... + \theta_q^2\big)\sigma_\alpha^2\,,\end{aligned} \tag{2.22}$$

Persamaan (2.22) adalah varians dari proses model MA (*q*). Apabila $k = 1$, maka persamaan (2.20) menjadi:

$$\gamma_k = \big(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \ ... + \theta_{q-k}\theta_q\big)\sigma_\alpha^2\,, \tag{2.23}$$

sehingga fungsi *autokovarians* dari proses MA (*q*) yaitu:

$$\gamma_k = \begin{cases}(-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \cdots + \theta_{q-k}\theta_q)\sigma_\alpha^2 & ; k = 1,2, \dots , q \\ 0 & ; k > q\end{cases} \tag{2.24}$$

Fungsi autokorelasi MA (q) yang merupakan hasil pembagian antara persamaan (2.24) dan persamaan (2.20) yang dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k+\theta_1\theta_{k+1}+\cdots+\theta_{q-k}\theta_q}{1+\theta_1^2+\cdots+\theta_q^2} & ; k = 1,2,\dots,q \\ 0 & ; k > q \end{cases}$$

2.7.3 Model *Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Model ARMA (p, q) adalah gabungan dari model AR (p) dan MA (q) yang beranggapan bahwa data pada periode saat ini dipengaruhi oleh data pada periode sebelumnya dan nilai sisa pada periode sebelumnya. (Assauri, 1984). Model ARMA (p,q) dituliskan sebagai berikut:

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + \alpha_t - \theta_q \alpha_{t-q} \,. \qquad (2.26)$$

Persamaan (2.26) dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\begin{aligned}(1 - \phi_1 B - \phi_1 B^2 - \dots - \phi_p B^p) Z_t \\ = \left(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q\right)\alpha_t.\end{aligned} \qquad (2.27)$$

atau

$$\phi_p(B) Z_t = \theta_q(B)\alpha_t \,. \qquad (2.28)$$

Bila kedua ruas persamaan (2.26) dikalikan dengan Z_{t-k} , maka persamaannya menjadi:

$$Z_{t-k}Z_t = \phi_1 Z_{t-k}Z_{t-1} + \dots + \phi_p Z_{t-k}Z_{t-p} + Z_{t-k}\alpha_t - \theta_1 Z_{t-k}\alpha_{t-1} - \dots - \theta_q Z_{t-k}\alpha_{t-q}. \quad (2.29)$$

Bila kedua ruas persamaan (2.29) dimasukkan nilai harapan, maka persamaannya akan menjadi:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} + E(Z_{t-k}\alpha_t) - \theta_1 E(Z_{t-k}\alpha_{t-1}) - \dots - \theta_q E\left(Z_{t-k}\alpha_{t-q}\right). \quad (2.30)$$

Karena $E(Z_{t-k}\alpha_{t-i}) =$ untuk $k > i$ maka

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \dots + \phi_p\gamma_{k-p} \qquad ; \; k \geq (q+1). \qquad (2.31)$$

dan autokorelasinya dinyatakan sebagai berikut:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \dots + \phi_p\rho_{k-p} \qquad ; \; k \geq (q+1). \qquad (2.32)$$

2.7.4 Model *Autoregressive Integrated Moving Average* (ARIMA)

Model ARIMA adalah model ARMA (*p,q*) non stasioner. Dalam model ARMA (*p,q*) non stasioner, proses *differencing* perlu diberlakukan untuk menstasionerkan data deret waktu. Setelah model ARMA mengalami proses *differencing* sebanyak *d* kali hingga stasioner, maka model ARMA (*p,q*) menjadi model ARMA (*p,d,q*).

Bentuk umum model ARIMA dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\phi_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_0 + \theta_q(B)\alpha_t \,, \tag{2.33}$$

dimana $\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ \dots - \phi_p B^p$

dan $\theta_1(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2\, B^2 - \ \dots - \theta_q\, B^q$

dengan:

Z_t = data observasi ke-t

B = operator *backshift*

$(1-B)^d Z_t$ = deret waktu yang stasioner pada *differencing* ke-d

α_t = nilai *error* pada waktu-t

p = orde AR

q = orde MA

d = banyaknya *differencing*

Parameter θ_0 memiliki peran yang berbeda untuk $d = 0$ dan $d > 0$. Untuk $d = 0$, data asli telah stasioner dan $\theta_0$merupakan rata-rata proses, yaitu $\theta_0 = \left(1 - \phi_1 - \phi_2 - \ \dots - \phi_p\right)\mu$. Sedangkan untuk $d \geq 1$, data asli non stasioner.

