II. TINJAUAN PUSTAKA

Dalam tinjauan pustaka penelitian ‘Karakteristik Penduga Parameter Distribusi *Generalized* Eksponensial Menggunakan Metode *Generalized* Momen digunakan beberapa definisi dan teorema yang berkaitan dengan penelitian ini. Berikut merupakan penjabaran definisi dan teorema yang digunakan:

2.1 Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi kontinu dan suatu fungsi spesial dari distribusi gamma yang berperan penting di statistika.. Berikut akan dijelaskan definisi PDF distribusi Eksponensial.

Definisi 2.1 (*Probability Density Function* (PDF) Distribusi Eksponensial)

Untuk suatu peubah acak kontinu X berdistribusi eksponensial dengan variabel acak eksponensial jika dan hanya jika kepekatan peluang (*probability density*) diberikan seperti dibawah ini :

$$f(x\,;\,\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} & x > 0, \lambda > 0 \\ 0 \quad , & x \text{ yang lain} \end{cases} \tag{2.1}$$

(Miller,I dan Miller, 1999).

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan bentuk perumuman dari distribusi Eksponensial yang sering disebut distribusi *Generalized* Eksponensial**.**

2.2 Distribusi *Generalized* Eksponensial

Menurut Gupta dan Kundu, Distribusi *Generalized* Eksponensial adalah fungsi khusus dari distribusi Gompertz – Verhulst dan distribusi eksponensial weibull. Untuk membandingkan tabel kematian dan menghasilkan laju pertumbuhan penduduk, fungsi distribusi tertentu digunakan oleh Gompertz – Verhulst yang didefinisikan sebagai berikut :

$$G(t) = (1 - pe^{-t\lambda})^{\alpha}\ ;\ t > \frac{1}{\lambda}\ln p \qquad (2.2)$$

dimana p, α dan λ adalah bilangan real positif. Distribusi *Generalized* Eksponensial adalah fungsi khusus dari distribusi Gompertz – Verhulst dengan menstandarisasikan p =1. Dari distribusi Gompertz – Verhulst ini, distribusi *Generalized* Eksponensial (GE) dengan dua parameter pertama kali diperkenalkan oleh Gupta tahun 1999, dimana α sebagai parameter bentuk dan λ sebagai parameter skala dengan fungsi distribusi kumulatifnya adalah sebagai berikut :

$$F(x; \alpha, \lambda) = (1 - e^{-\lambda x})^{\alpha} \qquad (2.3)$$

dari turunan fungsi distribusi komulatif pada persamaan (2.3) sehingga diperoleh fungsi kepekatan peluangnya (fkp) dari distribusi *Generalized* Eksponensial didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 2.2 (FKP distribusi *Generalized* Eksponensial)

Misalkan X adalah peubah acak dari distribusi *Generalized* Eksponensial dengan dua parameter (α, λ) ,maka menurut Gupta dan Kundu (1999) fungsi kepekatan peluang (fkp) dari peubah acak tersebut adalah:

$$f(x;\alpha,\lambda) = \begin{cases} \alpha\lambda e^{-\lambda x}\left(1 - e^{-\lambda x}\right)^{\alpha-1} ; \alpha > 0, \lambda > 0, x > 0 \\ 0 \qquad ;\ \alpha\ , \lambda, \text{x lainnya} \end{cases} \tag{2.4}$$

Dengan

X = peubah acak

$\alpha =$ parameter bentuk

λ = parameter skala

e = 2,7183

Pada α =1 ,maka pada persamaan (2.4) merupakan fungsi kepekatan peluang distribusi Eksponesial yaitu :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \qquad ; , \lambda > 0, x > 0 \\ 0 \qquad ; \lambda, \text{x lainnya} \end{cases} \tag{2.5}$$

Distribusi eksponensial merupakan salah satu distribusi kontinu dan salah satu kasus khusus dari distribusi Gamma (Gupta dan Kundu,1999).

Kemudian akan dijelaskan nilai harapan dari distribusi *Generalized* Eksponensial (α, λ) pada sub-bab berikutnya.