2.8 Identifikasi Model

Tahap pertama yang dikerjakan untuk mengidentifikasi model yaitu mengamati deret waktu apakah stasioner, dan aspek AR dan MA dari model ARIMA hanya melibatkan deret waktu stasioner (Makridakis, 1999). Data deret waktu yang stasioner dapat dilihat dari ACF yaitu koefisien autokorelasi turun menjadi nol dengan cepat, selesainya *lag* ke-2 atau *lag* ke-3. Jika data tidak stasioner, langkah yang dapat diambil adalah dilakukannyat *differencing*, *differencing* dilakukan untuk dapat memilih nilai d dalam (p, d, q) ARIMA.

Contoh AR dan MA bisa dilihat melalui grafik ACF serta PACF. Jika ada *lag* autokorelasi sebanyak q yang tidak selaras asal nol maka secara signifikan prosesnya ialah MA (q). Jika ada *lag* autokorelasi parsial sebanyak p yang berbeda dari nol maka secara signifikan prosesnya adalah AR (p). Pada umumnya jika ada *lag* autokorelasi parsial sebanyak p dan q yang tidak sama berasal nol maka secara signifikan serta d pembedaan maka prosesnya merupakan ARIMA (p, d, q). Identifikasi model ARIMA menggunakan plot ACF serta PACF bisa ditinjau pada tabel pada bawah ini:

Tabel 1. Identifikasi Model ARIMA Menggunakan Plot ACF dan PACF

Model	Pola ACF	Pola PACF
AR (p)	Menurun menuju nol (secara eksponensial)	Terputus seketika menuju nol setelah *lag* p (*cuts off after lag* p)
MA (q)	Terputus seketika mencapai nol setelah *lag q* (*cuts off after lag q*)	Meluruh mencapai nol (secara eksponensial) atau mengikuti gelombang sinus (*Dies Down*)

Tabel 1. (Lanjutan)

ARMA (p,q)	Menurun setelah *lag* ke-(q - p) secara eksponensial	Menurun setelah *lag* ke-(q - p) secara eksponensial

Tabel 1 menjelaskan bagaimana langkah-langkah untuk mengidentifikasi orde pada model AR, MA, dan ARMA. Orde tertinggi q dapat diidentifikasi dengan mengamati jumlah *lag* pada plot ACF yang menunjukkan nilai yang berbeda dari nol. Penentuan ini bisa didasarkan pada pengujian korelasi pada setiap lag.

2.9 Estimasi Parameter

Estimasi parameter yang akan dilakukan pada penelitian ini adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). Menurut Marquardt (1963), untuk estimasi model GARCH, metode kemungkinan maksimum atau *maximum likelihood* digunakan. Metode ini memungkinkan tingkat pengembalian dan varians untuk diperkirakan bersama. Metode *maximum likelihood* akan memilih nilai β yang diketahui sedemikian hingga memaksimumkan nilai probabilitas (*likelihood*) dari gambaran sampel secara acak yang telah diperoleh secara aktual. Karena

$$f(y \mid \beta) = \beta^{y}(1-\beta)^{1-y}. \tag{4.1}$$

untuk $y = 0$ atau $y = 1$, kita dapat menghitung probabilitas sampel random dari fungsi kepadatan peluang untuk $y_1, y_2, \dots, y_n$ yaitu

$$f(y_1 = 1, \dots, y_n = 0) = f(1, \dots, 0) = \prod_{i=1}^{n} \beta^{y_i}(1-\beta)^{1-y_i}. \tag{4.2}$$

Jadi, fungsi *likelihood*-nya adalah

$$l(\beta|y) = f(y|\beta) = \beta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}(1-\beta)^{\sum_{i=1}^{n} 1-y_i}.$$

sedangkan fungsi *maximum likelihood*-nya adalah

$$L(\beta \mid y) = In\ l\ (y \mid \beta) = \sum_{i-1}^{n} y_i\ In\ \beta\ + \sum_{i-1}^{n}(1 - y_i)In\ (1 - \beta). \qquad (4.3)$$

dan, untuk memaksimumkan fungsi diperlukan

$$\frac{dL}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{n}(1 - y_i) \frac{1}{1-\beta}. \qquad (4.4)$$

$$\frac{d^2L}{d\beta^2} = -\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{n}(1 - y_i) \frac{1}{(1-\beta)^2}. \qquad (4.5)$$

menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikannya menghasilkan

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (4.6)$$

yang merupakan nilai rata-rata sampel. Sedangkan turunan kedua selalu bernilai negatif untuk $0 < \beta < 1$, sehingga merupakan nilai maksimum global untuk fungsi *log-likelihood*.

Misalkan y adalah sampel random berukuran n dari populasi berdistribusi normal, $N\ (\beta, \sigma^2)$. Maka parameter-parameter yang belum diketahui adalah β dan σ^2. Sedangkan fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} L(\beta, \sigma^2|y) &= \text{In}\left\{\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2}\right]\right\} \\ &= \text{In}\left\{(2\pi\sigma^2)^{-T/2} exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2}\right]\right\} \\ &= -\frac{n}{2} In(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(y_i-\beta)^2}{\sigma^2}. \qquad (4.7) \end{aligned}$$

Oleh karena itu turunan pertama dan keduanya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \beta} &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta\right). \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} &= \frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta)^2. \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} &= -\frac{n}{\sigma^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial (\sigma^2)^2} &= \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{2\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta)^2. \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2} &= -\frac{1}{\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta\right). \qquad (4.12) \end{aligned}$$

Menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikan untuk β dan σ^2 menghasilkan

$$\hat{\beta}_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y}$$

$$\hat{\sigma}^2{}_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{\beta}_{ml}\right)^2$$

Solusi-solusi tunggal yang memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dapat diuji dengan kondisi turunan kedua untuk memaksimumkan lokal. Yaitu, matriks turunan kedua harus ditentukan sebagai definit negatif jika devaluasi pada solusi-solusi $\hat{\beta}_{ml}$ dan $\hat{\sigma}^2{}_{ml}$. Hal ini dikarenakan

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta} & \frac{\partial^2 L}{\partial (\sigma^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2{}_{ml}} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4{}_{ml}} \end{bmatrix}$$

Yang merupakan matriks definit negatif.

2.10 Uji Asumsi

a. Uji Indenpendensi *Residual*

Pengujian ini dilakukan dengan tujuan untuk mengidentifikasi ketidakbergantungan residual antara setiap pasang *lag*. Ketidakberhubungan antara dua *lag* dinyatakan ketika antara keduanya tidak terdapat korelasi yang signifikan. Dalam analisis deret waktu, pengujian ini memanfaatkan statistik *Ljung-Box-Pierce*.

H_0 = adanya korelasi antar *lag*

H_1 = tidak ada korelasi antar *lag*

dengan Statistik uji:

$$Q = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}(n-k)^{-1}\hat{\sigma}_k^2.$$

b. Uji Kenormalan *Residual*

Untuk memastikan berdistribusi normal atau tidaknya residual, dapat diketahui menggunakan uji *Kolmogorov-Smirnov.*
Hipotesis untuk pengujian ini adalah:

$$D = Sup \ \ \varepsilon \mid S(\varepsilon) - F_0(\varepsilon)| \tag{2.35}$$

dengan:

$S(\varepsilon)$ = fungsi peluang kumulatif yang dihitung dari data sampel

$F_0(\varepsilon)$ = fungsi peluang kumulatif distribusi normal atau fungsi distribusi yang dihipotesiskan

$F(\varepsilon)$ = fungsi distribusi yang belum diketahui

Sup = nilai *supremum* semua Y dari || $S(\varepsilon) - F_0(\varepsilon)|$.

Hipotesis:

H_0= residual berdistribusi normal

H_1= residual tidak berdistribusi normal

Pada langkah ini, terdapat beberapa aturan yang harus diperhatikan. Jika kita telah menetapkan taraf signifikansi α sebesar 5%, maka jika nilai *p-value* lebih rendah dari α, sehingga H_0 akan ditolak, yang menunjukkan ketidakmemenuhan asumsi bahwa residual berdistribusi secara normal. Sebaliknya, jika nilai *p-value* lebih besar dari α, maka H_0 akan diterima, mengindikasikan bahwa asumsi distribusi normal pada residual telah terpenuhi.