2.2.1 Nilai Harapan Distribusi *Generalized* Eksponensial $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\lambda})$

Nilai harapan dari suatu distribusi akan dijelaskan pada definisi 2.3 yaitu:

Definisi 2.3 (Nilai Harapan)

Misalkan X variabel acak, jika X variabel acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f(x)$ dan

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

maka nilai harapan dari X adalah

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x) dx$$

(Hogg and Craig, 1995)

Adapun nilai harapan distribusi *Generalized* Eksponensial (a, λ) Menurut Gupta dan Kundu tahun 2003 adalah:

$$\mathrm{E(X)} = \frac{1}{\lambda} \left(\psi(\mathrm{a}+1) - (\psi(1)\right) \qquad (2.6)$$

Dimana ψ adalah fungsi digamma (Gupta dan Kundu, 2000). Selanjutnya akan dijelaskan ragam distribusi *Generalized* Eksponensial (a, λ) pada subbab selanjutnya.

2.2.2 Ragam Distribusi *Generalized* Eksponensial (α, λ)

Sebaran dari distribusi *Generalized* Eksponensial ditentukan oleh standar devisiasi, σ. Kuadrat dari standar devisiasi merupakan ragam dari distribusi *Generalized* Eksponensial. Definisi dan bentuk rumus umum dari nilai ragam, adapun penjelasannya sebagai berikut:

Definisi 2.4 (Ragam)

Misalkan X sampel acak dengan rata-rata terbatas μ dan sedemikian sehingga $E([X-\mu]^2)$ terbatas. Maka ragam dari X didefinisikan sebagai $E([X-\mu]^2)$. $E([X-\mu]^2)$ dinotasikan dengan σ^2 atau $Var(X)$ (Hogg And Craig, 1995).

Adapun Menurut Gupta dan Kundu tahun 2003 nilai ragam distribusi *Generalized* Eksponensial (a, λ) adalah:

$$Var(X) = E([X-\mu]^2) = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$\mathrm{Var}(X) = -\frac{1}{\lambda^2}((\psi'(a+1) - \psi'(1)) \quad (2.7)$$

Dimana ψ adalah derivatif dari fungsi Digamma (Gupta dan Kundu, 2000). Setelah mengetahui nilai harapan dan ragam distribusi *Generalized* Eksponensial maka sub-bab selanjutnya akan dijelaskan tentang metode pendugaan yang digunakan dalam penelitian skripsi ini .

2.3 Metode *Generalized* Momen

Metode *Generalized* Momen adalah suatu metode statistik yang sangat umum untuk memperoleh pendugaan parameter dari model statistik . Metode *Generalized* Momen merupakan suatu perumuman dari metode momen ,yang dikembangkan oleh Lars Petrus Hansen. Menurut Ashkar dan Bobe'e (1987) , metode ini telah lebih awal digunakan pada bidang ilmu hidrologi.

Berdasarkan studi oleh Rasmussen (2001), dan oleh Ashkar dan Mahdi (2003), penduga parameter dari suatu distribusi menggunakan bentuk PWM *(Probability Weight Moment)* yaitu :

$$M_{l,r} = E[X^l F^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^l [F(x)]^r . f(x) dx \quad (2.8)$$

$$= \int_0^1 x^l [F(x)]^r dF \quad (2.9)$$

dimana x adalah invers dari distribusi komulatif F(x), l merupakan momen ke-l dan r adalah statistik tataan ke –r+1.

$M_{l,r}$ ini bertindak sebagai suatu dasar untuk menerapkan metode *Generalized* Momen . Dalam metode *Generalized* Momen ,*r* diambil sama dengan 0, dan l

diambil sebarang yang tidak harus bilangan bulat , maupun positif (Ashkar & Mahdi,2003).

Pada sub-bab selanjutnya akan dibahas mengenai karakteristik suatu penduga distribusi yang baik.

2.4 **Karakteristik Suatu Penduga**

Pada umumnya, masalah yang terjadi pada statistika inferensia yaitu tentang pendugaan dan uji hipotesis. Perbedaan utama antara permasalahan ini yaitu untuk pendugaan harus ditentukan nilai parameter dari kemungkinan alternatifnya, sedangkan uji hipotesis harus ditentukan apakah diterima atau ditolak untuk suatu nilai yang spesifik dari parameter.

Untuk mendapatkan Penduga parameter dari suatu distribusi yang baik maka ada syarat-syarat suatu penduga yang harus dipenuhi. Beberapa syarat yang terpenting akan diuraikan dibawah ini.

2.4.1 Penduga Tak Bias

Sifat ketakbiasan penduga parameter dari suatu distribusi apabila memenuhi definisi 2.5 dibawah ini:

Definisi 2.5 (Penduga Tak bias)

Seandainya $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ merupakan sampel acak dari fungsi kepekatan peluang kontinu $f_y(y; \theta)$, dimana θ merupakan parameter yang tidak diketahui. Penduga $\hat{\theta}[= h(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)]$ dikatakan tak bias bagi θ, jika $E(\hat{\theta}) = \theta$ (semua θ) (Larsen dan Marx, 2012).

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan sifat konsisten penduga parameter distribusi yang baik.

2.4.2 Penduga Ragam Minimum

Ragam minimum penduga parameter suatu distribusi harus memenuhi definisi 2.6 sebagai berikut:

Definisi 2.6 (Ragam Minimum)

Bila U(X) merupakan penduga bagi $g(\theta)$, maka $U_1(X)$ dikatakan sebagai penduga beragam minimum, jika

$$\sigma^2_{u_{1(x)}} \leq \sigma^2_{U(X)}$$

Dimana U(X) merupakan sembarang penduga bagi $g(\theta)$ (Hogg and Craig, 1995). Berkaitan tentang teori pendugaan ragam minimum maka pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan teori beberapa faktor seperti informasi Fisher, matriks informasi Fisher dan pertidaksamaan *cramer- rao bound.* (Bain and Engelhardt,1992).

2.4.2.1 Informasi Fisher

Misal X peubah acak dengan f (x; θ), $\theta \epsilon \Omega$ dimana ruang parameter, Ω adalah interval dengan asumsi fungsi kontinu sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)\mathrm{dx} = 1$$

Dan diambil derivatif terhadap θ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x;\theta)}{\partial \theta} dx = 0$$

Ekuivalen dengan persamaan (2.10) di bawah ini :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f(x;\theta)}{\partial\theta}}{f(x;\ \theta)} dx = 0 \qquad (2.10)$$

Atau ekuivalen dengan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta}}{\mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta)} \mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta)\mathrm{dx} = 0$$

Jika diturunkan lagi terhadap θ

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 \ln \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta^2}\ \mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta) + \frac{\partial \ln \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta}\right] \mathrm{dx} = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta} \frac{\frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta}}{\mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta)}\ \mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta)\mathrm{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial \ln \mathrm{f}(\mathrm{x};\theta)}{\partial\theta}\right]^2\ \mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta)\mathrm{dx}$$

Jadi yang disebut informasi Fisher yang dinotasikan dengan $\mathrm{I}(\theta)$ yaitu :

$$\mathrm{I}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial ln\, f(x;\theta)}{\partial\theta}\right]^2\ f(x;\ \theta)dx \qquad (2.11)$$

Atau $\mathrm{I}(\theta)$ dihitung dari

$$\mathrm{I}(\theta) = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 ln\, f(x;\theta)}{\partial\theta^2}\ f(x;\ \theta)dx$$

Definisi 2.7 (Informasi Fisher)

Misalkan $x_1, x_2, ..., ... , ..., x_n$ merupakan sampel acak dari suatu distribusi yang mempunyai fungsi kepekatan peluang f(x; θ). Maka fungsi kemungkinan peluang $\mathrm{f}(\mathrm{x};\ \theta)$ adalah:

$$\mathrm{L}(\theta) = \mathrm{f}(\mathrm{x}_1;\ \theta)\mathrm{f}(\mathrm{x}_2;\ \theta) \dots \dots \mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{n};\ \theta) \qquad (2.12)$$