2.11 Model ARCH dan GARCH

Menurut Engle (1982), model ARCH digunakan untuk menguji volatilitas seri keuangan. Model ARCH dasar terdiri dari dua persamaan, persamaan rata-rata bersyarat dan persamaan varians bersyarat. Kedua persamaan harus diestimasi secara bersamaan mengingat varians adalah persamaan rata-rata. Persamaan rata-rata memperkirakan rata-rata kondisional dari variabel yang diperiksa. Kedua persamaan tersebut membentuk suatu sistem yang diestimasi bersama-sama dengan metode *maximum likelihood*. Sehingga, model ARCH merupakan proses AR dan dapat ditulis sebagai berikut:

$\varepsilon_t = z_t\sigma_t$ dimana z_t adalah *white noise*

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2. \quad (2.36)$$

Dimana $\omega > 0$, $\alpha_i \geq 0$, dan $i > 0$.

Menurut Bollerslev (1986), model ARCH diperluas dengan model baru yang memungkinkan kesalahan varian bergantung pada kelambatannya sendiri, serta kelambatan dari kesalahan kuadrat. Dengan kata lain, ini memungkinkan perluasan varian bersyarat untuk mengikuti proses ARMA. Model GARCH dapat dinyatakan sebagai berikut:

$\varepsilon_t = z_t\sigma_t$ dimana z_t adalah *white noise*

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \quad (2.37)$$

Kita berasumsi bahwa untuk setiap $p \geq 0$ dan $q > 0$, parameter tidak diketahui dan sejak varians positif, maka hubungan berikut juga harus positif juga $\omega \geq 0$ dan $\alpha_i \geq 0$ untuk setiap $i = 1, \dots, q$ dan $\beta_j \geq 0$ untuk $j = 1, \dots, p$.

Jika parameter dibatasi sedemikian rupa sehingga $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j < 1$, mereka menyiratkan stasioner yang lemah. Jika $q = 0$, maka model GARCH menjadi model ARCH.

2.12 Uji *Lagrange Multiplier* (LM)

Pemeriksaan efek ARCH dilakukan dengan menggunakan uji ARCH-*Lagrange Multiplier* atau biasa disebut dengan LM-ARCH *Test*. Hal terpenting dalam pengujian ini adalah varians residual yang tidak hanya bergantung pada fungsi variabel independen, tetapi juga terkait dengan kuadrat residual dari periode sebelumnya. Misalkan $\varepsilon_t = Y_t - \mu_t$ adalah residual kuadrat persamaan rata-rata.

Barisan ε_t^2 digunakan untuk memeriksa efek ARCH. Uji ini sama dengan statistik F yang pada umumnya untuk menguji $\alpha_i = 0(1,2,\dots,p)$ dalam regresi linear.

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_1 + \alpha_1\varepsilon_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p\varepsilon_{t-p}^2 + w_t\ ;\ t = m+1,\dots,n \qquad (2.38)$$

dengan w_t adalah galat, *m* bilangan bulat, dan *n* adalah ukuran sampel.

Uji ini digunakan untuk mengecek ada tidaknya efek ARCH.

Hipotesis:

$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0$ (tidak terdapat efek ARCH)

H_1: paling tidak ada satu $\alpha_i \neq 0, i = 1,2,\dots,p$ (ada pengaruh efek ARCH)

Statistik Uji:

$$\mathrm{F} = \frac{\frac{(SSR_0 - SSR_1)}{p}}{\frac{(SSR_1)}{T-2p-1}}$$

$$SSR_0 = \sum_{t=p+1}^{T}(\varepsilon_t^2 - \omega)^2$$

$$\omega = \frac{\sum_{t=1}^{T}\varepsilon_t^2}{T}$$

$$SSR_1 = \sum_{t=p+1}^{T} w_t^2 \qquad (2.39)$$

dengan:

ω = rata-rata

w_t^2 = residual kuadrat terkecil

SSR = residual *Sum of Square* (jumlah kuadrat residual)

Kriteria uji:

Tolak H_0 jika *p-value* < α maka tolak H_0, yang artinya ada efek ARCH dan *residual* konstan.

2.13 Evaluasi Model

Penentuan model terbaik bisa dilakukan dengan membandingkan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC). Model yang paling baik yaitu model yang memiliki nilai AIC terkecil.