Dari persamaan 2.12 jika diberi fungsi logaritma natural, maka:

$$\ln \mathrm{L}(\theta) = \ln \mathrm{f}(\mathrm{x}_1;\ \theta) + \ln \mathrm{f}(\mathrm{x}_2;\ \theta) + \cdots \dots + \ln \mathrm{f}(\mathrm{x}_\mathrm{n};\ \theta)$$

Dan

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = \frac{\partial \ln f(x_1;\ \theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial \ln f(x_2;\ \theta)}{\partial\theta} + \cdots \ldots + \frac{\partial \ln f(x_n;\ \theta)}{\partial\theta}$$

Maka dapat didefinisikan informasi Fisher dalam sampel acak sebagai berikut:

$$I_n(\theta) = E\left\{\left[\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta}\right]^2\right\} \tag{2.13}$$

Berkaitan dengan teori informasi Fisher tersebut, selanjutnya akan dibahas mengenai matriks informasi Fisher,merupakan suatu vektor dari parameter.

2.4.2.2 Matriks Informasi Fisher

Pada Kasus multivariat, jika θ merupakan suatu vektor dari parameter maka I (θ) adalah matriks Informasi Fisher. Menurut Hogg dan Craig (1995), misalkan sampel acak X_1, X_2,......., X_n dari suatu distribusi dengan fungsi kepekatan peluang f(x; θ_1, θ_2) ; $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$. Misalkan dikatakan bahwa ruang dari X dimana f (X; θ_1, θ_2) > 0 yang tidak mengandung θ_1 dan θ_2 dapat diturunkan di bawah integral. Sehingga matriks informasi Fisher adalah sebagai berikut :

$$I_{n=}n\left[\begin{bmatrix} E\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta_{1,}\theta_2)}{\partial\theta_{1,}}\right]^2\right\} & E\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta_{1,}\theta_2)}{\partial\theta_{1,}}\ \frac{\partial \ln f(x;\theta_{1,}\theta_2)}{\partial\theta_{2,}}\right\} \\ E\left\{\frac{\partial \ln f(x;\theta_{1,}\theta_2)}{\partial\theta_{1,}}\ \frac{\partial \ln f(x;\theta_{1,}\theta_2)}{\partial\theta_{2,}}\right\} & \left\{\left[\frac{\partial \ln f(x;\theta_{1,}\theta_2)}{\partial\theta_2}\right]^2\right\} \end{bmatrix}\right]$$

Atau dapat ditulis juga sebagai berikut :

$$I_n(\alpha,\lambda) = -\begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial a}\right)\right) & E\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}\right)\right) \\ E\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}\right)\right) & E\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda}\right)\right) \end{bmatrix}$$

(Hogg dan Craig,1995).

Selanjutnya pada sub-bab berikut akan dibahas mengenai pertidaksamaan *Rao-Cramer Bound* atau *Rao- Cramer Lower Bound.*

2.4.2.3 Batas Bawah Rao-Cramer

Menurut Hog dan Craig tahun 1995, ketidaksamaan *Rao -Cramer-Bound* (CRB) dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{[k'(\theta)]^2}{nE\left[\left(\frac{\partial \ln f(X;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right]} = \frac{[k'(\theta)]^2}{nI(\theta)} \qquad (2.14)$$

Jika $Y = u(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n)$ adalah penduga tak bias bagi θ , jadi k $(\theta) = \theta$ sehingga $k'(\theta) = 1$ kemudian *Rao -Cramer-Bound* menjadi

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{nI(\theta)} \qquad (2.15)$$

Dimana $\frac{1}{I(\theta)}$ disebut sebagai *Rao Cramer Lower Bound*

Kemudian akan dijelaskan definisi tentang penduga yang efisien yaitu:

Definisi 2.8 (Penduga yang efisien)

Misalkan Y merupakan penduga tak bias dari suatu parameter θ dalam kasus pendugaan titik. Statistik Y disebut penduga yang efisien dari θ jika dan hanya jika ragam dari Y mencapai batas bawah *Rao Cramer Lower Bound* (Hogg dan Craig,1995).

2.4.3 **Penduga Konsisten *(Consistency)***

Selain Sifat ketakbiasan, sifat kekonsistenan harus dipenuhi suatu penduga parameter yang baik. Adapun penjelasannya sebagai berikut:

Apabila $\hat{\theta}_n$ merupakan penduga parameter θ yang ditentukan berdasarkan sampel berukuran n, maka $\hat{\theta}_n$ disebut penduga yang konsisten , apabila $\hat{\theta}_n$ konvergen dalam peluang ke θ untuk $n \to \infty$ atau untuk setiap $\varepsilon > 0$

Definisi 2.9 (konsisten)

Barisan dari variabel acak $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ konvergen dalam peluang ke variabel acak X jika untuk setiap $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\hat{\theta} - \theta\right] < \varepsilon = 1$$

Atau ekuivalen dengan persamaan berikut:

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\hat{\theta} - \theta\right] \geq \varepsilon = 0$$

Selanjutnya akan diberikan teorema pendukung yang berkaitan dengan pengujian sifat kekonsistenan penduga parameter.

Teorema Pertidaksamaan *Chebyshev* akan diberikan dengan Teorema 2.1 sebagai berikut:

Teorema 2.1 (Teorema Pertidaksamaan *Chebyshev)*

Misalkan X variabel acak dengan rata-rata μ dan ragam σ^2. Untuk $\forall\ \varepsilon > 0$, k > 0

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

Atau ekuivalen dengan

$$P(|X - \mu| < k\sigma) \leq 1 - \frac{1}{k^2}$$

Dan jika dimisalkan $\varepsilon = k\sigma$ maka

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2} \text{ untuk } \forall \varepsilon > 0$$

Atau ekuivalen dengan

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) \leq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} \text{ untuk } \forall \varepsilon > 0$$

Pada sub-bab selanjutnya akan dijelaskan sifat konsisten penduga parameter distribusi yang baik.

2.5 Varian-Kovarian Asimtotik Penduga Parameter dari Metode *Generalized* Momen

Asimtotik Varian-Kovarian distribusi *Generalized* Eksponensial $(\hat{a}, \hat{\lambda})$ diperoleh dari Varian-Kovarian Momen M_{l1}dan M_{l2} sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\hat{a}) \\ \mathrm{Var}(\hat{\lambda}) \\ \mathrm{Cov}(\hat{a}, \hat{\lambda}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^2 & M_{12}^2 & 2M_{11}M_{12} \\ M_{21}^2 & M_{22}^2 & 2M_{21}M_{22} \\ M_{11}M_{21} & M_{12}M_{22} & M_{11}M_{22} + M_{21}M_{12} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{X} \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(M_{l_{1,0}}) \\ \mathrm{Var}(M_{l_{2,0}}) \\ \mathrm{Cov}(M_{l_{1,0}}, M_{l_{2,0}}) \end{bmatrix}$$

Keterangan:

$$M_{11} = \frac{\partial M_{l_1}}{\partial a} \qquad \mathrm{Var}(M_{l_{1,0}}) = \frac{1}{n}\left[M_{2l_1} - M_{l_1}^2\right]$$

$$M_{12} = \frac{\partial M_{l_1}}{\partial \lambda} \qquad \mathrm{Var}(M_{l_{2,0}}) = \frac{1}{n}\left[M_{2l_2} - M_{l_2}^2\right]$$

$$M_{21} = \frac{\partial M_{l_2}}{\partial a} \qquad \mathrm{Cov}(M_{l_{1,0}}, M_{l_{2,0}}) = \frac{1}{n}\left[M_{l_1+l_2} - M_{l_1}.M_{l_2}\right]$$

$$M_{22} = \frac{\partial M_{l2}}{\partial \lambda}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(M_{l_{1,0}}) \\ \mathrm{Var}(M_{l_{2,0}}) \\ \mathrm{Cov}(M_{l_{1,0}}, M_{l_{2,0}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\left[M_{2l_1} - M_{l_1}^2\right]) \\ \frac{1}{n}\left[M_{2l_2} - M_{l_2}^2\right] \\ \frac{1}{n}\left[M_{l_1+l_2} - M_{l_1}.M_{l_2}\right] \end{bmatrix}$$

(Ashkar dan Mahdi, 2006).