Perhitungan dari AIC adalah sebagai berikut:

$$AIC\ (k)\ =\ T\ In\ \left(\frac{SSR(k)}{T}\right) + 2n \tag{2.40}$$

dengan:

T = jumlah observasi yang digunakan

k = panjang *lag*

SSR = residual *Sum of Square* (jumlah kuadrat residual)

n = jumlah parameter yang diestimasi

III. METODOLOGI PENELITIAN

3.1 Waktu dan Tempat Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan pada semester ganjil tahun ajaran 2022/2023 yang bertempat di Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Lampung.

3.2 Data Penelitian

Data yang digunakan merupakan data deret waktu sekunder yang berasal dari https://id.investing.com/currencies/sgd-idr-historical-data untuk data harian kurs rupiah terhadap dolar Singapura periode Januari 2022 hingga Januari 2023.

3.3 Metode Penelitian

Tahapan-tahapan yang dijalankan dalam penelitian ini meliputi:

1. Melakukan estimasi parameter ω, α_1, dan β_1 pada model GARCH
2. Melakukan input data kurs dolar Singapura terhadap rupiah periode januari 2022-januari 2023 dan melakukan analisis deskriptif.
3. Memeriksa kestasioneran data menggunakan uji akar unit, uji kolegram ACF dan PACF.
4. Jika data tidak stasioner, maka dilakukan proses *differencing*.
5. Mengidentifikasi model ARIMA dengan melihat model ACF dan PACF.
6. Melakukan evaluasi model ARIMA dengan cara uji diagnostik model ARIMA yang meliputi uji signifikansi parameter, dan uji kenormalan sehingga diperoleh model ARIMA terbaik.
7. Melakukan identifikasi ada tidaknya heteroskedastisitas pada residual model ARIMA untuk mengetahui apakah ada efek ARCH menggunakan uji *Lagrange Multiplier*, jika terdapat heteroskedastisitas maka dilakukan pemodelan GARCH.
8. Melakukan identifikasi model GARCH kemudian dilakukan evaluasi untuk memilih model GARCH terbaik dengan kriteria AIC terkecil.
9. Melakukan peramalan dengan model GARCH untuk data harian kurs dolar Singapura terhadap rupiah pada periode selanjutnya.

V. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil penelitian yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Estimasi parameter $\widehat{\omega}, \widehat{\alpha_1}$, dan $\widehat{\beta_1}$

$$\widehat{\omega} = \frac{1}{(n-1)} \sum_{t=2}^{n} \varepsilon_t^2 - \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 - \beta_1 \sigma_{t-1}^2$$

$$\widehat{\alpha_1} = \sum_{t=5}^{n} \frac{\varepsilon_t^2 - (n-1)\omega - \beta_1 \sigma_{t-1}^2}{\varepsilon_{t-1}^2}$$

$$\widehat{\beta_1} = \sum_{t=5}^{n} \frac{\varepsilon_t^2 - (n-1)\omega - \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2}{\sigma_{t-1}^2}$$

2. Model ARIMA-GARCH pada nilai tukar rupiah terhadap dolar Singapura pada periode 03 Januari 2022 – 31 Januari 2023 menghasilkan model ARIMA (4,1,1) – GARCH (1,1) atau dapat dituliskan sebagai berikut:

   Model ARIMA (4,1,1)

$$\Delta Z_t = -0{,}1609 Z_{t-1} - 0{,}0395 Z_{t-2} - 0{,}0406 Z_{t-3} + 0{,}1511 Z_{t-4} - 0{,}9993 \varepsilon_{t-1}$$

   Model GARCH(1,1)

$$\sigma_t^2 = 15.203802 + 0{,}057929 \varepsilon_{t-1}^2 + 0{,}941070 \sigma_{t-1}^2$$

   Model ARIMA (4,1,1) – GARCH (1,1) dapat memprediksi secara baik nilai tukar rupiah terhadap dolar Singapura, hal ini dapat dilihat dari nilai akuras peramalan menggunakan MAPE. Diperoleh nilai MAPE sebesar 0,21873, artinya model yang didapat sudah cukup baik dalam memprediksi.

DAFTAR PUSTAKA

Ariefianto, M.D. 2012. *Ekonometrika: Esensi dan Aplikasi dengan menggunakan Eviews*. Erlangga, Jakarta.

As'ad, M., Wibowo S.S., &, Sophia, E. 2017. Peramalan Jumlah Mahasiswa Baru dengan Model Autoregressive Integrated Moving Average (ARIMA). *Jurnal Informatika Merdeka Pasuruan*. **2**(3): 20-33.

Assauri, S. 1984. *Teknik dan Metode Peramalan*. Fakultas Ekonomi UI, Jakarta.

Asfihani, M.A. & Irhamah. 2017. Peramalan Volume Pemakaian Air di PDAM Kota Surabaya dengan Menggunakan Metode Time Series. *Jurnal Sains dan Seni* ITS. **6**(1): 157-162.

Bollerslev, T. 1986. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*. **31**(3): 307-327.

Box, G.E., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., & Ljung, G.M. 2016. *Time Series Analysis: Forecasting and Control.* 5th Edition. John Wiley & Sons, New Jersey.

Desvina, A.P. & Inggrid, O.M. 2018. Penerapan Model ARCH/GARCH untuk Peramalan Nilai Tukar Petani. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika* **4**(1): 2460-4542.

Desvina, A.P. & Nuraziza, D. 2022. Peramalan Metode Box-Jenkins untuk Memprediksi Banyaknya Air Bersih yang Disalurkan PDAM di Pekanbaru. *Jurnal Sains Matematika dan Statistika*. **8**(2): 146-155.

Dritsaki, D. 2019. Modeling the Volatility of Echange Rate Currency Using GARCH Model. *International Economics*. **72**(2): 209-230.

Effendi, N. & Setiawan, M. 2014. *Ekonometrika Pendekatan Teori dan Terapan*. Salemba Empat, Jakarta.

Enders, W. 1995. *Applied Econometric Time Series*. John Wiley & Sons, New York.

Engle, R.F. 1982 Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. *Journal of the Econometric Society*. **50**(4): 987-1008.

Ginting & Rosnani. 2007. *Sistem Produksi*. Graha Ilmu, Yogyakarta.

Hanke, J.E. & Wichern, D.W. 2005. *Business Forecasting*. Prentice Hall, New York.

Heizer, J. & Render, B. 2015. *Manajemen Operasi*. Edisi ke-11. Salemba Empat, Jakarta.

Jonnius, & Ali, A. 2015. Analisis forecasting penjualan produk perusahaan. *Kutub Khanah Jurnal Penelitian Sosial Keagamaan*. **15**(2): 129–137.

Kalengkongan, C.S., Yohanes, A.R., & Nelson, N. 2020. Analisis Volatilitas Harga Bawang Putih Di Kota Manado Menggunakan Model GARCH. *Jurnal Matematika dan Aplikasi.* **9**(1): 43-49.

Machmudin, A. & Brodjol, S.S.U. 2012. Peramalan Temperatur Udara di Kota Surabaya dengan Menggunakan ARIMA dan Artificial Neural Network. *Jurnal Sains dan Seni ITS*. **1**(1): 118-123.

Makridakis, S., Wheelwright, S.C., & McGee, V.E. 1999. *Metode dan AplikasiPeramalan* Jilid 1 Edisi Ke-2. Diterjemahkan oleh Ir. Untung S. Andriyanto dan Ir. Abdul Basith. Erlangga, Jakarta.

Marquardt, D.W. 1963. An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*. **11**(2): 431-441.

Rafulta, E. & Tri, P.R. 2015. Pemodelan Data Time Series GARCH (1,1) Untuk Pasar Saham Indonesia. *Jurnal Poli Rekayasa*. **11**(1): 13-23.

Raykov, T. & Marcoulides, G.A. 2013. *Basic Statistics An Introduction with R*. Rowman & Littlefield Publisher. United Kingdom.

Santoso, T. 2011. Aplikasi Model GARCH pada Data Inflasi Bahan Makanan Indonesia. *Aset*. **13**(1): 65-76.

Shumway, R.H. & Stoffer, D.S. 2011. *Time Series and its Applications: with R Examples*. Springer Science, New York.

Wei, E.S. 2006. *Time Series Analysis*. 2^{nd} Edition. Pearson Education Hall, New York.

Widarjono, A. 2009. *Ekonometrika pengantar dan aplikasinya*. Ekonisia, Yogyakarta.